УДК 539.3

П.В. Трусов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

О НЕСИММЕТРИЧНЫХ МЕРАХ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ЗАКОНЕ ГУКА

Закон Гука (конечно, в современном тензорном виде, включающем учет различных типов анизотропии материала, конечную или скоростную формулировку) весьма широко используется в механике деформируемого твердого тела, включая и физически и/или геометрически нелинейные проблемы. В последние десятилетия он применяется также в подавляющем большинстве многоуровневых моделей, ориентированных на описание неупругого деформирования моно- и поликристаллических материалов. Как правило, при этом закон Гука записывается с использованием симметричных мер напряженного и деформированного состояния, определенных в терминах актуальной, промежуточной (разгруженной) или отсчетной конфигурации. Для материала, упругого по Грину, из существования упругого потенциала естественно вытекает симметрия четырехвалентного тензора упругих свойств **П** по первой и второй паре индексов, $\Pi_{ijkl} = \Pi_{klij}$, однако симметрия тензора внутри первой и второй пар индексов следует только из принятого и укоренившегося в механике сплошных сред соглашения о симметрии тензоров напряжений и деформаций. Следует отметить, что в исходном законе Гука, записанном для случая одноосного нагружения, вопросы о симметрии свойств, естественно, не возникали. Указанное соглашение позволило, в частности, существенно сократить объем экспериментов, необходимый для установления компонент тензора упругих характеристик, что особенно важно при рассмотрении материалов с низкой или априори неизвестной симметрией. Симметрия тензора напряжений следует из закона сохранения момента количества движения при отсутствии распределенных объемных и поверхностных моментов. Пренебрежение распределенными поверхностными моментами основано на гипотезе о том, что две части тела действуют друг на друга распределенными силами, которые на каждой элементарной площадке могут быть приведены к вектору напряжений. Данная гипотеза, в свою очередь, основана на предположении об отсутствии корреляции распределенных поверхностных нагрузок на любой материальной площадке. Следует отметить, что В.Фойгт еще в 1887 г. предлагал отказаться от данного предположения и приводить распределенные воздействия одной части тела на другую на любой элементарной площадке к вектору напряжений и вектору распределенных моментов. Указанное предложение полностью согласуется с используемым в теоретической (классической) механике способом приведения произвольной системы сил к главному вектору и главному моменту. На примере задачи простого сдвига показано, что использование (симметричного) закона Гука порождает несоответствие напряженного состояния, определяемого из закона в его обычной формулировке, части (статических) граничных условий, устанавливаемых соотношениями Коши. Рассматривается вариант закона Гука, ориентированный на применение несимметричных мер напряжений и деформаций и тензора упругих свойств с сохранением симметрии только по парам индексов. В качестве меры напряжения используется несимметричный тензор напряжений Коши, меры скорости деформаций – градиент относительной скорости перемещений (скорости перемещений относительно жесткой подвижной системы координат, отвечающей за квазитвердое движение элементарного объема), для которых выполняется требование независимости от выбора системы отсчета. Предлагается вид тензора упругих свойств в законе Гука, ориентированного на использование несимметричных мер.

Ключевые слова: несимметричные тензоры напряжений и деформаций, модифицированный закон Гука.

P.V. Trusov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ON ASSYMETRIC MEASURES OF STRESS-STRAIN STATE AND HOOKE'S LAW

Hooke's law (in a modern tensor form considering different types of material anisotropy, finite or velocity formulation) is widely used in solid mechanics including physical and/or geometrical nonlinear problems. In the recent decades it has also been used in the majority of multilevel models oriented on describing inelastic deformation in mono- and polycrystalline materials. As a rule, in this case Hooke's law is written using symmetrical measures of stress and strain state that are determined in terms of actual, intermediate (unloaded) or reference configuration. For a material that is elastic according to Green, the elastic potential presence naturally leads to the symmetry of elastic four-valent tensor **П** in the first and second pare of indices, $\Pi_{ijkl} = \Pi_{klij}$. However tensor symmetry in the first and second pair of indices is explained only due to the accepted and established agreement in solid mechanics related to symmetry of stresses and strains tensors. It is worth mentioning that the initial Hooke's law written for uniaxial loading obviously had nothing to do with the symmetry of properties. The specified agreement made it possible to reduce the number of experiments necessary to find tensor elastic properties; and it is especially important for materials studies with an a priory low or unknown symmetry. Stress tensor symmetry results from law of conservation of angular momentum without distributed volume and surface moments. The neglection of the distributed surface moments is based on a hypothesis that two parts of the body interact with distributed forces, which can be put in to the stresses vector on each surface element. This hypothesis again is based on an idea that there is no correlation of distributed surface loadings on any material area element. It is worth stating that already in 1887 V. Voigt suggested to abandon this idea and put the distributed effects of one body part on the other one on any surface element into stresses vector and distributed moments vector. The specified suggestion is in a full compliance with the method related to putting a random system of forces into the principal vector and principal moment (this method is used in theoretical (classical) mechanics). The problem of a simple shear shows that Hooke's (symmetrical) law leads to the incompliance of the stress state (found with the law in its conventional formulation) and part of boundary conditions. We have considered Hooke's law which is oriented on application of asymmetrical measures of stresses and strains and elastic properties tensor with symmetry only in a pair of indices. Asymmetrical Cauchy tensor is used as a stress measure, gradient of displacement velocity (displacement velocities with respect to a stiff moving coordinates which is in charge for a rigid displacement of volume element) – as strain velocity measure; all of them do not depend on the reference coordinate. A type of tensor of elastic properties in Hooke's law oriented on asymmetric measures is proposed.

Keywords: asymmetric tensors of stresses and strains, modified Hooke's law.

Введение

Несмотря на огромное количество различных теорий и введенных в них определяющих соотношений (ОС), предназначенных для описания поведений деформируемых твердых тел в широких диапазонах различных параметров воздействия, закон Гука едва ли имеет конкурентов по степени использования и востребованности. Практически все существующие методики расчета на прочность, устойчивость и т.д. в различных областях техники (машиностроении, строительстве, авиации и др.) основаны на законе Гука. Понятно, что он претерпел существенные изменения со времени своего создания (сохранив, однако, сущностное наполнение закона линейной связи между мерами напряжений и деформаций), записывается в современной инвариантной к выбору системы координат (тензорной) форме, которая позволяет включать в рассмотрение и изотропные, и анизотропные материалы. В последние десятилетия закон Гука широко используется и в физически и геометрически нелинейных проблемах, где его обычно формулируют в так называемой скоростной релаксационной форме:

$$\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{cor}} = \mathbf{\Pi} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^{in}), \qquad (1)$$

где $\mathbf{\Sigma}$ – мера напряженного состояния (далее для определенности будет использоваться тензор напряжений Коши), верхний индекс «cor» означает независящую от выбора системы отсчета производную (чаще всего – коротационную [1–3]), $\mathbf{\Pi}$ – 4-валентный тензор упругих характеристик, $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}^{in}$ – мера скорости деформации и ее неупругая составляющая (обычно – тензор деформации скорости [3]); здесь закон и все переменные относятся к уровню представительного макрообъема. Формулировка закона (определяющего соотношения) в значительной мере основана на гипотезе аддитивности упругой и неупругой составляющих тензора деформации скорости: $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{e} + \mathbf{D}^{in}$, где $\mathbf{D}^{e}$ – упругая составляющая; впрочем, последнее соотношение можно получить на основе строгого мультипликативного разложения градиента места [1, 3].

Следует отметить, что формулировка конститутивных моделей в терминах скоростей изменения параметров, характеризующих воздействия и отклик материала, приобретает все бóльшее распространение в механике деформируемого твердого тела (МДТТ). Данное обстоятельство обусловлено, вероятно, следующими причинами. Твердые тела в широком диапазоне параметров воздействия проявляют свойство памяти, описание которого в терминах конечных величин (деформаций, температур и т.д.) требует включения в конститутивные модели интегральных операторов, вид которых априори неизвестен и для его установления требуется огромное количество дорогостоящих экспериментов; при этом решение краевых задач, в постановку которых входят соответствующие конститутивные (определяющие) уравнения, существенно усложняется. При формулировке моделей материалов в терминах скоростей изменения параметров более ясным является физический смысл соотношений и материальных характеристик, входящих в конститутивную модель, которые всегда легче определить «здесь и сейчас», чем устанавливать на основе реакции материала на предысторию воздействий (иногда – длительную). Поскольку реакция материала в каждый момент времени процесса практически полностью определяется текущими параметрами воздействия и мезо- и микроструктурой материала, в структуру конститутивных моделей в последние десятилетия вводятся так называемые внутренние переменные, характеризующие эволюционирующую структуру и тем самым позволяющие учитывать память материала [4–7].

В последние 15–20 лет все более широкое распространение при изучении поведения различных сред с микроструктурой находят двухуровневые (макро- и мезоуровень) модели упругопластичности и упруговязкопластичности [8–11]. В этих моделях и на макро-, и на мезоуровне в качестве ОС используется закон Гука в форме (1); для мезоуровня он записывается в виде

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{cor}} = \mathbf{п} : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^{in}), \qquad (2)$$

где $\mathbf{d}^{in}$ – неупругая составляющая тензора деформации скорости мезоуровня, определяемая обычно скоростями сдвигов по системам скольжения (СС). Здесь и далее для обозначения «родственных» величин макро- и мезоуровня используются одинаковые буквы, на макро- – заглавные, на мезоуровне – строчные. Заметим, что, несмотря на одинаковые обозначения («cor»), коротационные производные в (1) и (2), вообще говоря, могут существенно отличаться спинами, входящими в их определение.

При этом во всех известных автору работах в (1) и (2) меры скорости изменения напряженного и деформированного состояния приняты симметричными, тензор свойств симметричен как по парам индексов, так и внутри каждой пары. При этом формально симметризация неупругой составляющей деформации скорости означает введение наряду с реально существующими системами скольжения типа $\{l\ m\ n\}$ $<p\ q\ r>$ фиктивных, не реализующихся в реальном кристаллите систем типа $\{\ p\ q\ r\ \}$ $<\ l\ m\ n\ >$ [12]. Указанный факт, равно как и некоторые другие вопросы, возникающие при использовании симметричных мер, которые будут рассмотрены ниже, привели к поиску несимметричных мер напряженного и деформированного состояния и их скоростей, которые будут проанализированы в следующем разделе.

1. Несимметричные меры напряженного и деформированного состояния и скоростей их изменения

В качестве несимметричной меры деформированного состояния, на первый взгляд, можно использовать хорошо известную в МДТТ меру – градиент места $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}$ ($\overset{\circ}{\nabla}$ – оператор Гамильтона, определенный в отсчетной конфигурации [13], $\mathbf{r}$ – радиус–вектор материальных частиц), что отмечал В.Прагер [14]. Однако данная мера не является ни инвариантной по отношению к наложенному жесткому движению, ни индифферентной; эта мера относится к так называемым «двухточечным» тензорным мерам [3], что приводит к существенным трудностям ее использования при формулировке ОС.

В качестве меры скорости деформации аналогом конечной меры – градиента места – мог бы выступить (транспонированный) градиент скорости перемещений, определенный в отсчетной $\overset{\circ}{\nabla}\dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}$ или актуальной конфигурации $\hat{\nabla}\dot{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}} \equiv \mathbf{v}\hat{\nabla}$, однако ни одна из этих мер не является независящей от выбора системы отсчета [3]. В связи с этим для определения скорости изменения деформированного состояния ранее был предложен (транспонированный) градиент вектора относительной скорости перемещений (скорости перемещения частиц относительно некоторой подвижной системы координат, отвечающей за квазитвердое движение) $\mathbf{v}_r\hat{\nabla}$, где нижним индексом «*r*» здесь и далее обозначаются величины, определенные с позиций наблюдателя в жесткой подвижной системе координат [12]. Жесткая подвижная система отсчета на мезоуровне вводится совпадающей с кристаллической решеткой, искажениями которой для практически всех металлов и сплавов можно пренебречь; на макроуровне движение подвижной жесткой системы определяется из условия согласования ОС мезо- и макроуровня [12]. В цитируемой выше работе показано, что выбранные меры скорости деформации являются индифферентными, т.е. удовлетворяющими требованию независимости от выбора системы отсчета. Это означает, что никакое наложенное на исследуемое тело жесткое движение не приводит к изменению меры скорости деформации, устанавливаемой подвижным наблюдателем.

Мера деформации на каждом масштабном уровне определяется коротационным интегрированием (т.е. интегрированием скоростной меры с позиций подвижного наблюдателя). В силу индифферентности введенной меры скорости деформации индифферентными будут и определяемые коротационным интегрированием меры (или тензоры) деформации.

Таким образом, в дальнейшем в качестве мер скоростей деформаций на макро- и мезоуровне будут использованы следующие [15]:

$$\mathbf{Z}_r \equiv \nabla \mathbf{V}_r^{\mathrm{T}} = \hat{\nabla}\mathbf{V}^{\mathrm{T}} - \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{z}_r \equiv \nabla \mathbf{v}_r^{\mathrm{T}} = \hat{\nabla}\mathbf{v}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\omega}\,, \tag{3}$$

где $\mathbf{\Omega}$, $\boldsymbol{\omega}$ – спины жестких подвижных систем координат на макро- и мезоуровнях. Отметим, что в соотношениях (3) операторы Гамильтона ∇ определены в терминах жестких подвижных систем координат; можно показать, что градиенты относительных скоростей перемещений в базисах подвижных систем координат и лагранжевых базисах в актуальной конфигурации совпадают.

Несколько проще решается вопрос о выборе меры напряженного состояния, поскольку при введении тензора напряжений Коши никакого априорного условия симметрии не накладывается [3, 15]. Как известно, тензор напряжений на каждой элементарной внутренней площадке определяет главный вектор (отнесенный к единице площади) распределенных сил, с которыми действуют друг на друга прилегающие к площадке с двух сторон части тела. Согласно законам классической (теоретической) механики в общем случае система сил, действующих на произвольное тело, приводится к главному вектору сил и главному моменту сил. Для рассматриваемого случая распределенных сил, действующих на произвольную элементарную площадку, она должна быть приведена к главному вектору и главному моменту (отнесенных к единице площади). Иначе говоря, кроме тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ необходимо ввести тензор моментных (или парных) взаимодействий $\boldsymbol{\mu}$ [16]. Заметим, что это предложение впервые, вероятно, было высказано В.Фойгтом [17]. Появление тензора моментных напряжений освобождает тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ от необходимости быть симметричным.

В силу сказанного выше в качестве меры напряженного состояния в дальнейшем будут использованы тензоры напряжений Коши на макро- и мезоуровне $\mathbf{\Sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}$, которые в общем случае не предполагаются симметричными. В качестве мер скоростей изменения напряженного состояния будут использоваться коротационные производные на соответствующих масштабных уровнях:

$$\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{cor}} = \dot{\mathbf{\Sigma}} + \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Sigma}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{cor}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \tag{4}$$

где $\mathbf{\Omega}$, $\boldsymbol{\omega}$ – спины жестких подвижных систем на макро- и мезоуровне соответственно, отвечающих за квазитвердое движение [3, 12].

Напомним, что по своему физическому смыслу коротационные производные определяют скорости изменения величин, фиксируемых наблюдателем в жесткой подвижной системе координат. Таким образом, в данном случае меры скоростей изменения деформированного и напряженного состояния являются «согласованными» в том смысле, что они устанавливают скорости изменения соответствующих мер деформаций и напряжений с позиций единого наблюдателя в жестких системах координат (на макро- и мезоуровнях).

2. Закон Гука в терминах несимметричных мер скоростей напряжений и деформаций

Вероятно, первой моделью для описания поведения упругих тел с применением несимметричных мер напряжений и деформаций стала модель континуума Коссера [18], явившаяся стимулятором для возникновения нового класса теорий обобщенного континуума [19–21]. Однако закон Гука в континууме Коссера сомнениям не подвергался, при этом и для моментных напряжений использовался его аналог [22]. Следует отметить, что теория обобщенного континуума сейчас переживает времена бурного развития, число работ в этой области постоянно растет.

Отметим, что с момента своего появления континуум Коссера встретил непонимание и неприятие весьма значительной части механиков. Основная причина видится в отсутствии на существующем в то время уровне развития физики твердого тела (ФТТ) достаточно убедительных объяснений природы возникновения моментных взаимодействий, особенно при «стягивании» анализируемого материального объема в точку (прием, обычно используемый в механике континуума при получении соотношений в дифференциальной (локальной) форме). В связи с этим сразу оговоримся, что понятия «точки» в механике и математике резко отличаются; в механике континуума под «точкой» всегда понимается некоторый конечный (хотя и малый) объем материала, обладающий на рассматриваемом масштабном уровне свойствами, аналогичными свойствам любого бóльшего объема, имеющего ту же микроструктуру. Иначе говоря, в континуальной механике под «точкой» понимается так называемый представительный объем («толстая точка»), «малость» которого снизу ограничена требованием заключения в нем достаточного для статистического осреднения числа микрочастиц (зерен, фрагментов, блоков, молекул, атомов – в зависимости от рассматриваемого масштабного уровня). В этом случае отсутствуют рациональные основания для введения требования однородности взаимодействий между микрочастицами соседствующих представительных объемов. Кроме того, появление моментных взаимодействий может быть обусловлено неоднородностью взаимодействия дефектов различной природы и размерности (вакансий, межузельных атомов, дислокаций) [23].

Исходя из вышесказанного в дальнейших рассуждениях под «точкой» всегда будет пониматься некоторый конечный (малый) объем, полностью воспроизводящий анализируемые свойства любого конечного тела произвольных размеров, состоящего из аналогичных «точек». При постановке и решении соответствующих краевых задач исследуемые характеристики и свойства материала по соглашению относят к некоторой математической точке, например, центру тяжести представительного объема. Данное обстоятельство следует учитывать при анализе и интерпретации результатов решения всех задач механики деформируемого твердого тела, в особенности задач, в которых имеют место резкие изменения параметров задачи (напряжений, градиентов перемещений, температуры) по пространственным переменным, например, в проблемах с сингулярными точками, динамических задачах с ударными волнами. Ситуация коренным образом не меняется и при применении обобщенных континуумов: в этом случае выбранному геометрическому центру представительного объема «приписываются» значения расширенных параметров модели материала (например, вторых градиентов векторов перемещений, тензоров спина, кривизн – кручений и т.д.).

В дальнейшем остановимся на рассмотрении закона Гука для элемента мезоуровня. Общая структура закона аналогична и для представительного макрообъема, что нетрудно видеть из сопоставления соотношений (1) и (2). Отличия заключаются в том, что для кристаллита симметрия материала известна априори и является инвариантной по отношению к пластическому деформированию сдвигами, тогда как симметрия материала на уровне представительного макрообъема зачастую подлежит дополнительному определению и изменяется в процессе неупругого деформирования. Например, при равномерном распределении ориентаций кристаллитов в отсчетной конфигурации материал на макроуровне может считаться изотропным, однако при интенсивных пластических деформациях он может приобретать тот или иной тип текстуры и в силу этого становиться анизотропным того или иного типа (например, трансверсально изотропным). Симметрийные свойства материала, естественно, важны при определении конкретного строения тензора упругих характеристик (включая количество ненулевых членов тензора).

При использовании симметричных мер и закона Гука в классической форме [24] возникают вопросы и при постановке и решении некоторых хорошо известных задач теории упругости и пластичности. Рассмотрим, например, задачу простого сдвига прямоугольного параллелепипеда в плоскости Ox_1x_2 (или в плоскости Ox_2x_3; система координат для простоты принята декартовой ортогональной), размеры параллелепипеда примем следующими: вдоль оси Ox_1 – a, Ox_2 – b, Ox_3 – c. Сдвиг реализуется смещением верхней грани параллелепипеда $x_2 = b$ в положительном направлении оси Ox_1 (Ox_3), нижняя грань закреплена, расстояние между гранями $x_2 = 0$ и $x_2 = b$ сохраняется неизменным. Боковые грани $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ ($x_3 = 0$, $x_3 = c$) свободны от нагрузок. Для упрощения исследуемая область полагается упругой; на начальной стадии деформирования искажение конфигурации области мало и грани могут считаться неискаженными. Для кристаллитов (с кубической, орторомбической или тетрагональной решеткой) оси введенной декартовой системы координат будем считать совпадающими с осями симметрии (заметим, что при определении закона Гука на макроуровне оси вводимой системы координат также следует выбирать совпадающими с осями симметрии, что упрощает анализ структуры тензора упругих характеристик; для изотропного материала в качестве системы координат может использоваться любая ортогональная тройка осей). В каждой точке боковых граней в силу тривиальных силовых условий должно выполняться условие $\sigma_{12} = 0$ ($\sigma_{32} = 0$). Однако на верхней грани в силу условий нагружения имеем $\sigma_{21} > 0$ ($\sigma_{23} > 0$). Для материалов первого порядка [2] напряженное и деформированное состояние в представительном объеме должно быть однородным, в силу чего все компоненты тензора напряжений (включая касательные напряжения) должны сохранять свои значения и на верхней, и на боковой гранях. Заметим, что для рассматриваемой задачи использование ОС материалов 2-го и более высоких порядков качественно не изменяет ситуацию.

При использовании симметричных мер напряженного или деформированного состояния (заметим, что в силу симметрии тензора **п** по парам индексов из симметрии тензора напряжений следует симметрия во второй паре индексов, т.е. имеет место «симметризация» вклада меры деформации, и наоборот) для предписанного деформированного состояния из закона Гука следует $\sigma_{12} = \sigma_{21} \neq 0$ ($\sigma_{32} = \sigma_{23} \neq 0$), что противоречит статическим граничным условиям для касательных составляющих вектора напряжений на боковых гранях. Заметим, что к аналогичному результату приводит применение в законе Гука тензора упругих характеристик, симметричного внутри (хотя бы одной) пары индексов. Ранее уже предпринимались попытки записать закон Гука, используя несимметричный (внутри пар индексов) тензор упругих характеристик [12]. Однако в доступной литературе обнаружить экспериментальные данные об этих характеристиках не удалось, что, вероятно, обусловлено устоявшейся ориентацией исследователей на обработку результатов экспериментов в терминах симметричных мер. Попытки использовать для этой цели методы молекулярной динамики также не увенчались успехом, что связано с применением в этих методах апробированных потенциалов, позволяющих описывать только центральные взаимодействия микрочастиц (атомов). В связи с этим представляется целесообразным кардинально пересмотреть структуру тензора упругих характеристик.

Рассмотрим модификацию закона Гука, которая основана на использовании несимметричных мер напряжений и деформаций и позволит избежать указанных выше проблем с нарушением статических граничных условий в рассматриваемой задаче простого сдвига. В качестве базового используем закон Гука в скоростной релаксационной форме вида (2), записанный для представительного объема мезоуровня (кристаллита), в котором изменены меры скоростей напряжений и деформаций. Заметим, что от скоростной формулировки можно легко перейти к формулировке в приращениях, более соответствующей рассмотренному выше качественному примеру. В качестве меры скорости деформации будем использовать транспонированный градиент относительной скорости перемещений $\mathbf{z}_r$ $(3)_2$, определяемый подвижным наблюдателем, связанным с решеткой, в качестве меры скорости изменения напряжений – коротационную производную несимметричного тензора напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{cor}}$ $(4)_2$. Таким образом, закон Гука будет иметь следующий вид:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{cor}} = \mathbf{п} : (\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_r^{in}). \tag{1}$$

Необходимо рассмотреть вопрос о структуре и значениях компонент тензора свойств **п**. Для простоты примем, что неупругая составляющая меры скорости деформации $\mathbf{z}_r^{in} = \mathbf{0}$, что для начальной стадии деформирования вполне приемлемо.

При записи компонент тензора упругих свойств соглашение о суммировании здесь применяться не будет. При определении упругих характеристик монокристаллов для уменьшения числа требуемых экспериментов компоненты тензора **п** обычно определяют в базисе осей симметрии кристаллита; для большинства распространенных кристаллов существует по крайней мере одна тройка взаимно ортогональных осей симметрии порядка не ниже второго. Оси лабораторной декартовой ортогональной системы координат $Ox_1x_2x_3$ приняты совпадающими с осями симметрии кристаллита.

Для «диагональных» компонент со структурой индексов $п_{iijj}$, где допустимо и равенство, и неравенство индексов i и j, ситуация ничем не отличается от обычного закона Гука для симметричных мер; значения этих компонент, естественно, тоже совпадают с известными. Для установления «недиагональных» компонент будем использовать описанный выше (мысленный) эксперимент на простой сдвиг. Из него можно с механически обоснованных позиций утверждать, что сдвиги не должны (по крайней мере – в случае малых искажений) приводить к появлению диагональных компонент тензора напряжений σ_{ii}, т.е. компоненты тензора свойств со структурой индексов $п_{iijk}$, где $j \neq k$, $i = j$ или ($i \neq j$, $i \neq k$), должны быть равны нулю, $п_{iijk} = 0$, откуда в силу симметрии по парам индексов немедленно вытекает $п_{jkii} = 0$. Для произвольного значения индекса i из рассмотренного эксперимента нельзя утверждать, что $п_{iijk} = 0$ (т.е. на подвергаемую сдвигу грань может действовать нормальное напряжение); в то же время для кристаллов с осями симметрии 4-го порядка (кубическая решетка) указанное утверждение следует из симметрийных свойств. Данное утверждение будет справедливым и для представительного изотропного макрообъема.

Для определения «недиагональных сдвиговых» компонент тензора свойств также будем использовать мысленный эксперимент на простой сдвиг в плоскости декартовых ортогональных координат $x_i x_j$, при котором волокно вдоль x_i сохраняет свое направление, а волокно, первоначально направленное вдоль x_j, уменьшает свой угол с осью x_i (т.е. ненулевой (и неотрицательной) является только компонента $(\mathbf{z}_r)_{ij} \sim \partial(\mathbf{v}_r)_i/\partial x_j$), где $\mathbf{v}_r$ – вектор относительной скорости перемещений. Тогда из анализа статических граничных условий следует, что на сдвигаемой грани (параллельной оси x_i) должно появиться сдвиговое напряжение σ_{ji} , тогда как на свободной грани компонента $\sigma_{ij} = 0$ (равно как и σ_{ik}, $k \neq i$, $k \neq j$). Следует отметить, что в законе Гука на меру скорости деформации двойное скалярное умножение осуществляется справа, при этом порядок двух последних индексов в тензоре свойств для члена, отличного от нуля, должен быть обратным по отношению к порядку индексов ненулевой сдвиговой деформации, т.е. для рассматриваемой ситуации ненулевой должна быть компонента п_{jiji}, все компоненты типа $\text{п}_{jiij} = 0$ $(i \neq j)$; при этом утверждать, что все остальные «недиагональные» компоненты со структурой индексов п_{ijkl} $(i \neq j,\ k \neq l)$ должны быть равны нулю на основе рассмотренного эксперимента, нельзя. В то же время для кристаллитов кубической симметрии и для изотропных тел данное утверждение следует из симметрийных свойств.

Значения ненулевых «недиагональных» компонент равны соответствующим компонентам тензора свойств в случае использования симметричных мер. Действительно, при простом сдвиге (рассматривая тот же пример) в «симметричном» случае появятся две ненулевые компоненты тензора деформации скорости d_{ij} и d_{ji}, равные $1/2\ (\mathbf{z}_r)_{ij}$, которые будут умножены на одинаковые компоненты тензора свойств п_{klji} и п_{klij}.

Полагая, что рассмотрение ограничивается кристаллитами с кубической симметрией, ненулевыми компонентами из «недиагональных сдвиговых» компонент будут компоненты со структурой индексов п_{ijij}. При этом не нарушается требование симметрии по парам индексов для всех рассмотренных выше компонент тензора **п**.

При этом, естественно, возникает вопрос об уравнении баланса момента количества движения, которое для каждой «точки» (представительного объема мезо- или макроуровня) должно быть выполнено.

Для этого кроме несимметричных напряжений на представительный объем должны действовать распределенные моментные напряжения (являющиеся следствием неоднородности и коррелированности взаимодействий на внешних или внутренних «контактных» поверхностях), главный вектор которых в случае равновесия должен быть равен главному моменту от поверхностных напряжений Коши. В рассмотренном выше примере простого сдвига на сдвигаемой (и противоположной ей) грани коррелированным должно быть распределение на любой площадке, ортогональной оси Ox_j компоненты q_j вектора поверхностной нагрузки $\mathbf{q}$, действие которого можно описать распределенным поверхностным моментом $\boldsymbol{\mu}$ с ненулевой компонентой μ_{jk} $(k \neq i,\ k \neq j)$. В этом случае появляется возможность определения моментных напряжений без явного рассмотрения изгибов – кручений атомарной решетки. При возникновении взаимодействий дефектной структуры соответствующие моментные напряжения также должны быть включены в уравнения баланса.

Предлагаемая модификация закона Гука интегрируется в соотношения двухуровневых моделей, результаты использования которых для анализа деформирования моно- и поликристаллических материалов составляют предмет готовящихся публикаций.

Заключение

Предпринята попытка сформулировать закон Гука в терминах несимметричных мер скоростей изменения напряженного и деформированного состояния. Введены меры указанных скоростей, удовлетворяющие требованию независимости от выбора системы отсчета. Рассмотрена структура четырехвалентного тензора упругих характеристик, позволяющая для тестовой задачи простого сдвига исключить несоответствие определения компонент тензора напряжений из закона Гука предписанным статическим граничным условиям.

Работа выполнена в Пермском национальном исследовательском политехническом университете при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (базовая часть государственного задания ПНИПУ, № гос. регистр. 01201460535) и РФФИ (проекты №№13-01-96006 р_урал_а, 14-01-00069-а).

Библиографический список

1. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. – М.: Физматгиз, 1962. – 284 с.
2. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
3. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
4. Трусов П.В., Ашихмин В.Н., Швейкин А.И. Двухуровневая модель упругопластического деформирования поликристаллических материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т. 15, № 3. – С. 327–344.
5. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
6. Chaboche J.L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // Int. J. Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1642–1693.
7. Shutov A.V., Kreisig R. Finite strain viscoplasticity with nonlinear kinematic hardening: Phenomenological modeling and time integration // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2008. – Vol. 197. – P. 2015–2029.
8. Habraken A.M. Modelling the plastic anisotropy of metals//Arch. Comput. Meth. Engng. – 2004. – Vol. 11. – No. 1. – P. 3–96.
9. McDowell D.L. A perspective on trends in multiscale plasticity // Int. J. Plasticity. –2010. doi:10.1016/ j.ijplas.2010. 02.008. – 30 p.
10. Трусов П.В., Швейкин А.И. Многоуровневые физические модели моно- и поликристаллов. Статистические модели // Физическая мезомеханика. – 2011. – Т. 14, № 4. – С. 17–28.
11. Трусов П.В., Швейкин А.И. Многоуровневые физические модели моно- и поликристаллов. Прямые модели // Физическая мезомеханика. – 2011. – Т. 14, № 5. – С. 5–30.
12. Трусов П.В., Нечаева Е.С., Швейкин А.И. Применение несимметричных мер напряженного и деформированного состояния при построении многоуровневых конститутивных моделей материалов // Физическая мезомеханика. – 2013. – Т. 16, № 2. – С. 15–31.
13. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
14. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 312 с.

15. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. – М.: Наука.– 1972. – 492 с.

16. Трусов П.В. Некоторые вопросы нелинейной механики деформируемого твердого тела // Вестник ПГТУ. Мат. моделир. систем и процессов. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. – № 17. – С. 85–95.

17. Voight W. Lehrbuch der Krystallphysik. – Leipzig und Berlin: Teubner, 1928. – 978 s.

18. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. – Paris: A.Hermann et fils, 1909. – 226 p.

19. Миндлин Р.Д. Микроструктура в линейной упругости // Механика: сб. переводов. – 1964. – № 4 (86). – С. 129–160.

20. Миндлин Р.Д., Тирстен Г.Ф. Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика. Сб. переводов. – 1964. – №1 (86). – С. 80–114.

21. Eringen A.C. Microcontinuum field theories. I. Foundation and solids. Springer, 1998. – 325 pp.

22. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

23. Рыбин В.В. Большие пластические деформации и разрушение металлов. – М.: Металлургия, 1986. – 224 с.

24. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.

References

1. Sedov L.I. Vvedenie v mechaniku sploshnyh sred [Introduction in continuum mechanics]. Moscow: Phizmatgiz, 1962. 284 p.

2. Truesdell C. Pervonachalnyi kurs rational’noi mechaniki sploshnyh sred [A first course in rational continuum mechanics]. Moscow: Mir, 1975. 592 p.

3. Pozdeev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I. Bolshie uprugo-plasticheskie deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya [Large elastic-plastic deformation: theory, algorithms and applications]. Moscow: Nauka, 1986. 232 p.

4. Trusov P.V., Ashichmin V.N., Shveykin A.I. Dvuhurovnevaya model uprugoplasticheskogo deformirovania policristallicheskih materialov [Two-level elasto-plastic deformation model of polycrystals]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy*, 2009, vol. 15, no. 3, pp. 327-344.

5. Kolarov D., Baltov A., Boncheva N. Mehanika plasticheskih sred [Mechanics of plastic solids]. Moscow: Mir, 1975. 302 p.

6. Chaboche J.L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *Int. J. Plasticity*, 2008, vol. 24, pp. 1642-1693.

7. Shutov A.V., Kreisig R. Finite strain viscoplasticity with nonlinear kinematic hardening: Phenomenological modeling and time integration. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*., 2008, vol. 197, pp. 2015-2029.

8. Habraken A.M. Modelling the plastic anisotropy of metals. *Arch. Comput. Meth. Engng*., 2004, vol. 11, no. 1, pp. 3-96.

9. McDowell D.L. A perspective on trends in multiscale plasticity. *Int. J. Plasticity*, 2010. doi:10.1016/ j.ijplas.2010. 02.008. 30 p.

10. Trusov P.V., Shveykin A.I. Mnogourovnevye fizicheskie modeli mono- i polikristallov. Statisticheskie modeli [Multilevel physical models of single- and polycrystals. Statistical models]. *Fizicheskaya mezomekhanika,* 2011, vol. 14, no. 4, pp. 17-28.

11. Trusov P.V., Shveykin A.I. Mnogourovnevye fizicheskie modeli mono- i polikristallov. Statisticheskie modeli [Multilevel physical models of single- and polycrystals. Direct models]. *Fizicheskaya mezomekhanika,* 2011, vol. 14, no. 5, pp. 5-30.

12. Trusov P.V., Nechaeva E.S., Shveykin A.I. Primenenie nesimmetrichnykh mer napryazhennogo i deformirovannogo sostoyaniya pri postroenii mnogourovnevykh konstitutivnyh modelei materialov [Non-symmetric stress-strain measures using when construct multilevel constitutive material models]. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2013, vol. 16, no. 2, pp. 15-31.

13. Lurie A.I. Nelineinaya teoriya uprugosti [Nonlinear theory of elasticity]. Moscow: Nauka, 1980. 512 p.

14. Prager W. Vvedenie v mechaniku sploshnyh sred [Introduction in continuum mechanics]. Moscow: Izdatelstvo inostrannoy literatury, 1963. 312 p.

15. Sedov L.I. Mekhanika sploshnykh sred. Tom 1 [Continuum mechanics. Vol. 1]. Moscow: Nauka, 1972. 492 p.

16. Trusov P.V. Nekotorye voprosy nelineinoy mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela [Some issues of nonlinear solids mechanics]. *Vestnik Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov*, 2009, no. 17, pp. 85-95.

17. Voight W. Lehrbuch der Krystallphysik. Leipzig und Berlin: Teubner, 1928. 978 s.

18. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Paris: A.Hermann et fils, 1909. 226 p.

19. Mindlin R.D. Mikrostruktura v lineinoi uprugosti [Microstructure in linear elasticity]. *Mekhanika. Sbornik perevodov*, 1964, no. 4 (86), pp. 129-160.

20. Mindlin R.D., Tirsten G.F. Effekty momentnykh napryazheniy v lineinoi teorii uprugosti [Momentum stress effects in linear elasticity]. *Mekhanika. Sbornik perevodov*, 1964, no. 1 (86), pp. 80-114.

21. Eringen A.C. Microcontinuum field theories. I. Foundation and solids. Springer, 1998. 325 pp.

22. Novacky W. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. Moscow: Mir, 1975. 872 p.

23. Rybin V.V. Bolshie plasticheskie deformazii i razrushenie metallov [Large plastic deformation and fracture of metals]. Moscow: Metallurgija, 1986. 224 p.

24. Lurie A.I. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. Moscow: Nauka, 1970. 940 p.

Об авторе

Трусов Петр Валентинович (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования систем и процессов Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: tpv@matmod.pstu.ac.ru).

About the author

Peter V. Trusov (Perm, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department of Mathematical Modelling of Systems and Processes, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., 614990, Perm, Russian Federation, e-mail: tpv@matmod.pstu.ac.ru).

Получено 20.04.2014

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Трусов П.В. О несимметричных мерах напряженного и деформированного состояния и законе Гука // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 2. – С. 220–237.

Please cite this article in English as:

Trusov P.V. On assymetric measures of stress-strain state and Hooke's law. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014. No. 2. P. 220-237.