Российский журнал биомеханики, 2008, том 12, № 1: 59–68

Российский Журнал Биомеханики
www.biomech.ru

УДК 531/534: [57+61]

КИНЕМАТИКА ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ КОЛЕННОГО СУСТАВА ЧЕЛОВЕКА (СКОЛЬКО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ИМЕЕТ КОЛЕННЫЙ СУСТАВ?)

М.Л. Иоффе

27A 2-я Авеню 29, кв. 444, Нью-Йорк, NY 10010, США, e-mail: mioffe@egartech.com

Аннотация. На основе рассматриваемых в теоретической механике моделей в статье делается попытка построить кинематическую модель плоского движения коленного сустава и, в частности, ответить на вопрос, сколько степеней свободы имеет коленный сустав человека. Принимается, что движение с интересующей нас кинематической точки зрения можно рассматривать как движение одного твердого тела, бедра, по поверхности другого твердого тела, большеберцовой кости. Передняя и задняя крестообразные связки из-за своей нерастяжимости накладывают дополнительные ограничения на движение.

Ключевые слова: кинематика, коленный сустав человека, плоское движение, число степеней свободы.

Делается попытка построить кинематическую модель коленного сустава, взяв за основу рассматриваемые в теоретической механике, в ее разделе кинематика, простейшие модели материальной точки, нерастяжимой нити и абсолютно твердого тела. На первый взгляд, в такой постановке задача кажется тривиальной. Действительно, в простейшем виде движение в коленном суставе, то есть перемещение бедра относительно большеберцовой кости, является плоским вращением вокруг некоторой фиксированной в пространстве оси, перпендикулярной саггитальной плоскости. Таким образом, на первый взгляд, коленный сустав выглядит как простой плоский шарнир. На самом деле все обстоит намного сложнее, и коленный сустав является одним из наиболее сложных суставов.

Анатомически колено состоит из четырех костей (рис. 1). Бедренная кость с помощью связок и капсулы прикрепляется к большеберцовой кости. Несколько ниже и параллельно большеберцовой кости находится малоберцовая кость. Наконец, закрывает коленный сустав коленная чашечка. С интересующей нас кинематической точки зрения движение в коленном суставе можно рассматривать как движение одного твердого тела, бедренной кости, по поверхности другого твердого тела, большеберцовой кости. Для описания кинематики относительного движения двух поверхностей мы, естественно, должны знать формы этих поверхностей.

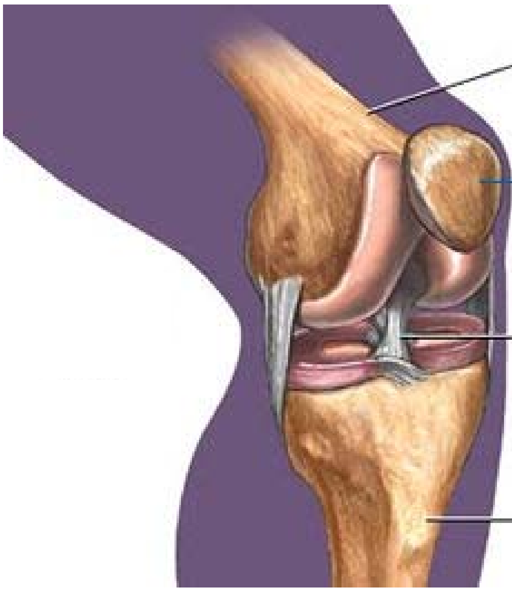

Рис. 1. Схематическое изображение основных элементов коленного сустава

В соответствии с рис. 2, где приведены изображения компонентов протеза коленного сустава, можно принять, что поверхность большеберцовой кости, по которой движется поверхность бедренной кости, является плоскостью, а поверхность бедренной кости состоит из двух пересекающихся сфер с радиусом R. Свяжем с плоскостью поверхности большеберцовой кости неподвижный ортогональный декартов трехгранник $OXYZ$, неподвижную систему координат (см. рис. 3). Начало системы координат (точка O) расположено в плоскости поверхности большеберцовой кости. Ось OX перпендикулярна саггитальной плоскости, ось OZ направлена вертикально вверх, а ось OY направлена так, чтобы трехгранник $OXYZ$ был правым. Свяжем с бедренной костью подвижный ортогональный декартов трехгранник O_1xyz. Начало трехгранника (точка O_1) расположено посредине между двумя центрами поверхностей сфер. Ось O_1x проходит через прямую, соединяющую центры сфер. В начальном (выпрямленном) положении коленного сустава оси O_1xyz параллельны осям трехгранника $OXYZ$. В декартовой системе координат O_1xyz уравнения поверхностей пересекающихся сфер, образующих поверхность бедренной кости, имеют вид

$$(x-\delta)^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$
$$(x+\delta)^2 + y^2 + z^2 = R^2, \tag{1}$$

где δ – расстояние от начала координат до центра сферы.

Очевидно, что линия пересечения сфер, окружность, лежит в плоскости $x = 0$. Введем сферические криволинейные координаты по формулам

$$x = \rho\sin\varphi, \qquad y = \rho\cos\varphi\cos\lambda, \qquad z = \rho\cos\varphi\sin\lambda,$$
$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \le \lambda < 2\pi. \tag{2}$$

В криволинейных сферических координатах ρ, φ, λ уравнение дистальной поверхности бедренной кости имеет вид

$$\rho = \delta\left|\sin\varphi\right| + \sqrt{R^2 - \delta^2\cos^2\varphi}\,. \tag{3}$$

Рис. 2. Фотографии компонентов протеза коленного сустава: бедренный компонент (вверху) и большеберцовый компонент (внизу)

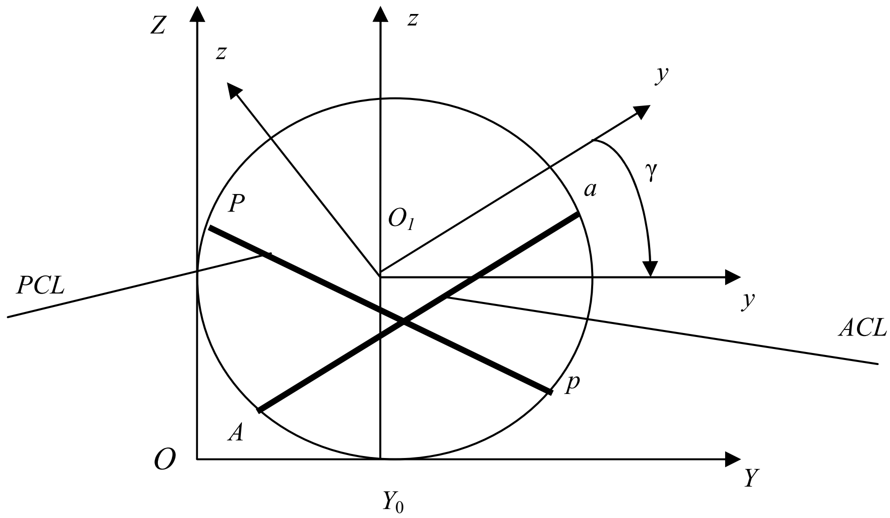

Рис. 3. Основные координатные трехгранники, кинематические и геометрические параметры плоского движения; O – начало неподвижной системы координат; O_1 – начало подвижной системы координат; OY, OZ – оси неподвижной системы координат; O_1y, O_1z – оси подвижной системы координат; γ – угол поворота подвижной системы координат относительно неподвижной; PCL – задняя крестообразная связка с точками крепления P, p; ACL – передняя крестообразная связка с точками крепления A, a

При движении в коленном суставе бедра относительно голени координаты произвольной точки бедра в неподвижной системе координат $OXYZ$, то есть величины

X, Y, Z, связаны с координатами этой же точки x, y, z в подвижном трехграннике O_1xyz уравнением

$$(X, Y, Z) = (X_0, Y_0, R) + (x, y, z)\, T_{X/x}, \tag{4}$$

где X_0, Y_0 – координаты начала подвижного трехгранника; $T_{X/x}$ – матрица направляющих косинусов углов между осями подвижного и неподвижного трехгранников. Девять направляющих косинусов, составляющих матрицу, очевидно, не являются независимыми, поскольку матрица является ортогональной, то есть обратная к ней является транспонированной. В общем случае таких независимых параметров всего три. В качестве наиболее распространенных параметров можно указать, например, на углы Эйлера. В рассматриваемом в данной работе случае, поскольку поверхность бедра находится в постоянном контакте с плоскостью голени, матрица $T_{X/x}$ определяется двумя параметрами, углами φ, γ.

$$T_{X/x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\cos\gamma & \sin\varphi\sin\gamma \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\cos\gamma & \cos\varphi\sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Таким образом, необходимость постоянного контакта приводит к тому, что коленный сустав обладает четырьмя степенями свободы, то есть положение бедра как абсолютно твердого тела относительно голени определяется четырьмя параметрами: двумя линейными координатами X_0, Y_0 и двумя угловыми координатами φ, γ. Из шести степеней свободы, которыми обладает твердое тело, отнимаются две: поступательное перемещение вдоль оси OZ и вращательное движение, при котором одна из сфер, составляющих поверхность бедра, выходит из горизонтальной плоскости. Строго говоря, в рассматриваемой схеме у бедра остается возможность движения вверх, в сторону увеличения координаты Z. Для устранения такой возможности в коленном суставе имеются передняя и задняя крестообразные связки. Следуя описываемому в литературе подходу, в статье предположим, что в процессе движения коленного сустава длина связок не меняется. Поскольку один конец связки закреплен на неподвижном теле, а другой на подвижном, их наличие приводит к появлению двух ограничений, которым должны удовлетворять рассматриваемые выше четыре степени свободы. Эти ограничения выражаются уравнениями

$$\begin{gathered} (X_{ACL} - X_{ACL}(t))^2 + (Y_{ACL} - Y_{ACL}(t))^2 + (Z_{ACL} - Z_{ACL}(t))^2 = L^2, \\ (X_{PCL} - X_{PCL}(t))^2 + (Y_{PCL} - Y_{PCL}(t))^2 + (Z_{PCL} - Z_{PCL}(t))^2 = L^2, \end{gathered} \tag{6}$$

где $X_{ACL}, Y_{ACL}, Z_{ACL}$ – координаты конца передней крестообразной связки, закрепленного на голени, в неподвижной системе координат; $X_{ACL}(t), Y_{ACL}(t), Z_{ACL}(t)$ – координаты конца передней крестообразной связки, закрепленного на бедре, в неподвижной системе координат; $X_{PCL}, Y_{PCL}, Z_{PCL}$ – координаты конца задней крестообразной связки, закрепленного на голени, в неподвижной системе координат; $X_{PCL}(t)$, $Y_{PCL}(t)$, $Z_{PCL}(t)$ – координаты конца задней крестообразной связки, закрепленного на бедре, в неподвижной системе координат; L – длина связки.

Переменные во времени координаты $X_{ACL}(t), Y_{ACL}(t), Z_{ACL}(t)$ и $X_{PCL}(t), Y_{PCL}(t), Z_{PCL}(t)$ с помощью уравнения (4) можно выразить через четыре параметра (степени свободы), определяющие движение коленного сустава, уравнением

$$(X_{ACL}(t), Y_{ACL}(t), Z_{ACL}(t)) = (X_0, Y_0, R) + (x_{ACL}, y_{ACL}, z_{ACL}) T_{X/x},$$
$$(X_{PCL}(t), Y_{PCL}(t), Z_{PCL}(t)) = (X_0, Y_0, R) + (x_{PCL}, y_{PCL}, z_{PCL}) T_{X/x}. \qquad (7)$$

Постоянные величины $x_{ACL}, x_{ACL}, x_{ACL}$ и $x_{PCL}, x_{PCL}, x_{PCL}$ определяют точки крепления связок в подвижном трехграннике O_1xyz.

В настоящей работе будет анализироваться лишь плоскопараллельное движение, то есть движение в саггитальной плоскости YOZ. В этой плоскости (см. рис. 3) бедро представляется окружностью радиуса R с центром в точке O_1, которая движется по оси OY. Точки крепления связок обозначены A, a для внешней крестообразной связки и P, p для внутренней. Предположим, что эти точки лежат на соответствующих поверхностях бедра и большеберцовой кости. Положение бедра относительно голени определяется двумя параметрами, двумя степенями свободы, Y_0, γ. В соответствии с уравнением (4) координаты любой точки бедра в неподвижной системе связаны с координатами той же точки в подвижной системе уравнениями:

$$Y(t) = Y_0(t) + y\cos\gamma(t) - z\sin\gamma(t),$$
$$Z(t) = R + y\sin\gamma(t) + z\cos\gamma(t). \qquad (8)$$

В соответствии с предположением о том, что точки крепления связок лежат на поверхностях бедра и берцовой кости, имеем

$$(Y_{ACL}, Z_{ACL}) = (-A, 0), \qquad (Y_{PCL}, Z_{PCL}) = (A, 0),$$
$$(y_{ACL}, z_{ACL}) = (R\cos\gamma_0, R\sin\gamma_0), \qquad (y_{PCL}, z_{PCL}) = (-R\cos\gamma_0, R\sin\gamma_0). \qquad (9)$$

Для простоты предположим, что точки крепления расположены симметрично, то есть их положение определяется двумя параметрами A, γ_0. Из формул (8) и (9) следует, что координаты движущихся точек крепления связок изменяются в соответствии с уравнениями

$$(Y_{ACL}(t), Z_{ACL}(t)) = (Y_0, R) + R(\cos(\gamma+\gamma_0), \sin(\gamma+\gamma_0)),$$
$$(Y_{PCL}(t), Z_{PCL}(t)) = (Y_0, R) - R(\cos(\gamma+\gamma_0), \sin(\gamma-\gamma_0)). \qquad (10)$$

В соответствии с (9) и (10) длины связок L_A, L_P изменяются согласно уравнениям

$$L_A^2(t) = (Y_0(t)+A)^2 + 2R^2 + 2R((Y_0+A)\cos(\gamma(t)+\gamma_0) + R\sin(\gamma(t)+\gamma_0)),$$
$$L_P^2(t) = (Y_0(t)-A)^2 + 2R^2 - 2R((Y_0-A)\cos(\gamma(t)+\gamma_0) + R\sin(\gamma(t)-\gamma_0)). \qquad (11)$$

Вычислим, как изменяются длины связок в случае простого плоского вращения, то есть в случае, когда $Y_0(t) = 0, \quad 0 \le \lambda(t) \le \pi$. Результаты вычислений для параметров $R = 40$ мм, $A = 15$ мм, $\gamma_0 = 45°$ представлены на рис. 4. Данные параметры взяты лишь в иллюстративных целях и не основаны ни на каких реальных индивидуумах.

Как следует из рис. 4, длина задней связки (пунктирная линия) в течение всего движения не увеличивается; в то же время передняя связка в течение почти 90° должна увеличивать свою длину (сплошная линия). Возвращаясь к вопросу о том, как влияют связки на число степеней свободы коленного сустава, отметим, что в случае плоского движения поверхности бедра по голени рассматривать модель четырехзвенного механизма, как это делается в работах [1, 2], некорректно, поскольку условие одновременного сохранения длин передней и задней связки невыполнимо. Действительно, как следует из уравнений (11), при постоянных длинах связок из двух

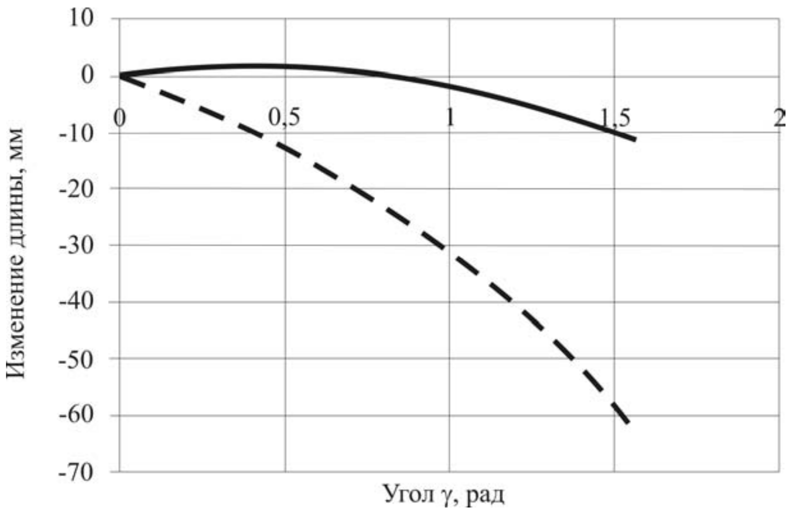

Рис. 4. Графики зависимости длин связок от угла поворота колена: сплошная линия – изменение длины передней связки, пунктирная – изменение длины задней связки

уравнений всегда можно найти постоянные значения параметров Y_0, γ, то есть число степеней свободы равняется нулю. Очевидно, связки уменьшают число степеней свободы в том и только в том случае, когда при сгибании и разгибании колена их длина должна увеличиваться. В рассматриваемом примере это происходит с передней связкой при движении от 0 до 90°. В этом случае число степеней свободы сустава уменьшается до 1.

В качестве свободного параметра выберем снова угол γ и вычислим, как будет при движении меняться параметр поступательного движения Y_0. Для нахождения неизвестного значения Y_0 в соответствии с (11) надо решить уравнение

$$(Y_0(t) + A)^2 + 2R^2 + 2R((Y_0 + A)\cos(\gamma(t) + \gamma_0) + R\sin(\gamma(t) + \gamma_0)) - L_A^2(t_0) = 0\,. \quad (12)$$

Решение уравнения (12) имеет вид

$$\begin{aligned} &Y_0(t) = \min\left[-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - A, \quad -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - A\right], \\ &p = 2R\cos(\gamma(t) + \gamma_0), \\ &q = 2R^2(1 + \cos(\gamma(t) + \gamma_0)) - L_A^2(t_0). \end{aligned} \quad (13)$$

Результаты расчета для рассматриваемого нами примера приведены на рис. 5.

Хорошо известно, что в случае плоско-параллельного движения твердого тела в теле существует точка, скорость которой равняется нулю (такая точка называется мгновенным центром скоростей). При движении твердого тела распределение скоростей точек этого тела описывается формулой

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \mathbf{V}(x_0, y_0, z_0) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (14)$$

где $\mathbf{r} = (x - x_0,\, y - y_0,\, z - z_0)$ – радиус-вектор точки, проведенный из начала координат (x_0, y_0, z_0); $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости тела; $\mathbf{V}(x, y, z)$ – вектор скорости произвольной точки тела с координатами x, y, z; $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}(x_0, y_0, z_0)$ – вектор скорости начала координат.

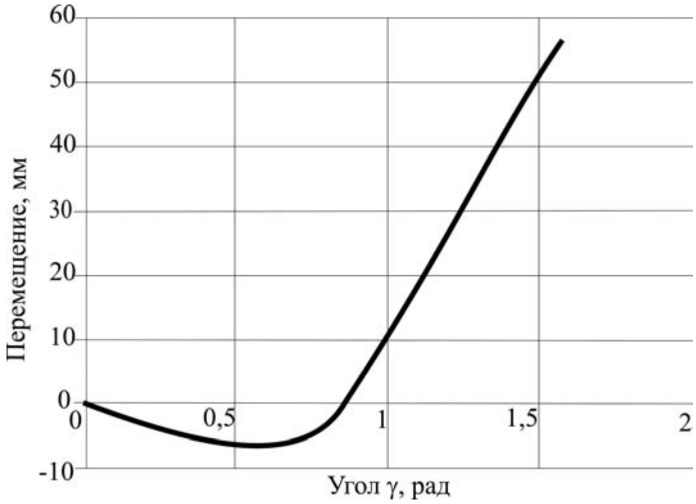

Рис. 5. Поступательное перемещение в коленном суставе как функция угла поворота

Если за начало координат выбрать точку, заданную вектором $\mathbf{M}$, определяемым формулой

$$\mathbf{M} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_0}{\omega^2}, \tag{15}$$

то скорость нового начала координат $\mathbf{V}_{00}$ в соответствии с (14) равна:

$$\mathbf{V}_{00} = \frac{(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{V}_0)\,\boldsymbol{\omega}}{\omega^2}. \tag{16}$$

Таким образом, в этом случае скорость начала координат будет коллинеарна вектору угловой скорости (случай так называемого винта). В рассматриваемом случае плоскопараллельного движения вектор угловой скорости перпендикулярен плоскости движения, то есть перпендикулярен любому вектору, расположенному в плоскости движения, поэтому $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{V}_0) = 0$. Исходя из этого, скорость нового начала координат равна нулю, то есть выбранная таким образом точка будет являться мгновенным центром скоростей, который для плоскопараллельного движения всегда существует, если угловая скорость не равняется нулю. В рассматриваемом случае плоскопараллельного движения коленного сустава имеем

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{d\gamma(t)}{dt},\ 0,\ 0 \right), \qquad \mathbf{V}_0 = \left(0,\ \frac{dY_0(t)}{dt},\ 0 \right). \tag{17}$$

Оба вектора в (17) заданы в неподвижной системе координат *OXYZ*. В соответствии с (15) мгновенный центр скоростей определяется вектором $\mathbf{M}_0$.

$$\mathbf{M}_0 = \left(0,\ 0,\ \frac{dY_0(t)/dt}{d\gamma(t)/dt} \right). \tag{18}$$

В формуле (18) вектор $\mathbf{M}_0$ задан в проекциях на оси неподвижной системы координат $OXYZ$. В проекциях на оси подвижной системы координат тот же вектор

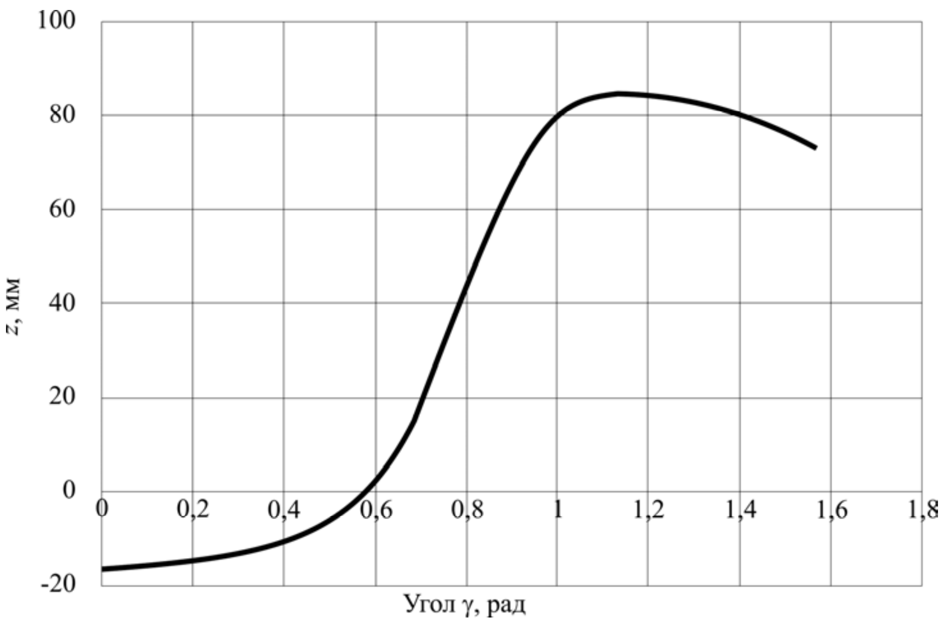

Рис. 6. Координата Z мгновенной оси вращения в неподвижной системе координат с началом в точке O как функция угла поворота колена

$$\mathbf{M}_0 = \left(0,\ \frac{dY_0(t)/dt}{d\gamma(t)/dt} \sin\gamma(t),\ \frac{dY_0(t)/dt}{d\gamma(t)/dt} \cos\gamma(t) \right). \quad (19)$$

Для вычисления положения мгновенного центра скоростей по формулам (18) или (19) необходимо знать отношение скоростей изменения параметров Y_0, γ . В случае двух степеней свободы, когда связки кинематически не влияют на движение в суставе, в рамках обычной кинематики это сделать невозможно. Однако при наличии связи, состоящей в том, что длина одной из связок остается постоянной, можно вычислить координаты мгновенного центра скоростей. Действительно, продифференцировав первое из уравнений (11) по времени, получим

$$\begin{gathered} \frac{dL_A^2(t)}{dt} = 2(Y_0(t) + A + R\cos(\gamma(t) + \gamma_0)) \frac{dY_0(t)}{dt} + \\ +2R(-(Y_0(t) + A)\sin(\gamma(t) + \gamma_0) + R\cos(\gamma(t) + \gamma_0)) \frac{d\gamma(t)}{dt} = 0. \end{gathered} \quad (20)$$

Из (20) следует, что

$$\frac{dY_0(t)/dt}{d\gamma(t)/dt} = \frac{R((Y_0(t) + A)\sin(\gamma(t) + \gamma_0) - R\cos(\gamma(t) + \gamma_0))}{(Y_0(t) + A + R\cos(\gamma(t) + \gamma_0))}. \quad (21)$$

На рис. 6 показан график изменения координаты Z мгновенной оси вращения в неподвижной системе координат с началом в точке O как функция угла поворота колена, где под координатой Z мгновенной оси вращения понимается координата точки движущегося тела, скорость которой в данный момент равняется нулю.

На рис. 7 показана траектория мгновенной оси вращения в подвижной системе координат с началом в точке O_1.

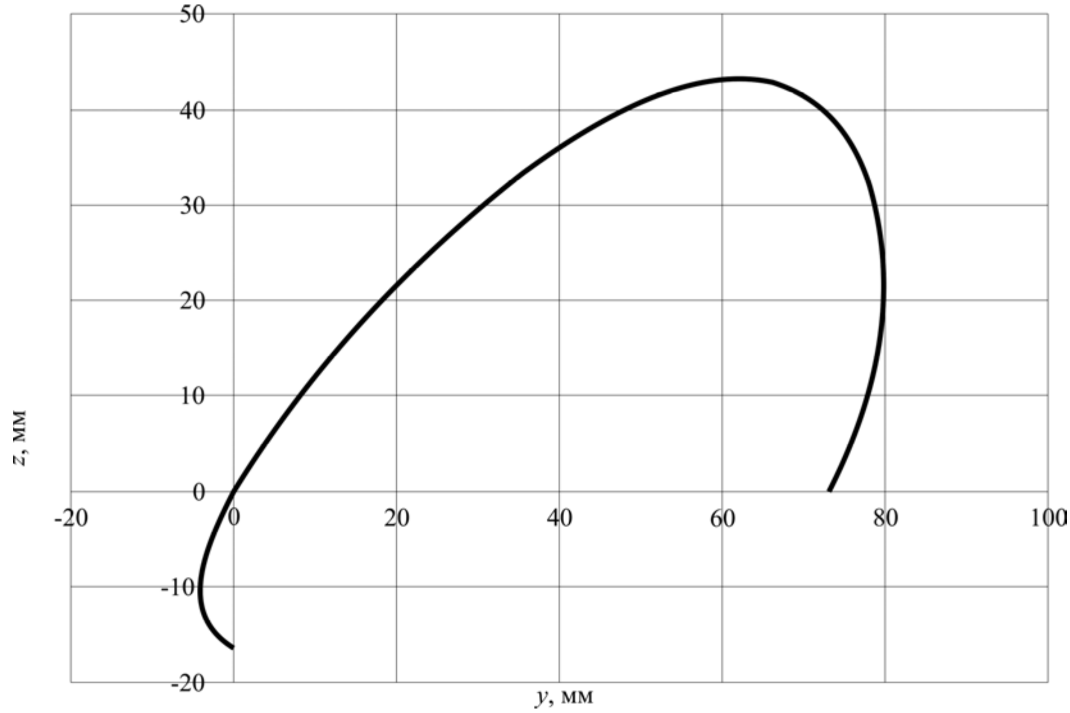

Рис. 7. Траектория мгновенной оси вращения в подвижной системе координат с началом в точке O_1

В заключение статьи попытаемся ответить на поставленный в заголовке вопрос: сколько степеней свободы в плоском движении имеет коленный сустав? Как следует из вышеприведенного анализа, в зависимости от условий движения число степеней свободы может равняться 2 или 1. Первый случай имеет место, когда при движении обе связки уменьшают свою длину. Во втором случае одна из связок сохраняет свою длину неизменной.

Список литературы

1. *Züppinger, H.* Die aktive Flexion in unbelasten Kniegelenk / H. Züppinger. – Zürich: Habilitationschrift, 1904.
2. *O'Connor, J.J.* Kinematics and mechanics of the cruciate ligaments of the knee / J.J. O'Connor, A. Zavatssky // Biomechanics of diarthroidal joints. Edited by V.C. Mow, A. Ratcliffe, S.L.-Y.Woo – New York: Springer-Verlag, 1990. Vol. 2, 197–241.

KINEMATICS OF A HUMAN KNEE JOINT PLANE MOTION (HOW MANY DEGREES OF FREEDOM DOES KNEE JOINT HAVE?)

M.L. Ioffe (New York, USA)

An attempt to build a kinematical model of the knee joint on the basis of theoretical (classical) mechanics has been made. The knee joint motion has been considered as a movement of one solid body (the femur) on the surface of another solid body (tibia), with the constraints imposed by the anterior and posterior cruciate ligaments due to their inextensibility. In this paper, only the plane motion in the sagittal plane has been analysed in details.

Key words: kinematics, human knee joint, plane motion, number of degrees of freedom.

Получено 24 декабря 2007