



УДК 531/534: [57+61]

ПРЫЖКИ С ШЕСТОМ: СРАВНЕНИЕ ДВУХ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Ж. Морлье, М. Менар, М. Аун, М. Сид

Laboratoire de Mécanique Physique, CNRS UMR 5469 Université Bordeaux 1, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence cedex Bordeaux, France, e-mail: m.mesnard@imp.u-bordeaux1.fr
Лаборатория механики и физики, Университет Бордо 1, Франция

Аннотация. Моделирование динамического поведения шеста является трудной задачей. Однако ее решение позволит улучшить конструкцию шеста и адаптировать его наилучшим образом для конкретного спортсмена. Целью работы является сравнение двух динамических моделей с использованием метода конечных элементов, а также реальных локальных характеристик современного шеста. В первом случае моделирование производится при наложении системы сил на верхний конец шеста. Во втором случае задается перемещение в самом верхнем узле конечно-элементной модели. Необходимые экспериментальные данные получены в условиях соревнований [9]. Анализ результатов позволяет выявить ограниченность первой модели и преимущества второй. Сравнение смоделированных и измеренных усилий в упоре верифицированы во второй модели, где задаются перемещения (модель с заданными перемещениями). Также в работе проведено исследование переноса энергии от спортсмена-шестовика к снаряду и наоборот в различных фазах прыжка.

Ключевые слова: шест, конечно-элементные модели, моделирование, динамика, сила, энергия.

ВВЕДЕНИЕ

Для оптимизации прыжка с шестом необходимо учитывать тот факт, что значительное влияние имеет взаимодействие атлета и шеста. До настоящего времени не проводилось каких-либо измерений с целью индивидуального подбора спортивного снаряда: спортсмен должен был выбирать шест из тех, которые предлагает производитель. Следовательно, необходимо построить эффективную численную модель механического поведения шеста, а далее, интегрируя энергию деформации, накопленную в шесте, оптимизировать ее в целях разработки конструкции, которая будет полностью адаптирована к потребностям конкретного атлета.

Моделированию механического поведения шеста посвящено много работ. Мак-Гиннис (McGinnis) в работе [6] представил конечно-элементную модель, предназначенную для динамического анализа конструкции шеста. В модель, разработанную в программе Абакус (Abaqus), входили шест и атлет. Для управления силами к суставам прыгуна прикладывались моменты, которые были определены в ходе обратного динамического анализа на основе видеозаписей. Однако этот метод не мог достаточно хорошо описать контакт шеста и упора. Поскольку численное решение расходилось через 0,8 с, полностью смоделировать весь прыжок она не могла. Недавно

Лундберг (*Lundberg*) и Эквад (*Ekevad*) [3, 4] усовершенствовали модель Мак-Гинниса, определив максимальные моменты.

Ограниченность построенных моделей послужила причиной разработки новой, более реалистичной динамической модели с учетом геометрии шеста. В предыдущей работе авторов [10] было определено распределение изгибных жесткостей вдоль шеста. Также была предложена идея построить корректную модель сочленения шеста и упора, а также оценить законы полета. Кроме того, учет динамики в поведении шеста позволяет ввести в модель начальные условия прыжка. Нелинейные уравнения динамики могут быть решены посредством интегрирования кинетических энергий вибрации с учетом начальных условий, таких как положение и скорость шеста.

В работе представлены результаты, полученные с помощью двух плоских динамических моделей с учетом реальных локальных характеристик современных шестов. Первое динамическое моделирование проведено при наложении системы сил к верхнему концу шеста (модель с заданными силами). Во втором – ограничение накладывается на перемещение одного из узлов (модель с заданными перемещениями). Все необходимые экспериментальные данные на основе динамического анализа были получены в предыдущей работе [7]. Сравнение двух систем позволит определить, какая из них больше подходит для решения рассматриваемой проблемы.

МЕТОД

Чтобы учесть нестационарный отклик шеста, необходимо построить адекватную динамическую модель его поведения, что позволит провести более реалистичное моделирование с учетом начальных условий, в частности начальной скорости. При динамической деформации структуры возникает три типа энергии: упругая, или потенциальная энергия деформации, энергия диссипации при демпфировании и кинетическая энергия.

Кроме того, возникает несколько типов напряжений, которые создают соответствующие виды откликов: нестационарный, гармонический, периодический, спектральный и непредсказуемый. В работах обычно рассматривается нестационарный отклик структуры. Уравнение движения демпфированной структуры и его динамического воздействия $F(t)$ может быть записано как

$$M\ddot{q} - F_a + Kq = F(t), \quad (1)$$

где q – вектор узловых перемещений, M – матрица масс, K – матрица жесткости, F_a – коэффициент демпфирования.

При нестационарном отклике находятся узловые перемещения при воздействии $F(t)$. Решение системы зависит от начальных условий, то есть начальных перемещений q_0 и начальных скоростей $\dot{q}_0$. Слагаемое F_a пропорционально узловой скорости, и его выражение зависит от типа демпфирования.

Решение нестационарной задачи может быть получено с помощью двух методов интегрирования:

- 1) прямой метод (пошаговое интегрирование уравнений движения);
- 2) метод модальной суперимпозиции.

При втором методе уравнения движения проецируются на модальный базис и затем интегрируются. Ограничивая отклик структуры до первой моды (модальная суперимпозиция), можно сократить число уравнений для интегрирования. Однако этот метод не подходит для описания сложных ударных возмущений. С помощью метода можно определить линейный отклик. Прямое интегрирование – более общий метод, в котором учитывается силовое периодическое воздействие, приложенное к структуре.

Схемы Ньюмарка и Гильберта–Хьюза–Тейлора используются в компьютерных программах чаще других численных методов с прямым методом интегрирования.

В методе Гильберта–Хьюза–Тейлора используется интегрирование по времени согласно схеме Ньюмарка с модификациями, предложенными Гильбертом, Хьюзом и Тейлором. Эти модификации заключаются в том, что строится матрица итераций S , которая объединена с матрицей масс, жесткости и демпфирования. Матрица S вычисляется в ходе каждой итерации по схеме Ньюмарка, что позволяет учесть геометрическую жесткость структуры.

Метод, использованный для моделирования динамического поведения шеста, значительно отличается от методов Мак-Гинниса и Лундберга. Предложенная модель дает более полное решение, которое описывает поведение шеста и динамическое воздействие атлета во время прыжка.

Динамический изгибающий момент, соответствующий полученному в ходе эксперимента, заменяет модель атлета.

Плоское моделирование динамического поведения шеста достаточно, поскольку квазиплоское движение уже исследовано [9]. Моделирование было проведено с использованием программного продукта *Mecano* компании *Samtech*.

Сначала шест длиной 4,95 м был разбит на двадцать балочных элементов с учетом больших перемещений и больших углов поворота. Были использованы характеристики стандартного эпоксидного стекла (композитный материал) (модуль упругости – 45 ГПа; модуль сдвига – 4,5 ГПа; коэффициент Пуассона – 0,6; плотность – 1900 кг/м³) для задания механических свойств шеста.

Из предыдущей работы [9] по исследованию жесткости изогнутого шеста были взяты его локальные характеристики, представленные в таблице. Внешний и внутренние радиусы элемента обозначаются R_{ext} и R_{int} соответственно.

Геометрические характеристики структуры

Элемент	R_{ext} (см)	R_{int} (см)
1	1,734	1,604
2	1,750	1,610
3	1,751	1,612
4	1,773	1,619
5	1,788	1,622
6	1,819	1,624
7	1,844	1,625
8	1,859	1,631
9	1,876	1,632
10	1,879	1,631
11	1,879	1,634
12	1,885	1,638
13	1,887	1,640
14	1,893	1,645
15	1,887	1,649
16	1,872	1,652
17	1,848	1,652
18	1,834	1,656
19	1,813	1,657
20	1,851	1,663

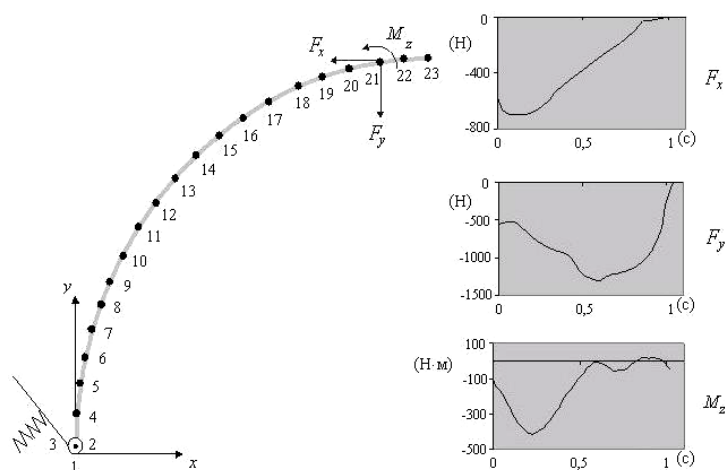


Рис. 1. Конечно-элементная модель. Результаты, полученные с помощью модели с заданными силами

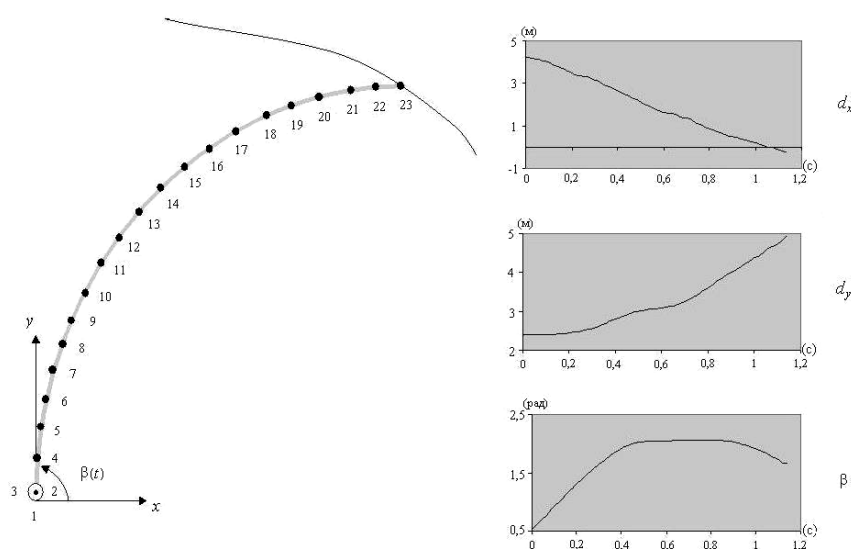


Рис. 2. Конечно-элементная модель. Результаты, полученные по модели с заданным перемещением

Соединение между нижним концом шеста и упором (т.е. между фиксированным узлом и первым узлом шеста) моделировалось одной степенью свободы вращения. Для реализации контакта упора и шеста (с углом в 120°) в мнимый узел была помещена пружина, которая, во-первых, осуществляет управление углом поворота. Во-вторых, при значительной жесткости, моделирующей контакт, численное решение устойчиво. В-третьих, гаситель удара моделирует трение шеста. Для дискретизации структуры и задания начального угла первого элемента, определенного экспериментально, были использованы полярные координаты.

Модель атлета была построена с помощью полного описания его движения в системе отсчета, в которой горизонтальная ось обозначена x , а вертикальная – y . Модель была построена при наложении в узле 21 изгибающего момента, эквивалентного возникающему в процессе движения. Этот узел находится посередине хвата руками за шест (рис. 1).

Начальное положение и начальная скорость необходимы для моделирования поведения динамики шеста. Начальные условия были определены в результате оптических измерений:

- 42° – начальный угол нижнего конца шеста;
- $-6,5$ м/с – начальная скорость по оси x в узле 21;
- $1,5$ м/с – начальная скорость по оси y в узле 21.

В первом случае моделирования динамического поведения задавались усилия (модель с заданными усилиями).

Во втором случае задавались перемещения (модель с заданными перемещениями). Модель была получена для того же шеста и с тем же соединением с упором. На верхнем конце шеста (узел 23) задавались перемещения, а в первом узле – угол поворота.

Перемещения верхнего конца (измеренные с использованием трехмерного оптического устройства) в направлениях x и y были заданы для верхнего узла модели. Также был задан угол поворота шеста в упоре соединения, полученный в результате экспериментальных исследований. На рис. 2 показаны перемещения, заданные в численной модели.

На основе экспериментальных измерений в узле 23 задали начальную скорость -8 м/с по оси x и 1 м/с по оси y для определения начальной скорости структуры.

РЕЗУЛЬТАТЫ

В первом случае моделирования (модель с заданными силами) брался изгибающий момент, эквивалентный определенному экспериментально. Вычисление начальных статических деформаций позволило описать состояние структуры при начальных нагрузках. Модель с заданными силами была очень чувствительна к параметрам – она не позволяла смоделировать все деформации шеста. Численное решение расходилось через $0,8$ с после отрыва спортсмена с шестом от земли. Тем не менее некоторые результаты могут быть проанализированы. Траектории верхнего конца шеста, так же как изменение угла поворота нижнего конца шеста, были смоделированы, а затем было произведено их сравнение с измеренными значениями.

На рис. 3 представлено сравнение смоделированной и полученной экспериментально траекторий верхнего конца шеста. Можно наблюдать хорошую корреляцию эксперимента и модели в направлении оси x , тогда как в направлении оси y наблюдаются значительные расхождения.

Изменение угла было смоделировано точно, и модель, связывающая шест с упором, кажется адекватной (рис. 4). В заключение модель с заданными силами продемонстрировала значительную ограниченность, так как не позволяла полностью провести моделирование всего прыжка.

Далее была построена модель с заданными перемещениями, которая показала себя менее чувствительной к начальным условиям. Поэтому эти результаты удобнее для использования. Моделирование выполнялось для того же шеста с использованием тех же данных. Чтобы верифицировать модель, были смоделированы усилия в упоре, а затем произведено их сравнение с измерениями, выполненными с использованием датчика, расположенного на упоре [8] в направлении оси x .

Заметим что, экспериментальные значения довольно хорошо коррелируют с смоделированными (рис. 5), и небольшие различия можно объяснить точностью экспериментальных данных, которые включают в себя измерение перемещения самой верхней точки. Еще один фактор, влияющий на погрешность: условия контакта различны в реальной динамической ситуации.

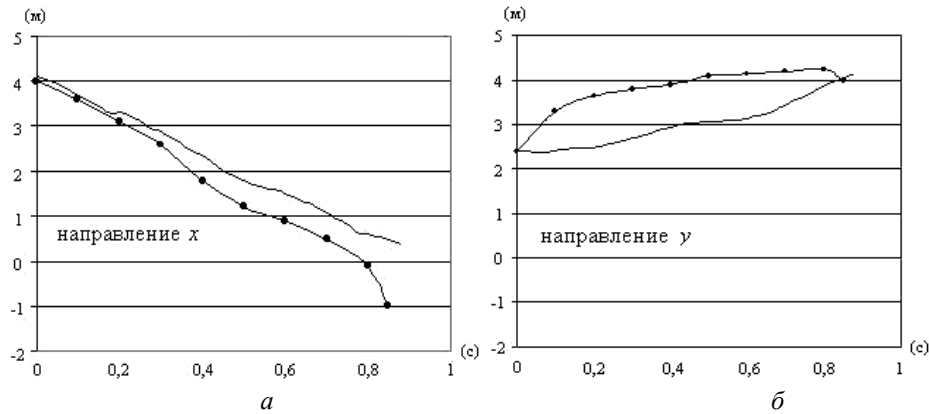


Рис. 3. Измеренные (—) и полученные по модели с заданными силами (•) траектории узла 23

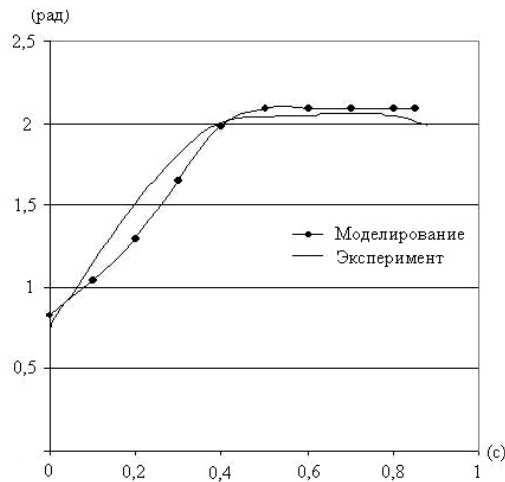


Рис. 4. Измеренные и полученные по модели с заданными силами углы поворота

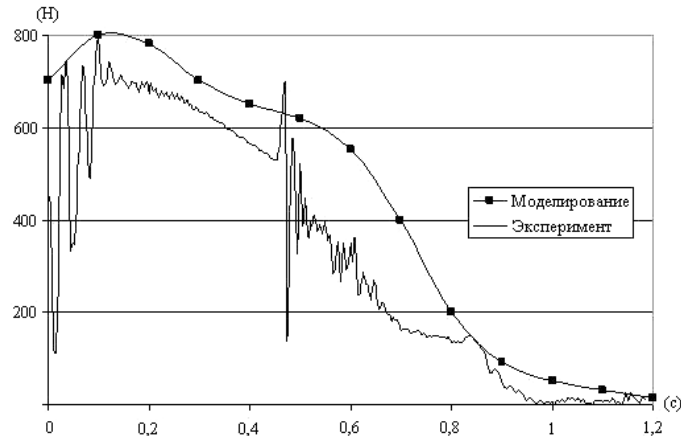


Рис. 5. Измеренные и полученные по модели с заданным перемещением усилия в упоре в направлении оси x

ОБСУЖДЕНИЕ

Для адекватного динамического моделирования прыжка с шестом

- модель должна в точности воспроизводить поведение шеста в упоре;
- необходимо учитывать усилия, передаваемые атлетом на шест;
- необходимо знать начальные условия прыжка.

Было показано, что метод с заданными силами неустойчив, поэтому результаты, полученные с его помощью, не удовлетворительны для использования. Ограниченность

модели заключается в чувствительности к следующим параметрам: силы, моменты, начальные угол и скорость. В действительности лишь некоторые вычислительные эксперименты позволяют вычислить деформации шеста за значительный промежуток времени.

Кроме того, численные методы динамического расчета кажутся более приспособленными для моделирования механических систем с заданными перемещениями. Модель с заданными перемещениями всегда показывает согласующиеся друг с другом результаты; в частности, метод был использован в работах для моделирования удара в гольфе [1, 5], что стимулировало данное исследование.

Модель с заданными перемещениями дает интересные результаты, и она менее чувствительна к начальным параметрам. Результаты расчетов кинетической и потенциальной энергии структуры представлены на рис. 6.

Анализ кинетической энергии шеста показывает сильное замедление спортивного снаряда после помещения его в упор. Затем кинетическая энергия остается малой. Колебания шеста кажутся незначительными, в то время как большая часть энергии, накопленной в шесте, является упругой.

Как и в случае кинетической энергии, изменение потенциальной энергии шеста связано с деформацией. Потенциальная энергия максимальна, когда шест согнут ($t = 0,5$ с). Максимальная величина упругой потенциальной энергии (1100 Дж) на 23% больше значения, полученного с помощью статической модели [2], которая не учитывает начальные условия и эффект массы.

Интересно сравнить кинетическую энергию прыгуна с шестом, используемую в модели в качестве начального условия, с упругой потенциальной энергией структуры. На рис. 7 представлены данные, которые согласуются с результатами, приведенными в работе [11]. В частности, максимум упругой потенциальной энергии шеста достигает 14 Дж/кг.

В первой фазе прыжка (взлет и прогибание) кинетическая энергия спортсмена с шестом (массой 75 кг) быстро уменьшается, преобразуясь в упругую энергию шеста. Тем не менее, изменение кинетической энергии происходит на -1800 Дж (-24 Дж/кг), в то время как шест накапливает только -1100 Дж (-14 Дж/кг) в качестве упругой энергии деформации. При начальном ударе шеста было потрачено 100 Дж. Только 66% кинетической энергии прыгуна передается к шесту и 61% энергии сохраняется в шесте. В ходе второй фазы прыжка (вылет, переход планки и отпускание шеста) 72% упругой потенциальной энергии (800 Дж, 11 Дж/кг) затрачено на перелет спортсмена через перекладину.

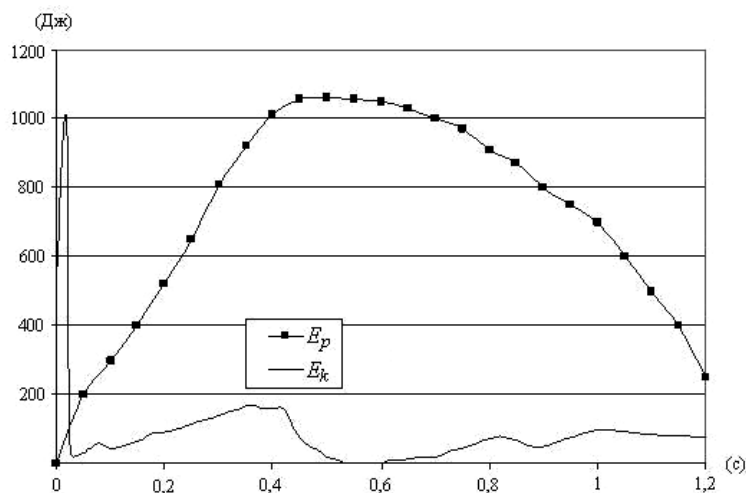


Рис. 6. Изменения кинетической (E_k) и потенциальной энергии (E_p), полученные по модели с заданным перемещением

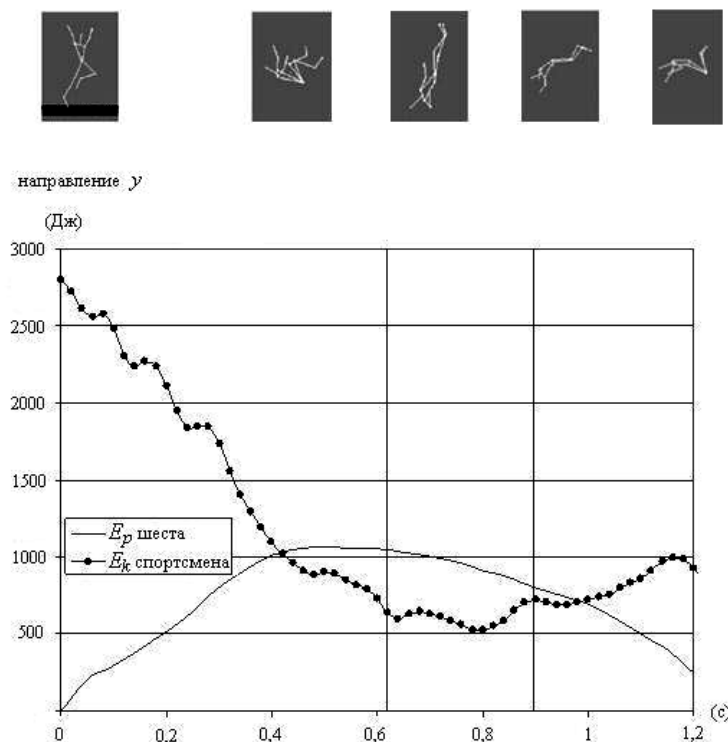


Рис. 7. Изменение кинетической энергии (E_k) прыгуна и упругой потенциальной энергии (E_p) шеста

Таким образом, в работе было проведено моделирование прыжка с шестом. Рассматриваемая модель полезна тем, что учитывает взаимодействие между атлетом и шестом. Модель, предложенная Мак-Гиннисом, довольно интересна, однако она будет более правдоподобной, если осуществлять управление перемещениями, задавая поворот суставов вместо суставных моментов. В представленной модели также учитывается поведение шеста в упоре. Кроме того, еще необходимо рассмотреть удар при постановке шеста в упор.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морлье, Ж. Динамический анализ удара при игре в гольф: анализ изгибающего момента при ударе / Ж. Морлье, М. Менар, М. Сид // Российский журнал биомеханики. – 2007. – Т. 11, № 1. – С. 36–44.
2. Dapena, J. Use of separate hand location to calculate ground reaction force exerted on a vaulting pole / J. Dapena, T. Braff // Medicine and Science in Sport and Exercise. – 1985. – Vol. 15. – P. 313–318.
3. Ekevad, M. Simulation of “smart” pole vaulting / M. Ekevad, B. Lundberg // Journal of Biomechanics. – 1995. – Vol. 28. – P. 1079–1090.
4. Ekevad, M. Influence of pole length and stiffness on the energy conversion in pole-vaulting / M. Ekevad, B. Lundberg // Journal of Biomechanics. – 1997. – Vol. 30. – P. 259–264.
5. Friswell, M.I. Dynamic models of golf clubs / M.I. Friswell, J.E. Mottershead // Sports Engineering. – 1998. – Vol. 1. – P. 41–46.
6. McGinnis, P.M. The inverse dynamics problem in pole vaulting / P.M. McGinnis // Medicine and Science in Sports and Exercise. – 1984. – Vol. 15. – P. 112.
7. Mesnard, M. An essential performance factor in pole vaulting / M. Mesnard, J. Morlier, M. Cid // C.R. Mecanique. – 2007. – Vol. 335. – P. 382–387.
8. Morlier, J. Three-dimensional analysis of the angular momentum of a pole-vaulting / J. Morlier, M. Cid // Journal of Biomechanics. – 1996. – Vol. 29. – P. 1085–1090.
9. Morlier, J. Influence of the moment exerted by the athlete on the pole in pole-vaulting performance / J. Morlier, M. Mesnard // Journal of Biomechanics. – 2007. – Vol. 40. – P. 2261–2267.
10. Morlier, J. Pole-vaulting: identification of the pole local bending rigidities by an updating technique / J. Morlier, M. Mesnard, M. Cid // Journal of Applied Biomechanics. – 2008. – Vol. 24. – P. 140–148.
11. Schade, F. Reproducibility of energy parameters in the pole vault / F. Schade, A. Arampatzis, G.P. Bruggemann // Journal of Biomechanics. – 2006. – Vol. 39. – P. 1464–1471.

POLE-VAULTING: A COMPARISON OF TWO DYNAMIC FINITE ELEMENT MODELS

J. Morlier, M. Mesnard, M. Aoun, M. Cid (Bordeaux, France)

The modelling of the pole dynamic behaviour is a complex study. However, it is necessary for the pole design and its perfect adaptation to the athlete. The aim of this paper is to present two dynamic simulations using finite elements and integrating the real local characteristics of a recent pole. The first simulation is carried out by imposing a system of forces at the higher end of the pole. The second simulation is performed by imposing a displacement of the highest node of the structure. The necessary experimental data come from experiments which were carried out in the real competition conditions [8]. The result analysis makes it possible to propose the limitations of the first model and the advantages of the second one. The comparison of the simulated and measured efforts in the pole-vault box validates the model which imposes the displacement (displacement controlled model). A study of the energy transfers between the athlete and the structure is carried out for various phases of the jump.

Key words: pole, finite element models, simulation, dynamics, force, energy.

Получено 16 марта 2009