

Р.В. Бульбович, В.В. Павлоградский, В.В. Пальчиковский

Пермский государственный технический университет

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Приводится экспериментально-теоретический метод определения комплексного коэффициента Пуассона вязкоупругих материалов. Математической основой экспериментально-теоретического метода определения коэффициента Пуассона является конечно-элементная модель деформирования образца-столбика. Метод конечных элементов базируется на вариационном принципе Германна. Задача решается в осесимметричной постановке. Вязкоупругое решение получено с использованием принципа соответствия. Для описания параметров комплексных операторов модуля упругости и коэффициента Пуассона используются полиномиальные зависимости. Приводятся результаты идентификации материала, полученные после обычной экспериментальной процедуры, а также после корректировки на основе решения обратной задачи.

Ключевые слова: экспериментально-теоретический метод, комплексный коэффициент Пуассона, метод конечных элементов, вариационный принцип Германна, вязкоупругое решение.

Методические вопросы экспериментального определения коэффициента Пуассона конструкционных вязкоупругих материалов в динамических условиях нагружения получают дальнейшее развитие. Обычная экспериментальная процедура, изложенная ранее в экспериментальной части метода и направленная на выделение механических свойств на основании параметров, измеренных в динамическом опыте [1], включает дополнительный анализ, который используется для того, чтобы связать наблюдаемые величины с истинными механическими характеристиками комплексным модулем упругости E и комплексным коэффициентом Пуассона μ . Теоретические основы эксперимента позволяют в той или иной мере выбирать экспериментальную процедуру, которая представляет меньшие сложности для такого анализа. Стремление экспериментатора свести к минимуму влияние граничных условий на измеряемые величины не всегда может найти свое решение в связи с ограничениями, накладываемыми на динамический опыт. Как показали исследования, чувствительность

параметров комплексного коэффициента Пуассона к граничным условиям оказывается достаточно высокой, и объективная информация о механических характеристиках может быть получена только после теоретического анализа экспериментальной ситуации. Для решения теоретических уравнений поля требуется знание обеих вязкоупругих деформационных характеристик, и в этом случае опыт должен давать достаточную экспериментальную информацию для идентификации комплексных операторов E и μ .

Таким образом, процедура определения комплексного коэффициента Пуассона в общем случае предполагает необходимость разработки экспериментально-теоретического метода, включающего экспериментальное определение параметров, характеризующих динамические свойства вязкоупругого материала, и теоретический анализ, направленный на идентификацию истинных значений комплексных операторов. В целом экспериментально-теоретический метод охватил более широкий круг задач как традиционно решаемых при постановке эксперимента, так и специфических, обусловленных самим методом, и структурно представлен на рис. 1. Специфические задачи, обусловленные самим методом, включали:

- разработку экспериментального метода [2,3], позволяющего определять контактным методом предварительные параметры (на базе обычной экспериментальной процедуры) комплексного коэффициента Пуассона и одновременно комплексного модуля упругости;

- разработку математической модели динамического напряженно-деформированного состояния образца-столбика (прямая задача) из вязкоупругого материала, построенной на базе метода конечных элементов (МКЭ) и учитывающей вязкоупругие свойства материала в форме комплексных операторов;

- построение феноменологической модели обратной задачи на основе решения прямой задачи;

- разработку методики, позволяющей определять истинные значения параметров комплексных операторов (дополнительный анализ) с использованием идентифицированной феноменологической модели.



Рис. 1. Структура экспериментально-теоретического метода идентификации динамических свойств вязкоупругих материалов

Математической основой экспериментально-теоретического метода определения коэффициента Пуассона является конечно-элементная модель деформирования образца-столбика, торцы которого жестко вклеены в металлические грибки, имеющие заглубления. Задача рассматривалась в осесимметричной постановке. Физическая модель представлена на рис. 2. Вся область разбивается на ряд кольцевых треугольных в сечении элементов.

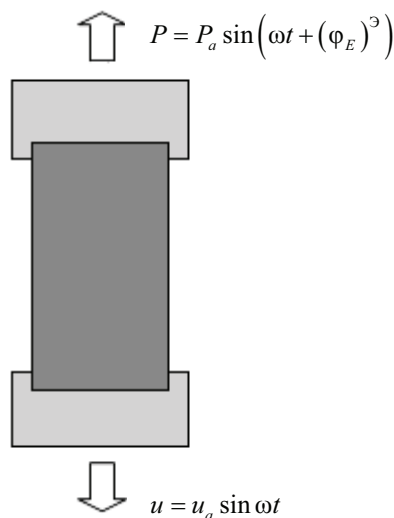


Рис. 2. Физическая модель

Коэффициент Пуассона мягких вязкоупругих материалов при определенных условиях может принимать значения, близкие к 0,5, и в этом случае обычные модели МКЭ не дают надежных решений, поэтому модель МКЭ базировалась на принципе Геррманна с введением в рассмотрение дополнительной функции среднего напряжения. Приведенной постановке граничной упругой задачи эквивалентен следующий вариационный принцип: среди всех допустимых значений перемещений и функции среднего напряжения, фактически существующие, определяются вариационным уравнением, которое в цилиндрических координатах записывается в виде

$$J = 2\pi \sum_{i=1}^N \int_V G \{ \varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_z^2 + 2\mu H(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) - \mu(1-\mu)H^2 \} dV - \\ - \int_S (P_r u_r + P_z u_z) dS,$$

где N – количество конечных элементов;
 $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ – радиальная, окружная и осевая деформации;
 $H = (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) / 3E$ – функция среднего напряжения;
 V – объем конечного элемента;
 S – площадь конечного элемента;
 u_r, u_z – перемещения в радиальном и осевом направлениях;
 r, z – координаты;
 G – модуль сдвига твердого топлива;
 P_r, P_z – поверхностные силы в радиальном и осевом направлениях.

Для повышения точности использовались эрмитовы элементы, которые наряду с непрерывностью функции перемещений между элементами обеспечивают непрерывность частных производных в узловых точках, т.е. непрерывность деформаций. Функции перемещений в треугольном элементе аппроксимировались полными кубическими полиномами, коэффициенты которых однозначно определяются перемещениями и их производными по координатам r и z в каждой вершине конечного элемента и перемещением в центре тяжести треугольного элемента. Функция среднего напряжения аппроксимировалась линейным полиномом в каждом конечном элементе.

Поскольку узел, лежащий в центре масс, влияет только на вклад элемента, которому он принадлежит, то удалось сократить порядок динамической матрицы жесткости элемента путем исключения центрального узлового значения с использованием статической конденсации. Использование статической конденсации на уровне элемента позволяет снизить порядок системы уравнений и уменьшить в некоторых случаях более чем в 2 раза объем требующейся оперативной памяти.

В том случае, когда внешняя нагрузка изменяется по закону

$$\{R\} = \{R_a\} e^{i\omega t},$$

уравнение движения вязкоупругого образца принимает вид

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\delta_a\} = \{R_a\},$$

где ω – круговая частота возмущения;
 $[M]$ – матрица масс конструкции;
 $[K]$ – матрица жесткости конструкции;

$\{R\}$ – вектор нагрузки.

$\{\delta_a\}$, $\{R_a\}$ – амплитудные значения параметров.

Для вычисления коэффициентов матрицы жесткости, матрицы масс и вектора нагрузки используется численное интегрирование по квадратуре Гаусса.

Вязкоупругое решение было получено с использованием принципа соответствия, т.е. заменой упругих констант материала на вязкоупругие, комплексные:

$$E = E_1 + iE_2,$$

$$\mu = \mu_1 + i\mu_2,$$

где E_1 , E_2 , μ_1 , μ_2 – действительные и мнимые части модуля упругости и комплексного коэффициента Пуассона вязкоупругого материала соответственно.

Искомые параметры (перемещения узлов, их производные, функция среднего напряжения, деформации и напряжения) в этом случае также становятся комплексными величинами.

Граничные условия отражают следующие особенности:

- осесимметричность области;
- глухую заделку твердотопливного образца в нижний и верхний грибки;
- кинематический способ задания нагрузки в виде перемещения u_{x1} нижнего грибка;
- податливость верхнего грибка, обусловленную конечной жесткостью датчика усилий.

При учете податливости верхнего грибка, обусловленной конечной жесткостью датчика усилий, нагрузка считается распределенной по всей площади поперечного сечения грибка и определяется в соответствии с соотношением

$$p = \bar{c}_d u_x,$$

где $\bar{c}_d = c_d / S$;

S – площадь поперечного сечения грибка;

c_d – жесткость датчика усилия.

Результаты расчетов перемещения узлов, функция среднего напряжения, деформации и напряжения в узлах представляются в виде

$$x = x_a \sin(\omega t + \varphi_x),$$

где x – значение исследуемого параметра;

x_a – амплитудное значение исследуемого параметра;

t – время;

φ_x – угол сдвига фазы исследуемого параметра.

Математическая модель позволила выявить существенное влияние реальных граничных условий на НДС образца-столбика и некорректность обычной экспериментальной процедуры определения параметров комплексного коэффициента Пуассона по формулам (1) без учета соответствующих поправок:

$$(\mu^*)^{\circ} = \frac{u_{rb}}{u_{x1}} \frac{2l_0}{d_0}, \quad (1)$$

$$(\varphi_{\mu})^{\circ} = \varphi_{u_{rb}} - \varphi_{u_{x1}} + 180,$$

где $(\mu^*)^{\circ}$, $(\varphi_{\mu})^{\circ}$ – определяемые на базе обычной экспериментальной процедуры значения динамического коэффициента Пуассона и угла сдвига фазы между продольной и поперечной деформациями дополнительного к 180 градусам;

u_{rb} – амплитуда радиального смещения образца в среднем сечении;

u_{x1} – амплитуда заданного осевого смещения образца;

l_0 , d_0 – начальная длина и диаметр образца;

$\varphi_{u_{rb}}$ – угол сдвига фазы радиального смещения наружной поверхности образца в среднем сечении относительно фазы $\varphi_{u_{x1}} = 0$, задаваемого осевого смещения (в градусах).

После постановки математического эксперимента по разработанной модели была получена информация по величине базовых длин для комплексного модуля l_{BE} и комплексного коэффициента Пуассона $l_{B\mu}$, а также по поправкам углов сдвига фазы, определяемых следующими соотношениями:

$$l_{B\mu} = \frac{(\mu^*)^{\circ} d_0 u_{x1}}{2u_{rb}},$$

$$l_{BE} = \frac{(E^*)^{\vartheta} u_{x1}}{c_d u_d},$$

$$\Delta\varphi_{\mu} = (\varphi_{\mu})^M - (\varphi_{\mu})^{\vartheta},$$

$$\Delta\varphi_E = (\varphi_E)^M - (\varphi_E)^{\vartheta},$$

где $(E^*)^{\vartheta}$, $(\varphi_E)^{\vartheta}$ – определяемые на базе обычной экспериментальной процедуры значения динамического модуля и угла сдвига фазы между напряжением и продольной деформацией;

$(\varphi_{\mu})^M$, $(\varphi_{\mu})^E$ – углы сдвига фазы между напряжением и продольной деформацией, продольной и поперечной деформациями в материале соответственно;

$\Delta\varphi_E$, $\Delta\varphi_{\mu}$ – соответствующие поправки по углам сдвига фазы;

u_d – амплитуда смещения датчика усилий.

Анализ результатов показал, что базовые длины и поправки по углам сдвига фазы зависят от параметров комплексного коэффициента Пуассона и динамического модуля, а поправка $\Delta\varphi_E$ несущественно отличается от поправки $\Delta\varphi_{\mu}$. С учетом этого, а также в силу того, что реальные углы сдвига фазы между напряжением и деформацией более чем на порядок превышают величину самой поправки, было принято, что $\Delta\varphi_E \approx \Delta\varphi_{\mu}$. На основании регрессионного анализа результатов математического эксперимента были получены феноменологические полиномиальные модели для l_{BE} , $l_{B\mu}$, $\Delta\varphi_{\mu}$ в зависимости от $\lg(E^*)^M$, $(\mu^*)^M$, $(\varphi_E)^M$ и $(\varphi_{\mu})^M$.

Для определения истинных деформационных свойств вязкоупругих материалов $(E^*)^M$, $(\mu^*)^M$, $(\varphi_E)^M$ и $(\varphi_{\mu})^M$ была предложена итерационная процедура (обратная задача), связанная с последовательным уточнением базовых длин и поправки $\Delta\varphi_{\mu}$. Исходной информацией для решения обратной задачи являются данные динамических опытов, проведенных по разработанному, близкого к D-оптимальному экспериментальному плану, включающему 9 точек факторного пространства «частота нагружения – температура опыта» и изначально принятые базовые длины l_{BE} , $l_{B\mu}$. Итерационная процедура заканчивается при выполнении условий:

$$\begin{aligned} |\Delta I_{BE}| &= |I_{BE}^{k+1} - I_{BE}^k| \leq \delta_1, \\ |\Delta I_{B\mu}| &= |I_{B\mu}^{k+1} - I_{B\mu}^k| \leq \delta_1, \\ |\Delta \varphi_{\mu}^{k+1} - \Delta \varphi_{\mu}^k| &\leq \delta_2, \end{aligned}$$

где δ_1, δ_2 – заданные точности определения базовых длин и поправки по углу сдвига фазы соответственно;

k – номер итерации.

Для описания параметров комплексных операторов использовались полиномиальные зависимости, примененные ранее для комплексного модуля упругости [4], и, как показал регрессионный анализ, адекватные и для описания параметров комплексного коэффициента Пуассона в форме:

$$\begin{aligned} \mu^* &= c_0 + c_1 \lg v' + c_2 (\lg v')^2 + c_3 (\lg v')^3 + c_4 (\lg v')^4, \\ \varphi_{\mu} &= b_0 + b_1 \lg v' + b_2 (\lg v')^2 + b_3 (\lg v')^3, \\ \lg a_T &= a_0 + a_1 T + a_2 T^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где μ^* – динамический коэффициент Пуассона, $\mu^* = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}$;

a_T – коэффициент температурного смещения;

T – температура;

v' – приведенная частота нагружения, $v' = v a_T$.

a_n ($n = 0, 1, 2$); b_p ($p = 0, 1, 2, 3$); c_r ($r = 0, 1, \dots, 4$) – коэффициенты, определяемые в результате параметрической идентификации.

По окончании итерационного процесса по откорректированным данным проводится повторная параметрическая идентификация полиномиальных зависимостей $\mu^* = f_1(\lg v')$, $\varphi_{\mu} = f_2(\lg v')$, $E^* = f_3(\lg v')$. $\varphi_E = f_4(\lg v')$ в форме (2) и ей аналогичной для комплексного модуля упругости с использованием процедуры случайного поиска и алгоритма среднестатистического градиента. Повторная параметрическая идентификация может изменить начальный участок так, что $\sup f_1(\lg v')$ станет больше значения 0,5. В этом случае математическое описание может потерять физический смысл для материалов, являющихся несжимаемыми в статических условиях. Физический смысл мо-

жет быть возвращен процедурой, изложенной в способе определения динамического коэффициента Пуассона [5] и состоящей в корректировке значений коэффициента Пуассона с учетом выполнения условия $\sup f_1(\lg v') = 0,5$ и в последующей окончательной идентификации обобщенной зависимости коэффициента Пуассона.

На рис. 3 и 4 приведены результаты идентификации динамических свойств высоконаполненного каучука, полученные после обычной экспериментальной процедуры, а также после корректировки на основе решения обратной задачи. Характерно, что корректировка вносит существенные изменения в значения коэффициента Пуассона и угла сдвига фазы между продольной и поперечной деформациями и незначительно влияет на параметры комплексного модуля упругости, что оправдывает определение комплексного модуля упругости на базе обычной экспериментальной процедуры. Коэффициент Пуассона после решения обратной задачи принимает большие значения, а угол сдвига фазы между продольной и поперечной деформациями – меньшие значения практически во всем частотном диапазоне. Сопоставление температурных зависимостей $\lg a_T$ для обеих деформационных характеристик позволяет говорить об инвариантности коэффициента температурного смещения относительно деформационной характеристики. Аналогичные результаты идентификации были получены для ряда других высоконаполненных каучуков.

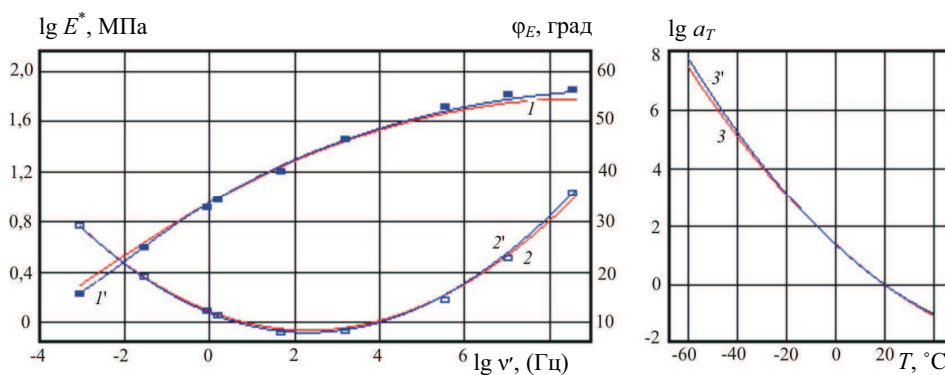


Рис. 3. Комплексный модуль упругости высоконаполненного каучука
($I, 2, 3$ – обычная экспериментальная процедура;
 $I', 2', 3'$ – после корректировки; $I, I' – E^*$; $2, 2' – \varphi_E$)

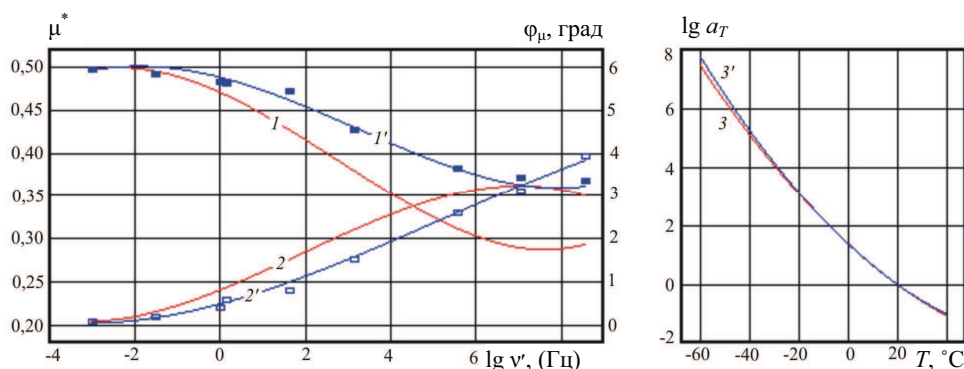


Рис. 4. Комплексный коэффициент Пуассона высоконаполненного каучука
(1, 2, 3 – обычная экспериментальная процедура;
1', 2', 3' – после корректировки; 1, 1' – μ^* ; 2, 2' – φ_μ)

Таким образом, разработан экспериментально-теоретический метод, позволяющий проводить одновременную идентификацию температурно-частотной зависимости комплексного коэффициента Пуассона и комплексного модуля упругости вязкоупругих материалов; в результате идентификации ряда высоконаполненных каучуков показан вязкоупругий характер коэффициента Пуассона и инвариантность коэффициента температурного смещения относительно рассматриваемых деформационных характеристик.

Библиографический список

1. Бульбович Р.В., Пальчиковский В.Г., Павлоградский В.В. Метод определения динамических деформационных свойств мягких вязкоупругих материалов // Наука-производству. – М.: Вираз-Центр, 1999. – № 12(25). – С. 14–18.
2. А.с. 1760431. Способ определения коэффициента Пуассона материала / Р.В. Бульбович, В.Г. Пальчиковский, Я.С. Садиков, Э.Н. Мурзыев. (СССР). Оpubл. 07.09.92, Бюл. № 33.
3. А.с. 1755105. Способ определения коэффициента Пуассона материала / Р.В. Бульбович, В.Г. Пальчиковский, Я.С. Садиков, Э.Н. Мурзыев. (СССР). Оpubл. 15.08.92, Бюл. № 30.
4. Бульбович Р.В., Пальчиковский В.Г., Павлоградский В.В. Экспериментальный метод определения частотных характеристик вязкоупругих материалов // На передовых рубежах науки и инженерного

творчества: тр. 2-й междунар. НТК Регион. урал. отд. АИН. – Екатеринбург: Изд-во УГТУ, 2000. – 433 с.

5. А.с. 1827573. Способ определения динамического коэффициента Пуассона / Р.В. Бульбович, Э.Н. Мурзыев, В.В. Павлоградский, В.Г. Пальчиковский, Я.С. Садиков. (СССР). Оpubл. 15.07.93, Бюл. № 26.

Получено 1.12.2010