

УДК 531/534: [57+61]

О ДЕФОРМАЦИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ЗАПОЛНЕННОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ КРУГОВОГО РАСТЯЖЕНИЯ ПО ЭКВАТОРУ

А.С. Типясев

Кафедра теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета, Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский проспект, 28, e-mail: albrt@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена задача о деформации сферической оболочки постоянной толщины, заполненной несжимаемой жидкостью, находящейся под давлением, при воздействии растягивающих или сжимающих сил, действующих по экватору. Исследовано изменение внутреннего давления при экваториальном растяжении или сжатии. Полученные результаты представляют интерес при оценке изменения давления внутри капсулы хрусталика глаза в процессе аккомодации, а также при оценке изменения внутриглазного давления при воздействии глазных мышц.

Ключевые слова: биомеханика глаза, сферическая оболочка, внутриглазное давление, хрусталик, аккомодация.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе при помощи пакета МКЭ *ANSYS* строится модель сферической трансверсально-изотропной оболочки, заполненной несжимаемой жидкостью и деформируемой экваториальными силами. Расчеты для мягкой оболочки проводились также по безмоментной теории оболочек. Далее рассматривается оболочка с характеристиками хрусталика глаза человека и исследуется изменение давления жидкости внутри хрусталика при аккомодации. Используется упрощенная модель хрусталика (как и в работах [4, 6]), не учитывающая влияние на него стекловидного тела.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривалась деформация мягкой сферической оболочки с радиусом нейтральной поверхности r_0 , толщиной h_0 (рис. 1).

Положение точки на срединной поверхности оболочки до деформации определяется в силу симметричности одной координатой – углом φ , после деформации – двумя координатами: $r(\varphi)$ – расстоянием деформированного элемента оболочки от оси симметрии и $\psi(\varphi)$ – углом между нормалью к элементу деформированной оболочки и осью x (рис. 2).

Обозначим деформацию и кривизну оболочки в направлении $r = \text{const}$ как ε_χ и ρ_χ соответственно. Обозначим деформацию и кривизну оболочки в направлении $\chi = \text{const}$ как ε_r и ρ_r . Имеют место следующие соотношения [2]:

$$\varepsilon_\chi = \frac{r}{r_0 \cos(\varphi)} - 1, \quad \rho_\chi = \frac{\cos(\psi)}{r}, \quad \varepsilon_r = -\frac{dr}{r_0 \sin(\psi) d\varphi} - 1, \quad \rho_r = -\frac{d\psi}{dr} \sin(\psi). \quad (1)$$

Уравнения равновесия элемента оболочки в направлении нормали к поверхности оболочки и меридиана $\chi = \text{const}$ имеют вид

$$\rho_\chi \varepsilon_\chi + \rho_r \varepsilon_r = \frac{p}{Eh_0} (1 - \nu), \quad \frac{d}{d\psi} (\varepsilon_r r) = \varepsilon_\chi \frac{dr}{d\psi}, \quad (2)$$

где E – модуль упругости оболочки в тангенциальном направлении.

Подставляя соотношения (1) в уравнения (2), после преобразований получим следующие уравнения:

$$\frac{\cos(\psi)}{r_0 \cos(\varphi)} - \frac{\cos(\psi)}{r} + \frac{\psi'}{r_0} + \frac{\psi'}{r'} \sin(\psi) = \frac{p}{Eh_0} (1 - \nu), \quad \left(\frac{rr'}{\sin(\psi)} \right)' = -\frac{rr'}{\cos(\varphi)}. \quad (3)$$

Решение данной системы дифференциальных уравнений с граничными условиями

$$r(0) = R, \quad r(\pi/2) = 0, \quad \psi(\pi/2) = \pi/2$$

проводилось численным методом при помощи математического пакета *Mathematica 4.0*.

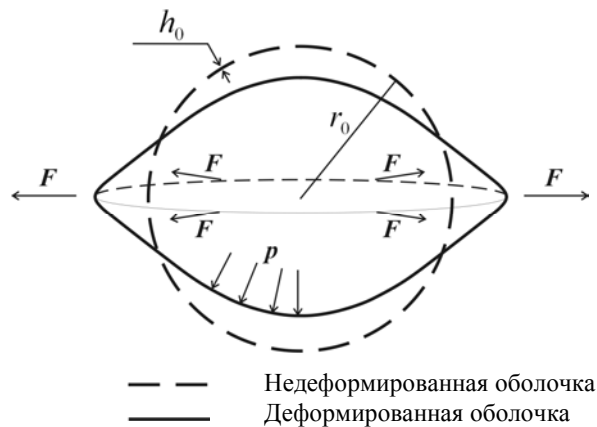


Рис. 1. Модель оболочки

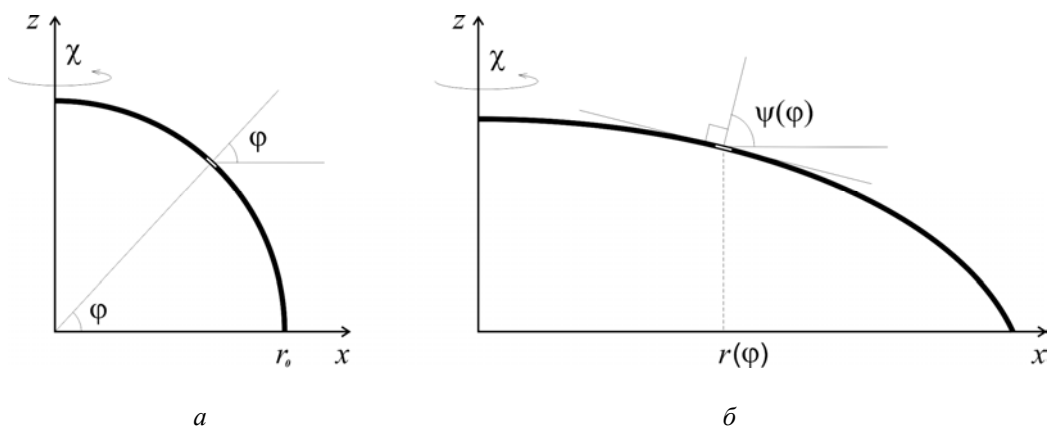


Рис. 2. Постановка задачи: а – оболочка до деформации, б – оболочка после деформации

Здесь R – радиус оболочки в экваториальной плоскости действия сил в деформированном состоянии.

Задача сохранения постоянного внутреннего объема оболочки решалась следующим образом. Задавалась деформация оболочки либо прикладывалась экваториальная растягивающая сила, а затем методом итераций подбиралось внутреннее давление, необходимое для поддержания постоянного объема. Решение этой задачи проводилось также при помощи пакета МКЭ *ANSYS*. Оболочка рассматривалась как осесимметричное $2D$ тело вращения.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА И ВЫВОДЫ

Для трансверсально-изотропной оболочки, у которой модуль упругости в направлении толщины значительно меньше тангенциальных модулей упругости, оба варианта решения данной задачи дают близкие результаты. При различных параметрах погрешность не превышает 10% (рис. 3). Здесь по оси x откладывается величина $r' = R/r_1$ – относительное изменение радиуса в экваториальной плоскости приложения сил, r_1 – радиус растянутой только внутренним давлением жидкости оболочки. По оси y откладывается нормированное давление p' , которое связано с обычным давлением по формуле $p' = \frac{5r_0}{3h_0E} p$.

Поскольку модель, построенная в пакете *ANSYS*, учитывает моменты, возникающие в оболочке, т.е. учитывает краевой эффект, который «помогает» давлению сохранять постоянный объем (рис. 4), давление в данном случае оказалось ниже, чем для безмоментного аналитического решения.

Хрусталик приближенно представляет собой тонкую сферическую оболочку.

В работах [3, 5, 7] представлены следующие данные для глаза человека в возрасте 30 лет: $E = 1,27 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,47$. Толщина оболочки (капсулы хрусталика) h_0 по поверхности неоднородна, но можно приближенно считать ее равной 0,02 мм [4]. Диаметр хрусталика у разных людей колеблется от 6 до 7 мм. Для проведения расчетов необходимо представлять и величину начального внутреннего давления. Достоверные данные на этот счет отсутствуют.

Давление, мм рт. ст.

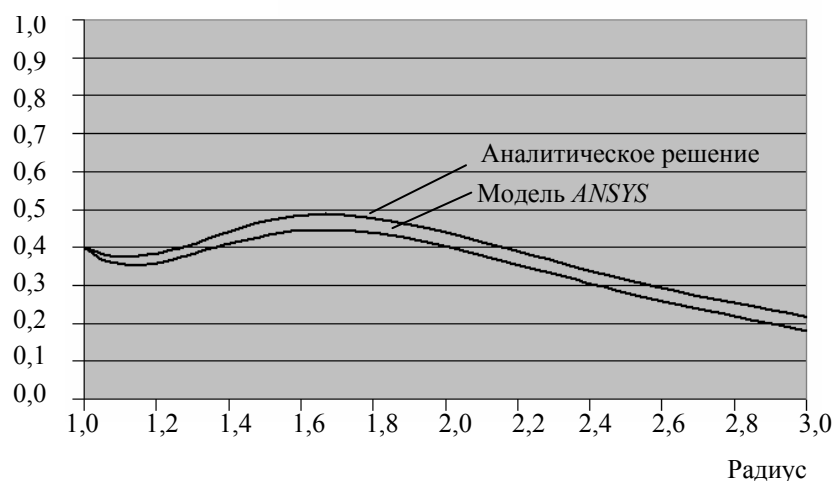


Рис. 3. Сравнение полученных результатов

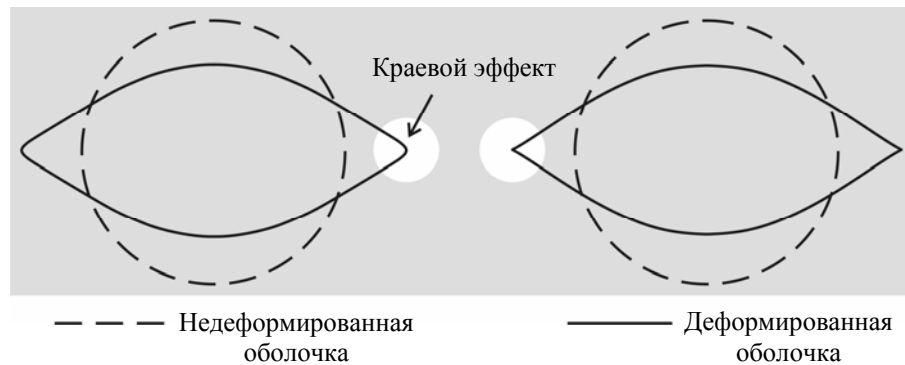


Рис. 4. Влияние краевого эффекта на форму деформации: *a* – модель ANSYS, *б* – безмоментная оболочка

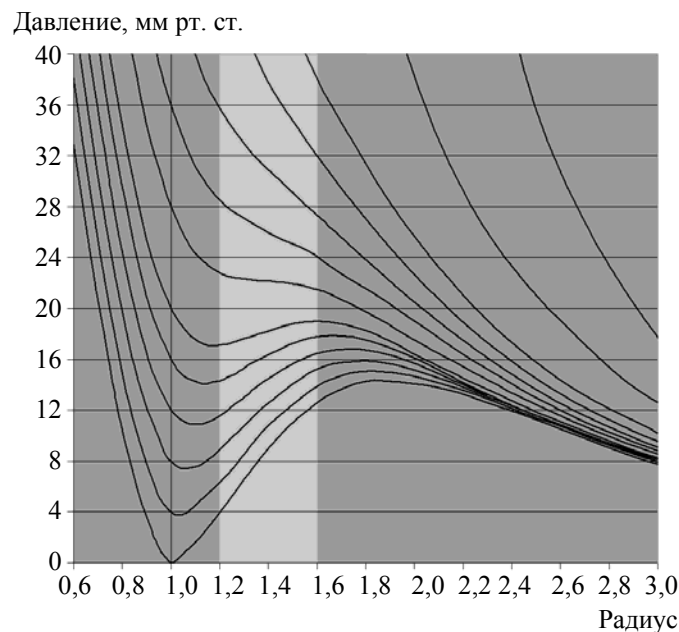


Рис. 5. Результаты для различных начальных данных

Давление можно выразить через начальное растяжение капсулы хрусталика $\varepsilon = \frac{r_1}{r_0} - 1$, воспользовавшись формулой Лапласа $p = \frac{2Eh}{1-\nu} \frac{\varepsilon}{r_1}$.

Решения задачи для различных начальных значений внутреннего давления представлены на рис. 5.

При приложении сжимающей силы ($r' < 1$) давление возрастает независимо от начального внутреннего давления жидкости и его рост значителен уже при небольших деформациях оболочки. Если величина относительной деформации r' близка к 0,9, наблюдается практически линейный рост давления относительно величины деформации. Это согласуется с результатами, полученными в [1].

Если $r' > 1$, то величина внутреннего давления зависит от начального внутреннего давления жидкости. Если $p(1) < 24$ мм рт. ст., то давление при приложении экваториальной растягивающей силы сначала незначительно падает и, достигая минимума, начинает снова расти, а после этого, достигая максимума, давление вновь падает, стремясь к нулю. Если начальное давление $p(1) \geq 24$ мм рт. ст., то при растяжении оболочки экваториальной силой давление сразу начинает падать, стремясь к нулю.

Полученная зависимость позволяет описать изменение давления при аккомодации. Аккомодацией глаза называется процесс настройки его фокусного расстояния, позволяющий получить резкое изображение близлежащих объектов на сетчатке глаза. В данном случае форма линзы близка к сферической.

В состоянии, когда аккомодация отсутствует, линза уплощается под действием пассивного натяжения волокон пояса, которые натягиваются упругими составляющими сосудистой оболочки глаза.

Для наиболее актуальных величин относительных деформаций хрусталика 1,2–1,6 (выделено светлой полосой на рис. 5) можно сделать вывод о том, что при начальном давлении в хрусталике до 24 мм рт. ст. с ростом деформации внутреннее давление возрастает. При давлении в хрусталике более 24 мм рт. ст. с ростом деформации внутреннее давление может падать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бауэр, С.М. Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии / С.М. Бауэр, Б.А. Зимин, П.Е. Товстик. – СПб: Изд-во СПбГУ, 2000. – 92 с.
2. Бидерман, В.Л. Механика тонкостенных конструкций / В.Л. Бидерман. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
3. Alphen, G.W.H.M. Elasticity of tissues involved in accommodation / G.W.H.M van Alphen, W.P. Graebel // Vision Research. – 1991. – No. 31(7/8). – P. 1417–1438.
4. Burd, H.J. Numerical modelling of the accommodating lens / H.J. Burd, S.J. Judge, J.A. Cross // Vision Research. – 2002. – Vol. 42. – P. 2235–2251.
5. Fisher, R.F. The elastic constants of the human lens capsule / R.F. Fisher // Journal of Physiology. – 1969. – Vol. 201. – P. 1–19.
6. Harvey, J.B. Mechanics of accommodation of the human eye / J.B. Harvey, J.J. Stuart, M.J. Flavell // Vision Research. – 1999. – Vol. 39. – P. 1591–1595.
7. Krag, S. Biomechanical characteristics of the human anterior lens capsule in relation to age / S. Krag, T. Olsen, T.T. Andreassen // Investigative Ophthalmology and Visual Science. – 1997. – No. 38 (2). – P. 357–363.

ON THE DEFORMATION OF A SPHERICAL SHELL FILLED WITH AN INCOMPRESSIBLE LIQUID UNDER CIRCULAR STRETCHING ALONG THE EQUATOR

A.S. Tipysev (St. Petersburg, Russia)

The deformation of a spherical shell of the constant thickness filled with an incompressible liquid under pressure and the stretching or compression circular forces acting along the equator is considered. The effect of the equatorial stretching or compression on the internal pressure is examined. The obtained results are important for the estimating of the pressure changes inside the lens of the eye during accommodation, and also of the influence of the eye muscles on the intraocular pressure.

Key words: eye biomechanics, spherical shell, intraocular pressure, lens, accommodation.

Получено 14 марта 2008