

УДК 539.3

В.Н. Аптуков, А.Р. Хасанов

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СЛОИСТЫХ ПЛИТ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ПРОНИКАНИИ ЖЕСТКОГО ИНДЕНТОРА С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ И ОСЛАБЛЯЮЩЕГО ЭФФЕКТА СВОБОДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Проблема оптимального торможения жесткого ударника неоднородной преградой при ударе по нормали была впервые сформулирована в 1978 г. В опубликованных позднее работах на основе принципа максимума Понтрягина были получены критерии оптимальной структуры неоднородной преграды минимального погонного веса для ударника различной формы. В настоящее время задачи в подобной или несколько иной постановке изучаются различными исследователями, некоторые примеры приведены в данной работе.

При средних скоростях удара малодеформируемых остроконечных бойков в пластичные преграды средней твердости реализуется вариант вязкого образования кратера. Для этих условий известна широко используемая эмпирическая зависимость сопротивления прониканию, справедливая при определенных ограничениях на скорости, толщину преграды, форму ударника, механические характеристики, что подтверждается многочисленными экспериментами, проводившимися в лаборатории В.А. Степанова в ЛФТИ (ныне Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург).

В настоящей статье предпринимается попытка уточнить постановку задачи оптимизации для модернизированной эмпирической зависимости с учетом влияния свободных поверхностей преграды и трения на сопротивление прониканию, для решения которой применяется численный метод. Последовательное усложнение модели посредством включения в нее новых факторов помогает приблизиться к более реальному описанию процесса внедрения. Это позволяет глубже изучить проблему в рамках новой усовершенствованной модели.

Решение задачи получено с помощью метода игольчатых вариаций. В одних случаях получено окончательное решение задачи и сформулированы критерии оптимальной структуры преграды, в других – аналитическое решение в конечном виде не получено, но представлены результаты численных экспериментов. Показано, что учет дополнительных эффектов теоретически может приводить к качественно новому типу решения по сравнению с ранее известными решениями. Приведен алгоритм определения оптимальной структуры преграды для задачи об ударе конуса с n материалами.

Ключевые слова: оптимальное торможение, неоднородная преграда, трение, влияние свободных поверхностей, метод игольчатых вариаций.

V.N. Aptukov, A.R. Khasanov

Perm State National Research University, Perm, Russian Federation

OPTIMIZATION OF PARAMETERS OF LAYERED PLATES DURING DYNAMIC HARD INDENTER PENETRATION WITH FRICTION AND WEAKENING EFFECT OF FREE SURFACES

The problem of optimal braking hard indenter of the inhomogeneous plate during the impact of the normal was first formulated in 1978 (Aptukov V.N.). Results published later, based on the Pontryagin maximum principle was derived criteria for the optimal structure of inhomogeneous plate a minimum weight for different projectile shapes. At the present time this problem in a similar or different formulations studied by various researchers, some examples are presented in this paper.

Variant of the viscous crater formation is implemented for medium velocity of the impact of the little-deformed sharp indenter into plastic target with a medium hardness. For this condition known empiric dependence of the penetration resistance is widely using. The dependence is applied under certain limitations on velocity, thicknesses of the target, shape of the indenter, mechanical characteristics, this fact is confirmed by numerous experiments that is carried out in the Stepanov V.A. laboratory in the Ioffe LPTI (at present Ioffe Physical-Technical Institute of the Russian Academy of Sciences in the St. Petersburg).

We used numerical algorithm and we attempt to refine the problem of optimization taking into account the effect of free surfaces of the plate and friction on resistance to penetration in this paper. Gradual increase of complexity of the model by including new factors helps to approach a more realistic description of the penetration process. This improvement allows to further study the problem in a new improved model.

Method of acicular variations is used to solve the problem. We received final solution of the problem and we formulated criteria for the optimal structure of the target in some cases. We have not received of the analytical solution in other cases, but we presented the results of the numerical calculation. We showed that the inclusion of additional effect theoretically lead to a qualitatively new type of solution compared to previously known solutions in some cases. We derived the algorithm for determining the optimal structure of the slab to the problem of the impact of the cone with n materials.

Keywords: optimal braking; inhomogeneous plate, friction, effect of free surfaces of the plates, method of acicular variations.

Введение

Проблема ударного взаимодействия деформируемых тел представляет широкую область экспериментальных и теоретических исследований, некоторый подкласс которой составляют задачи оптимизации. Возможны различные постановки оптимизационных задач – оптимизация формы ударника, поиск оптимального распределения механических характеристик по толщине плиты, определение параметров разнесенной преграды и т.д. Задачи могут различаться по критерию качества – минимизация веса либо толщины преграды, способной обеспечить полную остановку ударника заданной формы и энергии; максимизация начальной скорости ударника, удерживаемого преградой; минимизация конечной скорости ударника после его полного пробития преграды.

Изучению процесса динамического проникания посвящено большое число работ, связанных с экспериментальными или численными исследованиями, аналитическими решениями. Классификация этих работ возможна не только по указанным выше критериям качества и геометрии ударника, но и по типу математической модели процесса и метода решения. Разнообразие моделей и методов связано с тем, что не существует единой схемы, с помощью которой возможно достаточно эффективно решить любую поставленную задачу из указанного класса.

В одной из первых моделей ударного внедрения жесткого осесимметричного тела в деформируемую преграду по нормали для удельной силы сопротивления внедрению σ была принята эмпирическая зависимость [1,2], справедливая для условий вязкого образования кратера

$$\sigma = H_d + k\rho v^2, \quad (1)$$

где ρ , H_d – плотность и динамическая твердость материала преграды; k – коэффициент формы головной части ударника; v – текущая скорость ударника. Слагаемые в соотношении (1) отражают собственное и инерционное сопротивление преграды.

Иной подход для определения силы сопротивления внедрению был предложен в работах Форрестола [3, 4], где движение ударника рассматривается на двух стадиях и на участке инерционного торможения силы сопротивления и в отличие от (1) описывается трехчленным выражением, в которое включается также и вязкостная составляющая.

В модели Сагомояна [5] задача определения силы сопротивления, действующей на ударник, сводится к исследованию процесса расширения круговой цилиндрической полости в упруго-идеальнопластической несжимаемой среде. Этот подход позволяет аналитически получить выражение для давления, действующего на ударник, однако при довольно сильном допущении движение частиц материала преграды, соприкасающихся с поверхностью внедряющегося ударника, происходит в направлении, перпендикулярном направлению проникания. При таких допущениях решение ограничивается случаями проникания тонких заостренных тел вращения.

Ряд исследований посвящен задаче определения оптимальной формы внедряющегося тела. В работе [6] была поставлена задача оп-

тимизации формы жесткого тела вращения, внедряющегося в деформируемую среду. Для описания процесса была использована двухстадийная модель, предложенная Форрестолом, критерием качества служила максимальная глубина проникания. В результате расчетов с помощью методов, основанных на генетическом алгоритме, получено, что оптимальный ударник имеет форму затупленного тела. В аналогичной постановке была рассмотрена задача для ударника, имеющего форму пирамидального тела, при ограничении на его объем [7]. Показано, что при одних значениях параметров задачи оптимальная форма ударника стремится к трехграннику, в других случаях максимальная глубина проникания отвечает круговому сечению ударника. Кроме того, были рассмотрены ударники, имеющие форму усеченных пирамидальных тел, и установлено, что небольшое усечение пирамидального ударника может увеличить глубину проникания.

Обзор [8] включает в себя свыше 50 работ, посвященных проблемам оптимизации форм внедряющихся тел. Сводка обзореваемых работ представлена в виде таблицы, в которой приведена классификация работ по моделям, критериям оптимизации, формам ударника и методам решения.

Выделим ряд работ, посвященных проблеме повышения защитных свойств неоднородных преград. В работе [9] экспериментально исследовалось проникание конического ударника в стальную преграду. Показано, что сопротивление прониканию монолитных плит выше слоистых при одинаковой общей толщине. Однако появление воздушных прослоек может повысить баллистическую сопротивляемость. Этот результат подтвержден и для алюминиевых преград авторами [10]. В экспериментальной работе [11] исследовалась перфорация стальных плит пулями и сравнивались между собой монолитные, слоистые и разнесенные преграды. Получено, что монолитные плиты эффективнее слоистых в баллистическом смысле. Кроме того, показано, что повышение числа слоев в преграде отрицательно сказывается на ее баллистической сопротивляемости.

В работе [12] доказано, что баллистические свойства преграды зависят от порядка расположения и толщины пластин, при этом эффект разнесения может привести как к повышению, так и снижению сопротивляемости преграды. В [13] численными методами авторами получен следующий результат: эффект расслоения может ослабить

баллистические характеристики тонких и средней толщины преград по сравнению с их монолитными эквивалентами, однако на толстые преграды данный эффект влияет незначительно. Сравнительный анализ эффективности защитных свойств монолитных и разнесенных преград был проведен также в работе [14]. Задача динамического проникания алюминиевого цилиндра в диапазоне скоростей удара от 750 до 3000 м/с решалась в трехмерной постановке методом конечных элементов. Показано, что эффективность разнесенных конструкций возрастает с увеличением скорости взаимодействия и определяется характером разрушения в преградах. В работе [15] исследовался эффект воздушных прослоек в разнесенных преградах. Установлено, что в рамках модели локального взаимодействия баллистический предел разнесенных преград не зависит от воздушных прослоек и их ширины для конических ударников. Кроме того, в случае неконических ударников при данном эффекте величина баллистического предела подвергается малым изменениям.

В серии работ [16–18] авторами решалась следующая задача оптимизации: определить последовательность материалов и толщины слоев преграды, обеспечивающих максимальный баллистический предел. В работе [16] исследовался нормальный удар конического ударника в слоистую преграду, состоящую из пластин, в которых чередовались два заданных материала. Причем суммарная толщина пластин, изготовленных из каждого материала, считалась заданной величиной. Доказано, что оптимальная преграда является двухслойной, а также получен критерий, позволяющий определить один из двух возможных вариантов структуры в качестве оптимальной. Позже авторы получили правило определения последовательности пластин в оптимальной преграде для большего числа материалов. В работе [17] доказано, что это правило пригодно к использованию и для случая внедрения ударника с оживальной головной частью. В [18] была рассмотрена более общая постановка задачи определения последовательности материалов и толщин слоев в предположении существования ограничений на толщины пластин, а также верхнего ограничения на суммарную толщину всей преграды.

В работе [19] была поставлена задача оптимизации структуры защитной преграды заданной толщины, обеспечивающей максимум предельной баллистической скорости ударника. Решение задачи определялось выявлением последовательности укладки и толщины слоев

для заданного набора материалов. Задача была решена с использованием эмпирической модели (1). Авторы получили аналитические выражения для предельной баллистической скорости, продемонстрировали способ получения оптимальной структуры защитной преграды, провели теоретическую оценку параметра, характеризующего форму головной части ударника. В работе [20] рассмотрена более сложная задача многоцелевой оптимизации защитной слоистой плиты, когда одновременно учитывались требования максимизации величины баллистических предельных скоростей и минимальности весовых или стоимостных характеристик используемого материала. В рамках такой постановки задачи с использованием эволюционного метода поиска глобального экстремума были найдены наилучшие слоистые структуры защитных конструкций.

В работах [21–23] впервые поставлена задача оптимального распределения механических характеристик по толщине плиты минимального погонного веса, обеспечивающей полную остановку ударника в момент его выхода из преграды. В рамках эмпирической модели (1) при помощи принципа максимума Понтрягина была получена оптимальная структура неоднородной преграды для цилиндрических, конических ударников, а также цилиндрических ударников с конической головной частью [22]. В работе [22] предполагалась линейная зависимость между динамической твердостью и плотностью материалов, что приводило к оптимальным конструкциям в виде слоистых плит. В работе [23] для цилиндрического ударника исследовался случай нелинейной связи $H_a(\rho)$, при этом предположении получено, что оптимальные преграды могут иметь непрерывное распределение свойств по толщине. В работе [24] представлен иной подход к проблеме поиска оптимальной структуры преграды минимального погонного веса. Исследована задача проектирования слоистой плиты минимального погонного веса из заданного конечного набора материалов, обеспечивающей полную остановку цилиндрического ударника с конической головкой в момент его выхода из преграды. Решение задачи в рамках модели Сагомояна получено при помощи метода игольчатых вариаций.

Данная статья посвящена развитию работ [21–24], в том числе, поиску оптимального решения на основе модернизированной эмпирической зависимости (1) с учетом трения и ослабляющего влияния свободных поверхностей плиты.

1. Классическая постановка и качественные результаты

Рассмотрим процесс динамического проникания жесткого осесимметричного тела в плиту при ударе по нормали и поставим следующую задачу: требуется из заданного конечного набора материалов спроектировать слоистую преграду минимального веса, которая обеспечивает остановку движущегося в ней ударника в момент выхода его носовой части на тыльную сторону плиты. Для описания процесса динамического проникания используем эмпирическую зависимость (1) для удельной силы сопротивления прониканию σ (рис. 1).

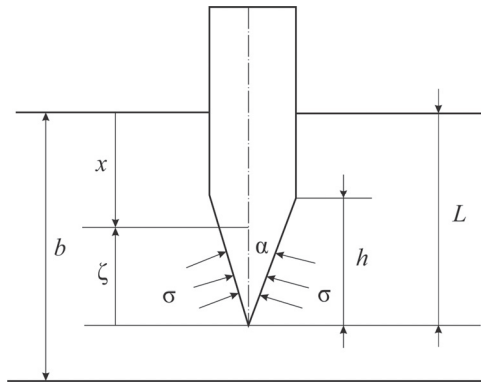


Рис. 1. Схема внедрения цилиндрического тела с конической головной частью в плиту

Рассмотрим случай динамического проникания в слоистую плиту ударника конической формы. В случае произвольного распределения плотности ρ и динамической твердости H_d по толщине плиты силу сопротивления прониканию ударника F можно вычислить, учитывая (1), по следующей формуле [21, 22]:

$$F(L) = 2\pi t g^2 \alpha \int_0^L (L-x) [H_d(x) + k\rho(x)v^2(L)] dx, \quad (2)$$

где L – текущая глубина внедрения ударника; x – координата, отсчитываемая от лицевой поверхности преграды; α – угол полураствора конуса; $k = \sin^2 \alpha$ для конуса.

Учитывая (2) и равенство $\frac{dL}{dt} = v$, можно при помощи второго закона Ньютона $M\dot{v} = -F$ записать уравнение движения ударника в преграде

$$\frac{d(v^2)}{dL} = -E \int_0^L (L-x)[H_d(x) + k\rho(x)v^2(L)]dx, \quad (3)$$

где $E = \frac{4\pi tg^2\alpha}{M}$, M – масса ударника.

Граничные условия для уравнения (3): в момент соударения с плитой скорость ударника равна v_0 , а движение ударника в преграде происходит до полной его остановки в момент выхода носовой части на тыльную сторону плиты.

$$v(L=0) = v_0, \quad v(L=b) = 0. \quad (4)$$

Введем дополнительные фазовые координаты

$$y_1 = v^2, \quad y_2 = \int_0^L (L-x)H_d(x)dx, \quad y_3 = \int_0^L H_d(x)dx, \\ y_4 = \int_0^L (L-x)\rho(x)dx, \quad y_5 = \int_0^L \rho(x)dx,$$

тогда уравнение (3) с помощью новых переменных $y_i; i=1, \dots, 5$ можно записать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а полный процесс движения, учитывая (4), описывается системой

$$y_1' = -E(y_2 + ky_1y_4), \quad y_2' = y_3, \quad y_3' = H_d, \quad y_4' = y_5, \quad y_5' = \rho, \\ y_1(0) = v_0^2, \quad y_i(0) = 0, \quad i = 2, \dots, 5. \quad (5)$$

Систему (5) можно записать в векторной форме:

$$y' = f(y, \rho), \quad x \geq 0, \\ y_1(0) = v_0^2, \quad y_i(0) = 0, \quad i = 2, \dots, 5. \quad (6)$$

Соотношения (6) определяют управляемую систему, роль управления играет пара $\{\rho(x), b\}$, где ρ – распределение плотности по толщине плиты; b – общая толщина плиты. Управляющая функция ρ принадлежит классу кусочно-постоянных функций с областью значений из конечного дискретного множества.

Критерий качества управления имеет вид функционала

$$F_0[\rho, b] \equiv \int_0^b \rho(x) dx \rightarrow \min, \quad (7)$$

а граничные условия представляют собой условие обращения в нуль скорости ударника в момент выхода носовой части на тыльную сторону плиты

$$F_1[\rho, b] \equiv y_1(b) = 0. \quad (8)$$

Соотношения (6)–(8) определяют математическую постановку оптимизационной задачи. Отметим, что для создания оптимальной преграды имеется конечный набор материалов – это приводит к дискретной структуре области значений управляющей функции ρ . Для такого класса функций нельзя построить малые вариации управления, поэтому при решении задачи применяется метод игольчатых вариаций [25]. Этот метод заключается в построении конечных вариаций управления на множестве малой меры.

Конечная вариация управления ρ определяется на множестве малой меры M значением ω :

$$\rho^*(x) = \begin{cases} \omega, & x \in M, \\ \rho, & x \notin M, \end{cases} \quad (9)$$

при этом возмущенное управление ρ^* порождает вариацию функционалов (7)–(8):

$$\delta F_0 = \int_M [\omega - \rho] dx + \rho(b) \delta b, \quad (10)$$

$$\delta F_1 = \int_M \Psi [f(\omega) - f(\rho)] dx + \frac{dy_1(b)}{db} \delta b, \quad (11)$$

где Ψ – вектор сопряженных переменных, который находится из сопряженной системы уравнений

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= Eky_4\psi_1, \quad \psi'_2 = E\psi_1, \quad \psi'_3 = -\psi_2, \quad \psi'_4 = Eky_1\psi_1, \quad \psi'_5 = -\psi_4, \\ \psi_1(b) &= 1, \quad \psi_i(b) = 0, \quad i = 2, \dots, 5. \end{aligned} \quad (12)$$

Из условия (8) и первого уравнения системы (5) можно получить равенство

$$\frac{dy_1(b)}{db} = -E[y_2(b) + ky_1(b)y_4(b)] = -Ey_2(b). \quad (13)$$

Согласно (8) на возмущенном управлении получаем $\delta F_1 = 0$, используя последнее равенство и соотношения (11), (13), выражаем вариацию δb через вариацию управления ρ

$$\delta b = \frac{1}{Ey_2(b)_M} \int_M \psi [f(\omega) - f(\rho)] dx. \quad (14)$$

Подставив (14) в (10), найдем

$$\delta F_0 = \int_M [\Gamma(y, \psi, \rho) - \Gamma(y, \psi, \omega)] dx, \quad (15)$$

где

$$\Gamma(y, \psi, \omega) = -(1 + a\psi_5)\omega - a\psi_3 H_d(\omega) + \Phi(y, \psi),$$

$$a = \frac{\rho(b)}{Ey_2(b)}. \quad (16)$$

При оптимальном управлении $\delta F_0 \geq 0$, что, при учете (15), можно представить в виде принципа максимума Понтрягина

$$\Gamma(y, \psi, \rho^{opt}) = \max_{\omega \in \Omega} \Gamma(y, \psi, \omega),$$

где Ω – заданный набор материалов.

Анализируя полученное выражение для гамильтониана Γ , можно сделать ряд качественных выводов относительно оптимальной структуры преграды. Для этого рассмотрим геометрическую интерпретацию необходимых условий оптимальности.

Отложим в прямоугольной системе координат по оси абсцисс плотность ρ , а по оси ординат – динамическую твердость H_d . Материалу из заданного множества Ω будет соответствовать точка на плоскости. Таким образом, множеству исходных материалов соответствует совокупность точек на плоскости, выпуклая оболочка которой образует многоугольник (рис. 2). Максимум гамильтониана достигается на одной из вершин многоугольника – это означает, что в оптимальную преграду входят только материалы, лежащие на границе множества исходных материалов. Следовательно, смена материала в слоистой плите осуществляется лишь по смежным вершинам многоугольника.

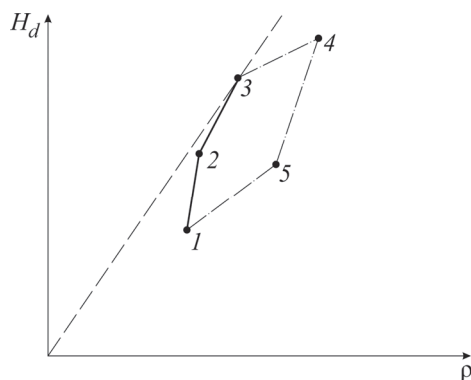


Рис. 2. Многоугольник исходных материалов

Можно сформулировать ряд свойств оптимальной структуры слоистой плиты.

Свойство 1. В допустимый набор могут входить только материалы, которым соответствуют вершины части границы многоугольника, заключенной между вершиной, соответствующей материалу с минимальной плотностью, и вершиной, через которую проходит касательная (пунктирная линия на рис. 2), проведенная через начало координат.

Свойство 2. С тыльной стороны плиты всегда расположен материал с наименьшей плотностью.

Свойство 3. В оптимальной плите материалы могут располагаться только в такой же последовательности, в которой расположены соответствующие им вершины на части границы многоугольника, соответствующей допустимому набору.

Свойство 4. Если касательная к многоугольнику проходит через точку, соответствующую материалу с минимальной плотностью, то оптимальная плита является однослойной из материала с минимальной плотностью.

Из свойств 1–4 следует, что в оптимальной конструкции плиты слои из разных материалов располагаются в порядке убывания плотности в направлении от лицевой поверхности к тыльной.

Используя свойства 1–4, можно получить качественные результаты оптимизационной задачи с несколькими материалами при динамическом проникании конуса в слоистую плиту.

В задаче с двумя материалами для конического ударника оптимальная структура полностью определяется параметром B , который зависит лишь от механических характеристик данных материалов. Ес-

ли для двух материалов с параметрами ρ_1, H_1 и ρ_2, H_2 , $\rho_1 < \rho_2$ выполняется соотношение $H_2/\rho_2 < H_1/\rho_1$, то оптимальная преграда однослойная легкая ρ_1, H_1 . В противном случае оптимальная преграда является двухслойной с лицевым твердым и тыльным легким слоем $\rho_2 \cup \rho_1$. Условие $H_2/\rho_2 < H_1/\rho_1$ в эквивалентной форме имеет вид $B > 0$, где $B = (H_1\rho_2 - H_2\rho_1)/(\rho_2 - \rho_1)$. Условие $B > 0$ геометрически означает, что прямая, проходящая через точки (ρ_1, H_1) и (ρ_2, H_2) , пересекает ось H_d выше оси ρ . В противном случае $B < 0$ прямая пересечет ось H_d ниже оси ρ .

Обобщим результат на случай задачи о трех материалах. Требуется из заданного набора трех материалов ρ_1, H_1 ; ρ_*, H_* и ρ_2, H_2 сконструировать плиту минимального погонного веса, обеспечивающую полную остановку конического ударника в момент его выхода из преграды. Рассмотрим задачу в условиях кусочно-линейной связи динамической твердости H_d и плотности ρ :

$$\begin{aligned}
 H_d(\rho) &= A\rho + B \quad (\rho \in \Omega_1), \quad H_d(\rho) = D\rho + B_1 \quad (\rho \in \Omega_2), \\
 B_1 &= B + \rho_*(A - D), \quad \Omega_1 = \{\rho(t) : \rho_1 \leq \rho(t) \leq \rho_*, (t \in [0, t_k])\}, \\
 \Omega_2 &= \{\rho(t) : \rho_* \leq \rho(t) \leq \rho_2, (t \in [0, t_k])\}, \quad \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Анализируя свойства оптимальной преграды, можно получить критерии оптимальной структуры в зависимости от параметров B и B_1 .

Рассмотрим варианты оптимальной структуры плиты для различных значений параметров B и B_1 .

А) $B > 0, B_1 > 0$. В этом случае обе прямые, проходящие через точки (ρ_1, H_1) , (ρ_*, H_*) и точки (ρ_*, H_*) , (ρ_2, H_2) , пересекают ось H_d выше оси ρ . Это означает, что касательная к многоугольнику проходит через точку (ρ_1, H_1) , и оптимальной является однослойная плита из материала ρ_1, H_1 (рис. 3, а).

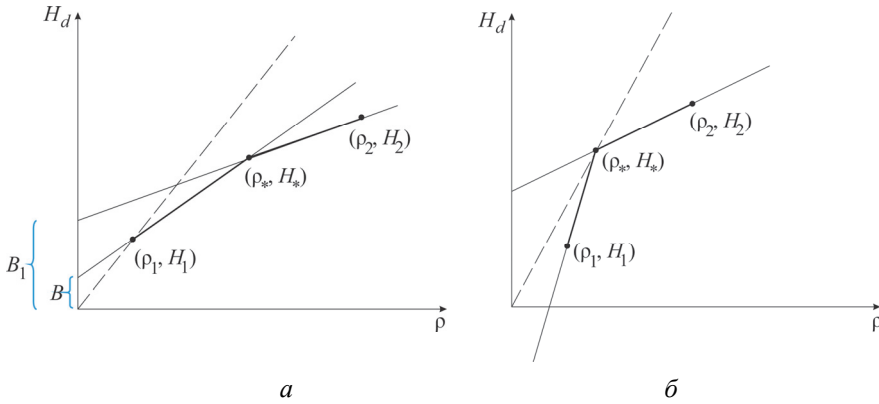


Рис. 3. Расположение материалов в случае А (а) и Б (б)

Б) $B < 0, B_1 > 0$. Для этого случая получен следующий результат: прямая, проходящая через точки (ρ_1, H_1) , (ρ_*, H_*) , пересекает ось H_d ниже оси ρ , а прямая, проходящая через точки (ρ_*, H_*) , (ρ_2, H_2) , пересекают ось H_d выше оси ρ . Следовательно, касательная к многоугольнику проходит через точку (ρ_*, H_*) , и оптимальной является двухслойная плита вида $\rho_* \cup \rho_1$ (рис. 3, б).

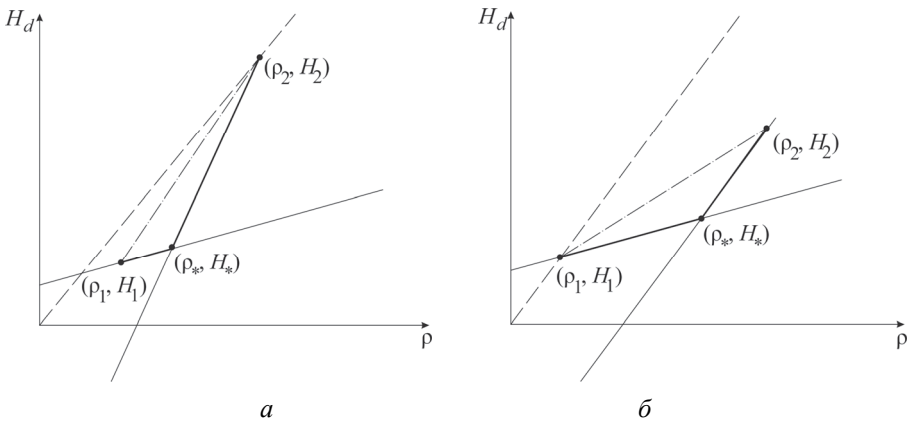


Рис. 4. Расположение материалов в случае В: а – вариант 1; б – вариант 2

В) $B > 0, B_1 < 0$. В этом случае прямая, проходящая через точки (ρ_1, H_1) , (ρ_*, H_*) , пересекает ось H_d выше оси ρ , а прямая, проходящая через точки (ρ_*, H_*) , (ρ_2, H_2) , пересекает ось H_d ниже оси ρ . Возможны два варианта: касательная к многоугольнику проходит через точку

(ρ_2, H_2) , тогда оптимальная плита имеет двухслойную структуру вида $\rho_2 \cup \rho_1$ (рис. 4, а); касательная к многоугольнику проходит через точку (ρ_1, H_1) , при этом оптимальной является однослойная преграда из материала ρ_1, H_1 (рис. 4, б).

Граничное положение оптимальных областей соответствует следующему случаю: обе точки (ρ_1, H_1) и (ρ_2, H_2) лежат на касательной к многоугольнику. Отсюда следует, что если $B < \lambda B_1$, то оптимальная преграда – двухслойная вида $\rho_2 \cup \rho_1$, иначе – однослойная ρ_1, H_1 . Параметр $\lambda = -(\rho_1 / \rho_2) \cdot (\rho_2 - \rho_*) / (\rho_* - \rho_1)$.

Г) $B < 0, B_1 < 0$. Этому случаю геометрически соответствует следующая ситуация: обе прямые, проходящие через точки (ρ_1, H_1) , (ρ_*, H_*) и точки (ρ_*, H_*) , (ρ_2, H_2) , пересекают ось H_d ниже оси ρ . Касательная к многоугольнику проходит через точку (ρ_2, H_2) .

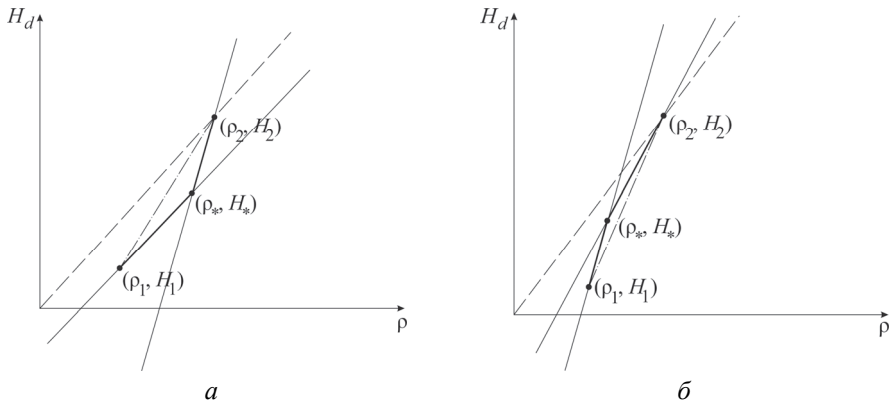


Рис. 5. Расположение материалов в случае Г: а – вариант 1; б – вариант 2

В рассматриваемом случае также возможны два варианта: точка (ρ_*, H_*) лежит ниже прямой, проходящей через точки (ρ_1, H_1) и (ρ_2, H_2) , при этом в оптимальную плиту входят два материала $\rho_2 \cup \rho_1$ (рис. 5, а); точка (ρ_*, H_*) лежит выше прямой, проходящей через точки (ρ_1, H_1) и (ρ_2, H_2) , при этом в оптимальную плиту входят три материала $\rho_2 \cup \rho_* \cup \rho_1$ (рис. 5, б).

Граничное положение оптимальных областей определяет условие $B = B_1$. Следовательно, при условии $B < B_1$ оптимальной является трехслойная плита вида $\rho_2 \cup \rho_* \cup \rho_1$, а при условии $B > B_1$ – двухслойная плита $\rho_2 \cup \rho_1$. Основные результаты представлены на рис. 6.

Рассмотрим задачу с n материалами для конического ударника. Предположим, что проектировщик располагает набором из n материалов $\rho_1, H_1; \dots; \rho_n, H_n$, из которого нужно синтезировать плиту минимального погонного веса, гасящую скорость конического ударника до нуля.

Условие кусочно-линейной зависимости динамической твердости H_d от плотности ρ примет вид

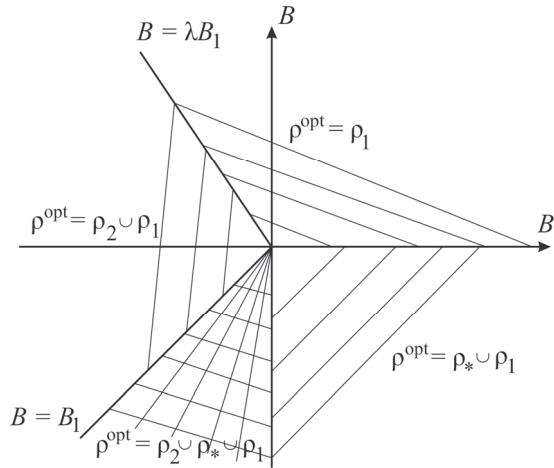


Рис. 6. Оптимальные области параметров B и B_1

$$\begin{aligned}
 H_d(\rho) &= A_1\rho + B_1 \quad (\rho \in \Omega_1); \dots; H_d(\rho) = A_n\rho + B_n \quad (\rho \in \Omega_n), \\
 \Omega_1 &= \{\rho(t) : \rho_1 \leq \rho(t) \leq \rho_2, (t \in [0, t_k])\}; \dots; \\
 \Omega_{n-1} &= \{\rho(t) : \rho_{n-1} \leq \rho(t) \leq \rho_n, (t \in [0, t_k])\},
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

$$B_i = (H_i\rho_{i+1} - H_{i+1}\rho_i) / (\rho_{i+1} - \rho_i), \quad \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{n-1} = \Omega.$$

Сформулированные выше свойства позволяют отобрать материалы, которые входят в оптимальную плиту. Таким образом, можно получить качественное решение динамической оптимизационной задачи для общего случая – задачи с n материалами.

Рассмотрим варианты оптимальной структуры плиты в зависимости от параметров $B_i; i=1, \dots, n$.

А) $B_1 < 0, \dots, B_{n-1} < 0; B_1 < \dots < B_{n-1}$. Только в этом случае возможен n -слойный вариант структуры в качестве оптимальной. Касательная к многоугольнику проходит через точку (ρ_n, H_n) , а точки исходного множества $(\rho_1, H_1), \dots, (\rho_n, H_n)$ лежат на выпуклой вверх части границы многоугольника. В случае нарушения одного из условий случая А из оптимального набора исключаются определенные материалы.

Б) $B_i > 0$ или $B_i > B_{i+1}$. В этом случае $(i+1)$ -й материал исключается из оптимального набора, и задача сводится к задаче с $(n-1)$ материалами. Геометрическая интерпретация случая Б соответствует следующей картине: точка (ρ_{i+1}, H_{i+1}) лежит ниже выпуклой вверх оболочки точечного множества. Так как точки, которым соответствуют материалы из оптимального набора, лежат на границе многоугольника, то материал ρ_{i+1}, H_{i+1} не войдет в оптимальную структуру плиты.

Суммируя вышесказанное, можно построить алгоритм определения оптимальной структуры плиты для задачи с n материалами. Вычисляем значения параметров B_1, \dots, B_{n-1} , последовательно проверяя условия А. Если условия А верны, то в оптимальную структуру входит n материалов. В противном случае при выполнении условия Б из оптимального набора исключается $(i+1)$ -й материал, $(i+2)$ -й материал становится $(i+1)$ -м, вычисляется новое значение параметра B_i , и данная процедура повторяется снова. В итоге останется некоторое количество материалов, которые войдут в оптимальную плиту, либо задача сведется к разобранной выше задаче о трех материалах.

2. Влияние трения и свободных поверхностей плиты

Исследуем процесс ударного внедрения конического тела в слоистую преграду при учете дополнительных факторов – влияния краевых эффектов свободных поверхностей и трения на сопротивление прониканию.

Приведем постановку задачи оптимизации в более общем виде. С помощью введения коэффициента k_{oc} эмпирическая зависимость (1) записывается в виде

$$\sigma = k_{oc} H_d + k_r v^2, \quad (19)$$

где k_{oc} – коэффициент ослабления.

Основываясь на экспериментальном факте [1, 26], что значение динамической твердости (имеющей смысл удельной работы вытеснения материала преграды) вблизи свободных поверхностей будет существенно отличаться от значения, которое она принимает в глубинных слоях, можно определить коэффициент k_{oc} следующим образом:

$$\begin{cases} k_{oc} = \frac{1-k_r^0}{l_0} L + k_r^0, & L \leq l_0, \\ k_{oc} = 1, & l_0 \leq L \leq b-l_0, \\ k_{oc} = \frac{k_r^0-1}{l_0} L + 1 - \frac{(b-l_0)(k_r^0-1)}{l_0}, & b-l_0 \leq L \leq b, \end{cases} \quad (20)$$

где b – конечная глубина внедрения; l_0, k_r^0 – параметры ослабления (рис. 7). Отметим, что соотношения (20) верны при условии $2l_0 \leq L_k$. Случай $2l_0 > L_k$ соответствует тонким преградам.

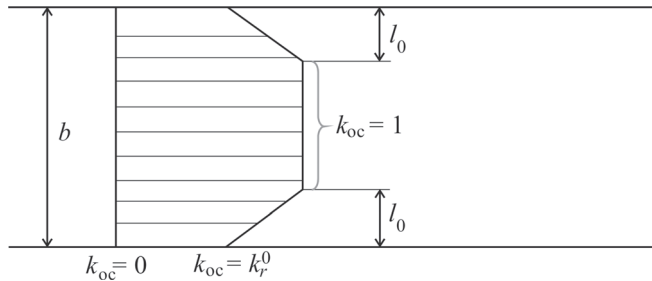


Рис. 7. Зависимость коэффициента ослабления от глубины внедрения

Учет трения приводит к появлению дополнительного слагаемого в соотношении (2):

$$\begin{aligned} F(L) = & 2\pi \text{tg}^2 \alpha \int_0^L (L-x) [k_{oc}(x) H_d(x) + \\ & + k_r(x) v^2(L)] dx + 2\pi \text{tg} \alpha \int_0^L (L-x) \tau(x) dx, \end{aligned} \quad (21)$$

где τ – удельная сила трения.

Уравнение движения ударника в преграде примет вид

$$\frac{d(v^2)}{dL} = -E \int_0^L (L-x)[k_{oc}(x)H_d(x) + k\rho(x)v^2(L)]dx - D \int_0^L (L-x)\tau(x)dx, \quad (22)$$

где $E = \frac{4\pi t g^2 \alpha}{M}$, $D = \frac{4\pi t g \alpha}{M}$, M – масса ударника.

Уравнение (22) с помощью новых переменных запишем в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} y'_1 &= -E(y_2 + ky_1 y_4) - Dy_6, \quad y'_2 = y_3, \quad y'_3 = k_{oc}H_d, \quad y'_4 = y_5, \quad y'_5 = \rho, \\ y'_6 &= y_7, \quad y'_7 = \tau, \quad y_1(0) = v_0^2, \quad y_i(0) = 0, \quad i = 2, \dots, 7. \end{aligned} \quad (23)$$

Сопряженная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= Eky_4\psi_1, \quad \psi'_2 = E\psi_1, \quad \psi'_3 = -\psi_2, \quad \psi'_4 = Eky_1\psi_1, \quad \psi'_5 = -\psi_4, \\ \psi'_6 &= D\psi_1, \quad \psi'_7 = -\psi_6, \quad \psi_1(b) = 1, \quad \psi_i(b) = 0, \quad i = 2, \dots, 7. \end{aligned} \quad (24)$$

Гамильтониан системы (23) запишется в виде

$$\begin{aligned} \Gamma(y, \psi, \omega) &= -(1 + a\psi_5)\omega - a\psi_3 k_{oc}H_d(\omega) - a\psi_7\tau(\omega) + \Phi(y, \psi), \\ a &= \frac{\rho(b)}{Ey_2(b) + Dy_6(b)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Анализируя коэффициенты при ω , H_d и τ в выражении (25), можно сформулировать свойства оптимальной плиты. Рассмотрим по отдельности каждый из случаев – учет трения и учет краевых эффектов свободных поверхностей.

При учете трения гамильтониан (25) принимает вид

$$\Gamma(y, \psi, \omega) = -(1 + a\psi_5)\omega - a\psi_3 H_d(\omega) - a\psi_7\tau(\omega) + \Phi(y, \psi).$$

Функции ψ_3 , ψ_5 и ψ_7 являются отрицательными и монотонно возрастающими. Следовательно, коэффициенты при H_d и τ положительны и монотонно убывают, коэффициент при ω убывает, достигая на правом конце значения -1 . Это означает, в предположении, что материал с большим значением H_d имеет и большее значение τ , что в оптимальной плите материалы могут располагаться лишь по мере убы-

вания плотности в направлении от лицевой поверхности к тыльной, причем в окрестности тыльной поверхности располагается материал с минимальной плотностью. Таким образом, учет трения для конуса не приводит к качественно новым результатам по сравнению с базовой постановкой задачи.

При учете фактора влияния свободных поверхностей преграды на сопротивление прониканию гамильтониан приводится к следующему виду:

$$\Gamma(y, \psi, \omega) = -(1 + a\psi_5)\omega - a\psi_3 k_{oc} H_d(\omega) + \Phi(y, \psi).$$

Коэффициенты при H_d и ω ведут себя подобно разобранным выше случаям на промежутке $[l_0, L_k]$, следовательно, с тыльной стороны плиты на толщине $[l_0, L_k]$ справедлив тот же качественный результат – материалы располагаются в порядке убывания. Так как функция $a\psi_3$ отрицательна и монотонно возрастает, а k_{oc} положительна и монотонно возрастает, то учет эффекта ослабления приводит к тому, что с лицевой стороны поверхности оптимальной преграды (в области $[0, l_0]$) материалы могут расположиться в порядке возрастания – это качественно новый результат.

Рассмотрим динамическое внедрение в слоистую преграду цилиндрического ударника с конической головной частью высотой h . Приведем постановку задачи в общем виде: удельная сила сопротивления вычисляется по уточненной эмпирической зависимости (19), в соотношении для силы сопротивления учтено трение. Соотношение для силы сопротивления прониканию ударника F разбивается на две части:

$$F(L) = \begin{cases} 2\pi \text{tg}^2 \alpha \int_0^L (L-x) [k_{oc}(x) H_d(x) + k\rho(x) v^2(L)] dx + \\ + 2\pi \text{tg} \alpha \int_0^L (L-x) \tau(x) dx, & L \leq h, \\ 2\pi \text{tg}^2 \alpha \int_{L-h}^L (L-x) [k_{oc}(x) H_d(x) + k\rho(x) v^2(L)] dx + \\ + 2\pi \text{tg} \alpha \int_{L-h}^L (L-x) \tau(x) dx, & L > h. \end{cases} \quad (26)$$

Уравнение движения ударника при этом будет иметь вид

$$\frac{d(v^2)}{dL} = \begin{cases} -E \int_0^L (L-x)[k_{oc}(x)H_d(x) + k\rho(x)v^2(L)]dx - \\ -D \int_0^L (L-x)\tau(x)dx, L \leq h, \\ -E \int_{L-h}^L (L-x)[k_{oc}(x)H_d(x) + k\rho(x)v^2(L)]dx - \\ -D \int_{L-h}^L (L-x)\tau(x)dx, L > h. \end{cases} \quad (27)$$

При помощи введения новых переменных уравнение (27) запишется в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -E(y_2 + ky_1y_4) - Dy_6, \quad y_2' = y_3 - hk_{oc}(x-h)H_d(x-h), \\ y_3' &= k_{oc}(x)H_d(x) - k_{oc}(x-h)H_d(x-h), \quad y_4' = y_5 - h\rho(x-h), \\ y_5' &= \rho(x) - \rho(x-h), \quad y_6' = y_7 - h\tau(x-h), \quad y_7' = \tau(x) - \tau(x-h), \\ y_1(0) &= v_0^2, \quad y_i(0) = 0, \quad i = 2, \dots, 7. \end{aligned}$$

Для данной системы введем следующие обозначения: $y = \{y_i\}$; $f = \{f_i\}$ – вектор, составленный из первых слагаемых правых частей системы; $g = \{g_i\}$ – вектор, составленный из вторых слагаемых правых частей системы. Эту систему с помощью единичной функции $I(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ запишем в векторной форме:

$$\begin{aligned} y' &= f(y, \rho) - g(x-h)I(x-h), \quad x \geq 0, \\ y_1(0) &= v_0^2, \quad y_i(0) = 0, \quad i = 2, \dots, 7. \end{aligned} \quad (28)$$

Вектор сопряженных переменных находится из системы

$$\psi' = -f_y^* \psi, \quad \psi_1(b) = 1, \quad \psi_i(b) = 0, \quad i = 2, \dots, 7. \quad (29)$$

Функция Гамильтона примет различный вид на отрезках $[0, L-h]$ и $[L-h, L]$:

$$\Gamma(y, \psi, \omega) = -\omega - a \left\{ [\psi_3(x) - h\psi_2(x+h) - \psi_3(x+h)] k_{oc} H_d(\omega) + \right. \\ \left. + [\psi_5(x) - h\psi_4(x+h) - \psi_5(x+h)] \omega + \right. \\ \left. + [\psi_7(x) - h\psi_6(x+h) - \psi_7(x+h)] \tau(\omega) \right\}, \quad [0, L-h],$$

$$\Gamma(y, \psi, \omega) = -\omega - a [\psi_3(x) \cdot k_{oc} H_d(\omega) + \psi_5(x) \cdot \omega + \psi_7(x) \cdot \tau(\omega)], \quad [L-h, L],$$

где $a = \frac{\rho(b)}{Ey_2(b) + Dy_6(b)}$.

3. Численный пример

Конкретные толщины слоев оптимальной плиты определяются численно. Численный алгоритм решения оптимизационной задачи аналогичен [22]. Выбирается некоторое допустимое управление $\rho(x)$ и малый параметр Δx , моделирующий множество малой меры. Вводится равномерная сетка $x_1 = 0, x_j = x_{j-1} + \Delta x, j = \overline{1, S}$ ($x_{S-1} < b < x_S$). В точках $x_j + \Delta x/2$ вычисляются значения y и ψ , они предполагаются постоянными для всего отрезка $[x_j, x_{j+1}]$. Затем интегрируется система уравнений (28), находятся в узлах сетки значения $y(x)$ и b . В полученной точке $x = b$ задаются граничные условия для сопряженных функций и интегрируется система (29). На отрезке $[x_j, x_{j+1}]$ находится новое значение ρ_j из условия максимума:

$$\Gamma(y_j, \psi_j, \rho_j) = \max_{\rho \in \Omega} \Gamma(y_j, \psi_j, \rho),$$

если $\rho_j = \rho(x_j + \Delta x/2)$, то осуществляется переход к отрезку $[x_{j+1}, x_{j+2}]$ и определяется новое значение ρ_{j+1} ; если $\rho_j \neq \rho(x_j + \Delta x/2)$, то выбирается новое управление

$$\rho^* = \begin{cases} \rho_j, & x \in [x_j, x_{j+1}], \\ \rho(x), & x \notin [x_j, x_{j+1}], \end{cases}$$

затем выполняется переход к первому этапу, и вновь интегрируется исходная система уравнений (28) при $x = x_{j+1}$.

Управление улучшается до правого конца интервала $x = b$; процесс завершается, когда $\rho(x)$ не меняется ни при каких j .

В качестве примера было рассмотрено динамическое проникание жесткого цилиндрического ударника с конической головной частью высотой $1,6 \cdot 10^{-2}$ м при угле полураствора конуса 15° и начальной скоростью 500 м/с. В таблице представлены механические характеристики исходных материалов.

Механические свойства материалов

Номер материала	H_d , кгс/см ²	ρ , г/см ³	Номер материала	H_d , кгс/см ²	ρ , г/см ³
1	1500	2,8	4	6500	4,59
2	2500	2,8	5	12500	7,95
3	4500	4,59	6	13200	7,95

В результате расчетов получено, что оптимальной является трехслойная плита, сконструированная из 6-го, 4-го и 2-го материалов. Их относительная толщина в процентном соотношении составляет 70,5 : 2,33 : 27,17.

Численные расчеты подтвердили, что учет краевого эффекта ослабления может привести к качественно новому результату. При данных $k_r^0 = 0,5$ и $l_0 = 1,5$ и двух исходных материалах $H_2 = 13200$ кг/см², $\rho_2 = 7,95$ г/см³, $H_1 = 4500$ кг/см², $\rho_1 = 2,8$ г/см³ в задаче об ударе цилиндрического ударника с конической головкой оптимальной является трехслойная преграда вида $\rho_1 \cup \rho_2 \cup \rho_1$. Относительная толщина (%) составляет соответственно 16,85 : 54,2 : 28,95. В задаче о трех материалах при исходных данных $k_r^0 = 0,1$, $l_0 = 1,0$, $H_3 = 13200$ кг/см², $\rho_3 = 7,95$ г/см³, $H_2 = 6500$ кг/см², $\rho_2 = 4,59$ г/см³, $H_1 = 2500$ кг/см², $\rho_1 = 2,8$ г/см³ оптимальная плита синтезируется из пяти слоев $\rho_1 \cup \rho_2 \cup \rho_3 \cup \rho_2 \cup \rho_1$ при процентном соотношении их относительной толщины 5,7 : 0,62 : 65,67 : 0,44 : 27,57.

Библиографический список

1. Витман Ф.Ф., Степанов В.А. Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара 100–1000 м/с // Некоторые проблемы прочности твердого тела. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959. – С. 207–221.
2. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях / под ред. Н.А. Златина и Г.И. Мишина. – М.: Наука, 1974. – 344 с.
3. An empirical equation for penetration depth of ogive-nose projectiles into concrete targets / M.J. Forrestal [et.al] // International Journal of Impact Engineering. – 1994. – Vol. 15 (4). – P. 395–405.
4. A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets / M.J. Forrestal, D.Y. Tzou // International Journal of Solids and Structures. – 1997. – Vol. 34 (31–32). – P. 4127–4146.
5. Сагомоян А.Я. Пробивание плиты тонким твердым снарядом // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1975. – № 5. – С. 104–110.
6. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. Оптимизация формы жесткого тела, внедряющегося в сплошную среду // Проблемы прочности и пластичности. – 2007. – № 69. – С. 47–58.
7. Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Макеев В.Е. О проникании в упругопластическую среду жестких неосесимметричных тел // Проблемы прочности и пластичности. – 2008. – № 70. – С. 131–139.
8. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Shape optimization of high-speed penetrators: a review // Central European Journal of Engineering. – 2012. – Vol. 2 (4) – P. 473–482.
9. Honda K., Takamae G., Watanabe T. On the measurement of the resistance of shield plates to penetration by a rifle bullet // Tohoku Imperial University, 1st Series. – 1930. – Vol. 19. – P. 703–725.
10. Marom I., Bodner S.R. Projectile perforation of multi-layered beams // International Journal of Mechanical Science. – 1979. – Vol. 21(8). – P. 489–504.
11. Almohandes A.A., Abdel-Kader M.S., Eleiche A.M. Experimental investigation of the ballistic resistance of steel-fiberglass reinforced polyester laminated plates // Composites, Part B. – 1996. – Vol. 27(5). – P. 447–458.

12. On the ballistic resistance of laminated steel targets: experiments and numerical calculations / P. Weidemaier, H. Senf, H. Rothenhausler, G.L. Filbey, W.A. Gooch // 14th International Symposium on Ballistics, Quebec, Canada, 26–29 Sept. 1993. – P. 681–690.

13. Zukas J.A., Scheffler D.R. Impact effects in multilayered plates // International Journal of Solids and Structures. – 2001. – Vol. 38(19). – P. 3321–3328.

14. Радченко А.В., Радченко П.А. Влияние ориентации механических свойств композиционных материалов на динамическое разрушение монолитных и разнесенных преград // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, №4. – С. 97–106.

15. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Effect of air-gaps on the ballistic resistance of ductile shields perforated by nonconical impactors // Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2006. – Vol. 1. – No. 2. – P. 279–299.

16. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. The optimum arrangement of the plates in a multi-layered shield // International Journal of Solids and Structures. – 2000. – Vol. 37. – P. 687–696.

17. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Effect of the order of plates on the ballistic resistance of ductile shields perforated by nonconical impactors // Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2006. – Vol. 1. – No. 7. – P. 1161–1177.

18. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Optimization of multi-layered metallic shield // Nuclear Engineering and Design, 2011.

19. Некоторые аналитические и численные оценки параметров оптимальной структуры защитной плиты / Н.В. Баничук, С.Ю. Иванова, Е.В. Макеев, А.И. Турутько // Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. Вып. 75. Ч. 3. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2013. – С. 206–214.

20. Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Макеев Е.В. Проникание жестких ударников в слоистые пластины и некоторые задачи глобальной многоцелевой структурной оптимизации // Проблемы прочности и пластичности: межвуз. сб. Вып. 74. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2012. – С. 124–133.

21. Аптуков В.Н. Соппротивление пластин динамическому внедрению жестких ударников: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Пермский политехнический институт. – Пермь, 1979. – 16 с.

22. Аптуков В.Н., Петрухин Г.И., Поздеев А.А. Оптимальное торможение твердого тела неоднородной пластиной при ударе по нормали // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – № 1. – С. 165–170.

23. Аптуков В.Н. Оптимальная структура неоднородной пластины с непрерывным распределением свойств по толщине // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – № 3. – С. 149–152.

24. Аптуков В.Н., Белоусов В.Л., Каниболотский М.А. Оптимизация структуры слоистой плиты при проникании жесткого ударника // Механика композитных материалов. – 1986. – № 2. – С. 252–257.

25. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. – М.: Наука, 1978. – 488 с.

26. Аптуков В.Н., Гладковский В.А., Лесниченко Ю.Ю. Взаимодействие ударника с преградой конечной толщины // Упругое и вязкоупругое поведение материалов и конструкций. – Свердловск: Изд-во АН СССР, 1981. – С. 68–73.

References

1. Vitman F.F., Stepanov V.A. Vlijanie skorosti deformirovaniya na soprotivlenie deformirovaniyu metallov pri skorostjah udara 100-1000 m/s [Effect of the Strain Rate on the Resistance of Metals to Deformation at Impact Velocities of 100-1000 m/s]. *Nekotoryje Problemy Prochnosti Tverdogo Tela*. Moscow-Leningrad, 1959, pp. 207-221.

2. Ballisticheskije ustanovki i ikh primenenie v experimental'nykh issledovaniyakh [Ballistic units and their use in experimental investigations]. Moscow: Nauka, 1974. 344 p.

3. Forrestal M.J. [et.al] An empirical equation for penetration depth of ogive-nose projectiles into concrete targets. *International Journal of Impact Engineering*, 1994, vol. 15 (4), pp. 395-405.

4. Forrestal M.J. Tzou D.Y. A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, vol. 34 (31-32), pp. 4127-4146.

5. Sagomonyan A.Ya. Probivanie pliti tonkim tverdim snarjadom [Penetration of a slab by a thin hard shell]. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 1975, no. 5, pp. 104-110.

6. Vanichuk N.V., Ivaniva S.Y. Оптимизация формы жесткого тела, внедряющегося в сплошную среду [Shape optimization of rigid body penetrating into continuous medium]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2007, no. 69, pp. 47-58.

7. Banichuk N.V., Ivanova S.Y., Makeyev V.Y. O pronikaniy v uprugoplasticheskuyu sredu zhestkih neosesimmetrichnih tel [On penetration of rigid non-axisymmetric bodies into elastic-plastic medium]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2008, no. 70, pp. 131-139.

8. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Shape optimization of high-speed penetrators: a review. *Central European Journal of Engineering*, 2012, vol. 2 (4), pp. 473-482.

9. Honda K., Takamae G., Watanabe T. On the measurement of the resistance of shield plates to penetration by a rifle bullet. *Tohoku Imperial University. 1st Series*, 1930, vol. 19, pp. 703-725.

10. Marom I., Bodner S.R. Projectile perforation of multi-layered beams. *International Journal of Mechanical Science*, 1979, vol. 21(8), pp. 489-504.

11. Almohandes A.A., Abdel-Kader M.S., Eleiche A.M. Experimental investigation of the ballistic resistance of steel-fiberglass reinforced polyester laminated plates. *Composites. Part B*, 1996, vol. 27(5), pp. 447-458.

12. Weidemaier P., Senf H., Rothenhausler H., Filbey G.L., Gooch W.A. On the ballistic resistance of laminated steel targets: experiments and numerical calculations. *14th International Symposium on Ballistics*, Quebec, Canada, 26-29 Sept. 1993, pp. 681-690.

13. Zukas J.A., Scheffler D.R. Impact effects in multilayered plates. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, vol. 38(19), pp. 3321-3328.

14. Radchenko A.V., Radchenko P.A. Vliyanie orientatsii mekhanicheskikh svoystv kompozitsionnykh materialov na dinamicheskoe rasrusenie monolitnykh i raznesennykh pregrad [Influence of orientation of mechanical properties of composite materials on dynamic fracture of monolithic and spaced targets]. *Vichislitel'naya mekhanika sploshnih sred*, 2011, vol. 4, no. 4, pp. 97-106.

15. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Effect of air-gaps on the ballistic resistance of ductile shields perforated by nonconical impactors. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2006, vol. 1, no. 2, pp. 279-299.

16. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. The optimum arrangement of the plates in a multi-layered shield. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, vol. 37, pp. 687-696.

17. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Effect of the order of plates on the ballistic resistance of ductile shields perforated by nonconical impac-

tors. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2006, vol. 1, no. 7, pp. 1161-1177.

18. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Optimization of multi-layered metallic shield. *Nuclear Engineering and Design*, 2011.

19. Banichuk N.V., Ivanova S.Y., Makeyev V.Y., Turutko A.I. Nekotore analiticheskie i chislennye ocenki parametrov optimal'noi strukturi zashitnoi pliti [Some analytical and computational estimates of parameters of optimal protective plate structure]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. Nizhegorodskiy gosudarstvennyi universitet, 2013, vol. 75 (3), pp. 206-214.

20. Banichuk N.V., Ivanova S.Y., Makeyev V.Y. Pronikanie zhestkih udarnikov v sloistie plastini i nekotore zadachi global'noi mnogocelevoi strukturnoi optimizacii [Penetration of rigid striker in layered plates and some problems of global multipurpose structural optimization]. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. Nizhegorodskiy gosudarstvennyi universitet, 2012, vol. 74, pp. 124-133.

21. Aptukov V.N. Soprotivlenie plastin dinamicheskomu vnedreniyu zhestkih udarnikov [*Resistance of plates to dynamic penetration of the rigid strikers*]. Absrtact of the thesis of the candidate technical sciences. Permskii politekhnicheskii institut, 1979. 16 p.

22. Aptukov V.N., Petruhin G.I., Pozdeev A.A. Optimal'noe tormozhenie tverdogo tela neodnorodnoi plastinoi pri udare po normali [Optimal braking of a rigid indenter by an inhomogeneous plate at normal impact]. *Mekhanika tverdogo tela*, 1985, vol. 20 (1), pp. 165-170.

23. Aptukov V.N. Optimal'naja structura neodnorodnoi plastini s neprerivnim raspredeleniem svoistv po tolchine [Optimal Structure of Inhomogeneous Plate with Continuous Distribution of Properties over the Thickness]. *Mekhanika tverdogo tela*, 1985, vol. 20 (3), pp. 149-152.

24. Aptukov V.N., Belousov V.L., Kanibolotskii M.A. Optimizacija strukturi sloistoi pliti pri pronikanii zhestkogo udarnika [Optimization of the structure of a layered slab with the penetration of a rigid striker]. *Mekhanika kompozitnih materialov*, 1986, no. 2, pp. 252-257.

25. Fedorenko R.P. Priblizhennoe reshenie zadach optimal'nogo upravlenija [*Approximate Solution of Optimum Control Problems*]. Moscow: Nauka, 1978. 488 p.

26. Aptukov V.N., Gladkovskii V.A., Lesnichenko Y.Y. Vzaimodejstvie udarnika s pregradoi konechnoi tolchini [*Interaction striker with barrier of finite thickness*]. *Uprugoe i vjzkouprugoe povedenie materialov i konstrukcii*. Sverdlovsk, 1981, pp. 68-73.

Об авторах

Аптукнов Валерий Нагимович (Пермь, Россия) – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики Пермского государственного национального исследовательского университета (614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15, e-mail: aptukov@psu.ru).

Хасанов Артур Раисович (Пермь, Россия) – магистрант кафедры фундаментальной математики Пермского государственного национального исследовательского университета (614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15, e-mail: artur_raisovich@rambler.ru).

About the authors

Valery N. Aptukov (Perm, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department of Fundamental Mathematics, Perm State National Research University (15, Bukireva st., 614990, Perm, Russian Federation, e-mail: aptukov@psu.ru)

Artur R. Khasanov (Perm, Russian Federation) – Undergraduate Student of Department of Fundamental Mathematics, Perm State National Research University (15, Bukireva st., 614990, Perm, Russian Federation, e-mail: artur_raisovich@rambler.ru).

Получено 24.03.2014

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Аптукнов В.Н., Хасанов А.Р. Оптимизация параметров слоистых плит при динамическом проникании жесткого индентора с учетом трения и ослабляющего эффекта свободных поверхностей // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 2. – С. 48–75.

Please cite this article in English as:

Aptukov V.N., Khasanov A.R. Optimization of parameters of layered plates during dynamic hard indenter penetration with friction and weakening effect of free surfaces. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2014. No. 2. P. 48-75.