

УДК 531/534:[57+61]

О.И. Дударь, Д.И. Бобина, А.И. Ляшкова
O.I. Dudar, D.I. Bobina, A.I. Lyashkova

Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Perm National Research Polytechnic University

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В ЖЕВАТЕЛЬНЫХ МЫШЦАХ ПРИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ОККЛЮЗИИ

DETERMINATION OF FORCES IN MASTICATORY MUSCLES AT THE CENTRAL OCCLUSION

Разработана модель определения усилий в жевательных мышцах, возникающих при действии жевательной нагрузки на нижнюю челюсть в случае центральной окклюзии. Рассматриваются три различных предположения, позволяющих раскрыть статическую неопределенность. Сравнение расчетных и экспериментальных данных показывает, что лучше всего выполняется предложенное в данной работе предположение о функциональной равноправности мышц-синергистов.

The paper contains developed model to determine forces in the masticatory muscles arising from the action of biting load on the mandible in the case of central occlusion. Three various assumptions allowing to eliminate redundancy are considered. Comparison of computational and experimental data shows that the assumption offered in this work of a functional equivalency of muscles-synergists is fulfilled most accurately.

Ключевые слова: центральная окклюзия, усилия в жевательных мышцах, жевательная нагрузка, височно-нижнечелюстной сустав, принцип функциональной равноправности.

Keywords: central occlusion, forces in masticatory muscles, biting load, temporomandibular joint, principle of functional equivalence.

Определение усилий в жевательных мышцах необходимо для нахождения усилий, действующих на зубы и височно-нижнечелюстной сустав. Эта информация может оказаться важной при терапевтическом, ортопедическом и ортодонтическом лечении зубов, а также при лечении заболеваний височно-нижнечелюстного сустава (ВНЧС).

Одной из основных проблем определения усилий в жевательных мышцах является статическая неопределимость этой системы сил, так как количество неизвестных, к которым относятся усилия в жевательных мышцах, и реакция в ВНЧС значительно превышает число уравнений равновесия для этой системы сил. Для раскрытия статической неопределенности системы, как правило, используют один из двух подходов [1, 2]:

1) систему делают статически определимой, используя дополнительные допущения, которые позволяют повысить число уравнений до числа неизвестных системы;

2) формулируют оптимальные принципы, которые после решения соответствующей задачи оптимизации позволяют определить неизвестные усилия в жевательных мышцах и суставе.

В данной работе используется первый подход. Как в работе [3], принимаются предположения, позволяющие получить систему из трех уравнений с четырьмя неизвестными. Для замыкания такой системы вводим дополнительное предположение, основанное на новом принципе функциональной равноправности мышц-синергистов. Кроме того, в данной работе рассматривается еще два варианта замыкающего предположения:

- 1) силы в мышцах пропорциональны их площадям поперечных сечений;
- 2) силы должны быть таковы, чтобы реакция в височно-нижнечелюстном суставе была минимальной.

Сравнение с экспериментом демонстрирует, что лучше всего выполняется принцип функциональной равноправности мышц-синергистов.

Математическая постановка задачи. Центральная окклюзия характеризуется смыканием зубов при максимальном количестве контактирующих точек. Обозначим равнодействующую сил действия зубов верхней челюсти на зубы нижней челюсти через L и будем считать ее заданной (160 Н). При центральной окклюзии имеет место сокращение следующих жевательных мышц:

1) левая и правая собственно жевательные мышцы с силами F_{ml} и F_{mr} , левая и правая височные мышцы с силами F_{ll} и F_{lr} , левая и правая внутренние крыловидные мышцы с силами F_{li} и F_{lr} (мышцы-закрыватели);

2) челюстно-подъязычная мышца с силой F_{mh} , подбородочно-подъязычная мышца с силой F_{gh} , двубрюшная мышца с силой F_d (мышцы-открыватели);

3) левая и правая наружные крыловидные мышцы с силами F_{el} и F_{er} .

Кроме того, в рассматриваемом случае на правую и левую суставные головки челюсти действуют реакции R_l и R_r височно-нижнечелюстных суставов.

Тогда условия равновесия рассматриваемой системы сил в векторном виде записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \bar{F} = \bar{F}_{ml} + \bar{F}_{mr} + \bar{F}_{tl} + \bar{F}_{tr} + \bar{F}_{il} + \bar{F}_{ir} + \bar{F}_{el} + \bar{F}_{er} + \bar{F}_{mh} + \bar{F}_{gh} + \bar{F}_d + \bar{R}_l + \bar{R}_r + \bar{L} = 0, \\ \bar{M}_A = \bar{m}_A(\bar{F}_{ml}) + \bar{m}_A(\bar{F}_{mr}) + \bar{m}_A(\bar{F}_{tl}) + \bar{m}_A(\bar{F}_{tr}) + \bar{m}_A(\bar{F}_{il}) + \bar{m}_A(\bar{F}_{ir}) + \bar{m}_A(\bar{F}_{el}) + \\ + \bar{m}_A(\bar{F}_{er}) + \bar{m}_A(\bar{F}_{mh}) + \bar{m}_A(\bar{F}_{gh}) + \bar{m}_A(\bar{F}_d) + \bar{m}_A(\bar{R}_l) + \bar{m}_A(\bar{R}_r) + \bar{m}_A(\bar{L}) = 0. \end{cases}$$

Если спроектировать эту систему на оси координат, то получим 6 скалярных уравнений с 17 неизвестными.

В данной работе рассматривается центральная окклюзия и зубной ряд без дефектов, задачу можно считать симметричной. В этом случае левые и правые мышцы развивают одинаковые усилия. Равновесие сил и моментов для нижней челюсти обеспечивается тремя уравнениями с 7 неизвестными: пятью мышечными силами, а также величиной R и углом φ , задающим направление реакции в суставе.

Для сокращения числа неизвестных введем дополнительные упрощения:

1) так как жевательная и внутренняя крыловидная мышцы располагаются очень близко друг к другу и проходят почти параллельно, то их можно объединить (их суммарное усилие обозначим F);

2) в первом приближении можно считать, что наружная крыловидная мышца и мышцы-открыватели участия в процессе закрывания рта при центральной окклюзии не принимают, вследствие чего полагаем, что силы, действующие со стороны этих мышц, равны нулю.

В результате остается: суммарное усилие жевательной и внутренней крыловидной мышцы F , жевательная нагрузка L , реакция R , усилие височной мышцы F_t (рис. 1).

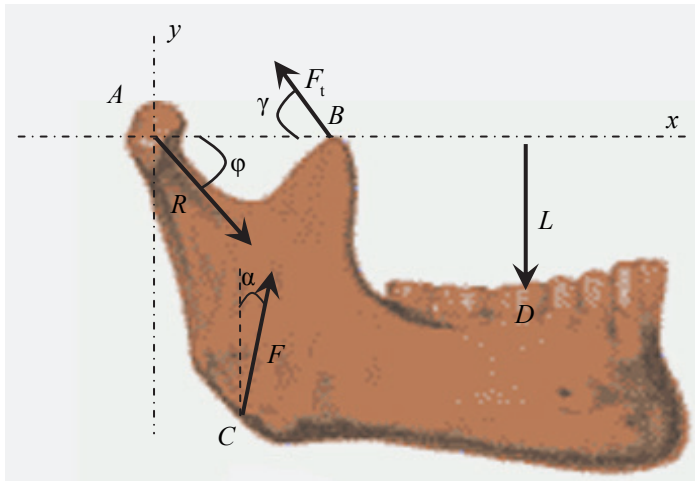


Рис. 1. Упрощенная модель действия мышечных усилий на нижнюю челюсть

Заменяем реальный объект расчетной схемой (рис. 2).

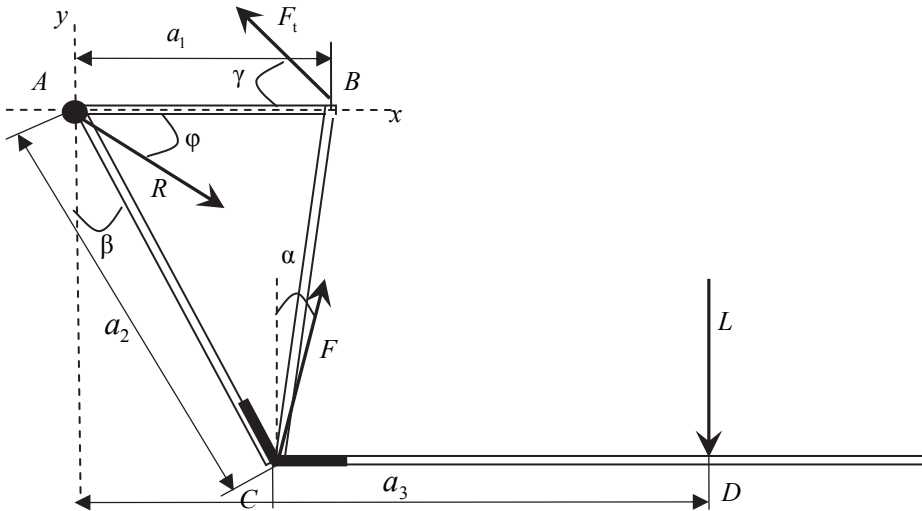


Рис. 2. Расчетная схема действия мышечных усилий на нижнюю челюсть

Тогда уравнения равновесия будут иметь вид (смысл углов и расстояний виден из рис. 1, 2):

$$\begin{cases} \sum F_x = R \cos \varphi - F_t \cos \gamma + F \sin \alpha = 0, \\ \sum F_y = -R \sin \varphi + F_t \sin \gamma + F \cos \alpha - L = 0, \\ \sum M_A = F_t \sin \gamma a_1 + F \sin(\alpha + \beta) a_2 - L a_3 = 0. \end{cases}$$

Как видно, мы имеем три уравнения с четырьмя неизвестными: двумя мышечными усилиями, а также величиной и направлением силы реакции на сустав. Система по-прежнему является статически неопределимой. Принимаем следующее дополнительное предположение. Из анализа экспериментальных данных [3] видно, что усилия в жевательных мышцах можно считать пропорциональными:

$$\frac{F}{F_t} = k = \text{const.}$$

Рассмотрим варианты предположений, из которых определяется значение коэффициента k :

- 1) моменты сил F и F_t относительно точки A равны (равноправность синергистов);
- 2) усилия пропорциональны площадям поперечных сечений;

3) k находим из условия, что реакции R в суставе должна быть минимальной.

В первом случае

$$M_F = M_{F_t},$$

$$F_t \cdot a_1 \cdot \sin \gamma = F \cdot a_2 \cdot \sin(\alpha + \beta),$$

$$k_1 = \frac{F}{F_t} = \frac{a_1 \sin \gamma}{a_2 \cdot \sin(\alpha + \beta)}. \quad (1)$$

Во втором случае

$$\frac{F}{F_t} = \frac{\psi S}{\psi S_t} = \frac{S}{S_t},$$

$$k_2 = \frac{S}{S_t}. \quad (2)$$

Определение k в третьем случае будет подробно рассмотрено позже (для определения нужно иметь график зависимости $R(k)$).

Геометрические параметры нижней челюсти. Как отмечалось выше, для решения поставленной задачи необходимо иметь значения следующих геометрических параметров нижней челюсти (см. рис. 1, 2): α – угла суммарного усилия от жевательной и внутренней крыловидной мышц F с линией, параллельной оси y ; β – угла отклонения ветви нижней челюсти от вертикали; γ – угла силы височной мышцы с отрицательным направлением оси x ; a_1 – расстояния между суставным и венечным отростками; a_2 – расстояния от суставной головки до угла нижней челюсти; a_3 – расстояния от оси вращения до линии действия жевательной нагрузки.

С целью определения интересующих нас углов и расстояний были получены цифровые изображения имеющегося образца челюсти (рис. 3, 4), далее были произведены замеры с использованием морфометрической программы обработки изображений UTHSCSA Image Tool для Windows. Результаты измерений приведены в табл. 1.

Расстояние a_3 от оси вращения до линии действия равнодействующей жевательной нагрузки L найдем по формуле центра параллельных сил:

$$x_c = \frac{\sum F_k l_k}{L} = \sum F_k^0 l_k,$$

где $L = \sum F_k$ – величина равнодействующей; l_k – расстояния от пар зубов до оси вращения; F_k^0 – доля жевательной нагрузки, приходящаяся на данную пару антагонистов.

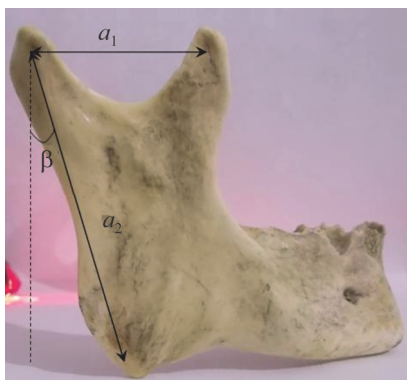


Рис. 3. Вид нижней челюсти сбоку



Рис. 4. Вид нижней челюсти сверху: измерение расстояний от зубов до оси вращения

Таблица 1

Результаты измерений, полученные с помощью программы UTHSCSA Image Tool

Параметр		Обозначение	Размеры
Расстояние от суставного отростка до угла нижней челюсти, см		a_2	6,5
Расстояние между отростками (суставным и венечным), см		a_1	3,5
Угол отклонения ветви нижней челюсти от вертикали		β	20°
Расстояние от линии, соединяющей суставные головки, до зуба, см	Третий моляр	l_8	4,1
	Второй моляр	l_7	4,8
	Первый моляр	l_6	5,5
	Второй премоляр	l_5	6,1
	Первый премоляр	l_4	6,4
	Клык	l_3	6,7
	Боковой резец	l_2	6,9
	Центральный резец	l_1	7

Значения величин F_k^0 были взяты из статьи [4]. Тогда из расчета получим

$$x_c = a_3 = 5,8 \text{ см.}$$

В работе [5] даны углы F и F_t с франкфуртской горизонталью. Тогда, учитывая угол между франкфуртской горизонталью и окклюзионной плоскостью (примерно 10°), получаем значения углов α и γ : $\alpha = 3,5^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными.

Для сравнения расчетных данных с экспериментальными построим графики зависимости мышечных усилий от жевательной нагрузки для трех вариантов

значения коэффициента пропорциональности нагрузок k . Для первого и второго варианта коэффициент k рассчитывался по формулам (1) и (2). Для определения коэффициента k для третьего варианта был построен график $R(k)$ (рис. 5).

Значения коэффициента k для трех вариантов:

1. Равенство моментов: $k = 0,95$.
2. Пропорциональность усилий площадям поперечного сечения: $k = 1,36$.
3. Минимизация величины реакции в суставе: $k = 2,59$.

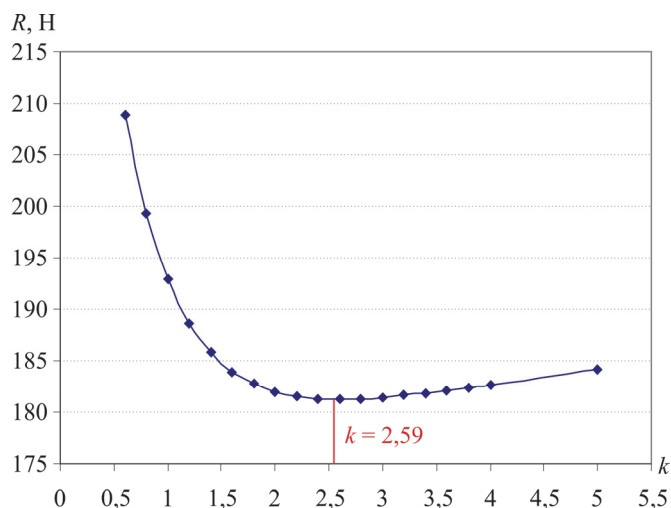


Рис. 5. Зависимость величины реакции в височно-нижнечелюстном суставе от коэффициента k

Значение k , при котором достигается минимальная реакция, определялось с помощью метода одномерной оптимизации, а именно метода дихотомии (деления отрезка пополам) [6].

Отметим, что так как нагрузка в экспериментах прикладывалась к первому и второму моляру, то в расчетах расстояние a_3 принималось равным 5,5 см в первом случае и 4,8 см во втором случае (см. табл. 1).

Как показывают эксперименты, зависимости $F(L)$ и $F_t(L)$ можно считать прямыми линиями. Обе линии выходят из начала координат, поэтому для их построения достаточно получить только одну точку. Полученные значения для каждого из трех вариантов приведены в табл. 2.

Далее на рис. 6–7 показаны результаты сравнения расчетных значений усилий в жевательных мышцах с экспериментальными данными, взятыми из работы [3]. Сравнение выполнено для вариантов приложения жевательной нагрузки к первому и второму молярам.

Значения, полученные для трех вариантов принимаемых предложений

Вариант	L , Н	F_t , Н	F , Н	R , Н	φ , град
1	160	187	179	194	51
2	160	155	210	186	59
3	160	100	250	181	72

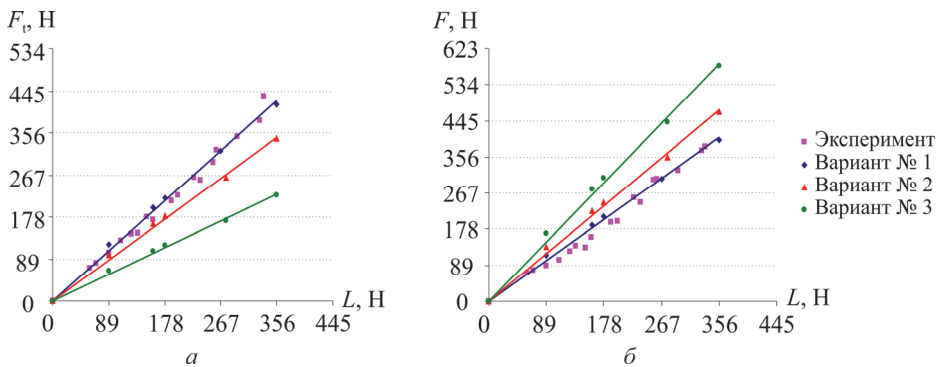


Рис. 6. Зависимость усилий в мышцах от жевательной нагрузки, приложенной к первому моляру ($a_3 = 5,5$ см): a – височная мышца; \bar{b} – жевательная + внутренняя крыловидная мышцы

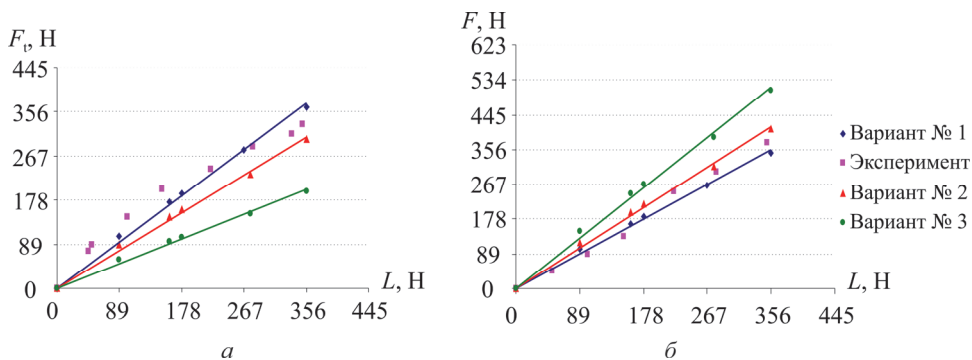


Рис. 7. Зависимость усилий в мышцах от жевательной нагрузки, приложенной по второму моляру ($a_3 = 4,8$ см): a – височная мышца; \bar{b} – жевательная + внутренняя крыловидная мышцы

Экспериментальные данные очень хорошо согласуются с результатами, полученными с помощью предложенного нами принципа равенства моментов усилий в жевательных мышцах-синергистах (предположение о функциональной равноправности мышц-синергистов), тогда как для двух других предпо-

ложений расчетные данные согласуются с экспериментальными хуже. Это позволяет сделать вывод об адекватности предложенного нами метода.

Применение биомеханического моделирования для лечения патологий зубочелюстной системы является актуальной задачей в биомеханике [7–11]. Нами разработана модель определения усилий в жевательных мышцах при центральной окклюзии для трех предположений, позволяющих раскрыть статическую неопределенность. Сравнение расчетных и экспериментальных данных позволяет сделать вывод об адекватности предложенного нами принципа функциональной равноправности мышц-синергистов, так как в этом случае полученные результаты наиболее согласованы с экспериментальными данными.

Список литературы

1. A three-dimensional mathematical model of the human masticatory system predicting maximum possible bite forces / J.H. Koolstra, T.M.G.J. van Eijden, W.A. Weijs, M. Naeije // *J. Biomechanics*. – 1988. – Vol. 21. – P. 563–576.

2. Определение усилий, возникающих в жевательной системе человека / А.А. Киченко, А.Ю. Шумихин, В.М. Тверье, Ю.И. Няшин, Е.Ю. Симановская, А.Н. Еловицова // *Российский журнал биомеханики*. – 2004. – Т. 4. – С. 23–30.

3. Kang Q.S., Updike D.P., Salathe Eric P. Theoretical prediction of muscle forces on the mandible during bite // *J. of Biomechanical Engineering*. – 1990. – Vol. 112 (Nov.) – P. 432–436.

4. Распределение жевательной нагрузки по зубному ряду при центральной окклюзии / О.И. Дударь, И.П. Костерина, Л.В. Майорова, Н.А. Фатеева // *Российский журнал биомеханики*. – 2009. – Т. 2. – С. 23–30.

5. Бетельман А.И., Бынин Б.Н. Ортопедическая стоматология. – М.: Медгиз, 1951. – 388 с.

6. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации – М.: Наука, 1986. – 368 с.

7. Лохов В.А., Кучумов А.Г. Создание заданных усилий в фиксаторах, изготовленных из сплавов с памятью формы // *Российский журнал биомеханики*. – 2006. – Т. 10, № 3. – С. 41–52.

8. Лохов В.А., Няшин Ю.И., Кучумов А.Г. Сплавы с памятью формы: применение в медицине. Обзор моделей, описывающих их поведение // *Российский журнал биомеханики*. – 2007. – Т. 11, № 3. – С. 9–27.

9. Применение материалов с эффектом памяти формы при лечении заболеваний зубочелюстной системы / В.А. Лохов, Ю.И. Няшин, А.Г. Кучумов, М. Менар, А.Р. Гачкевич, С.Ф. Будз, А.Е. Онышко // *Российский журнал биомеханики*. – 2008. – Т. 12, № 4. – С. 7–17.

10. Численное решение задачи оптимизации для определения параметров установки фиксаторов с памятью формы / А.Г. Кучумов, В.А. Лохов, Ю.И. Няшин, М. Менар, А.А. Селянинов // Российский журнал биомеханики. – 2009. – Т. 13, № 1. – С. 18–28.

11. Экспериментальное исследование сплавов с памятью формы, применяющихся в медицине / А.Г. Кучумов, В.А. Лохов, С.В. Словиков, В.Э. Вильдеман, Г.И. Штраубе, Д.А. Суторихин // Российский журнал биомеханики. – 2009. – Т. 13, № 3. – С. 7–19.

Получено 1.09.2014

Дударь Олег Иосифович – кандидат физико-математических наук, доцент, ПНИПУ, ФПММ, e-mail: olegdudar@yandex.ru.

Бобина Дарья Ивановна – магистрант, ПНИПУ, ФПММ, гр. БМ-13-1м, e-mail: dashkabobi@mail.ru.