УДК 539.319

М.А. Осипенко

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ОБ ИЗГИБЕ ДВУХЛИСТОВОЙ РЕССОРЫ С ЛИСТАМИ, ИСКРИВЛЕННЫМИ ПО ДУГЕ ОКРУЖНОСТИ

Рассмотрена контактная задача об изгибе двухлистовой рессоры с односторонним контактом листов, искривленных в естественном состоянии по дуге окружности. Листы имеют различные длины; один конец каждого листа защемлен, другой – свободен. Угол, на который опирается длинный лист, меньше прямого. Сечения листов являются прямоугольниками одинаковой ширины, но различной толщины. К листам приложена перпендикулярная к ним заданная нагрузка. Трение между листами отсутствует. Изгиб каждого листа описывается моделью Бернулли–Эйлера. Задача сводится к отысканию плотности сил взаимодействия листов, представляющей собой сумму кусочно-непрерывной части и сосредоточенных сил. Сформулирована строгая постановка задачи, установлена единственность решения и построено полное аналитическое решение. Этим построением одновременно доказано существование решения. Обоснование решения включает доказательство неотрицательности контактных сил и контактных расстояний, а также доказательство существования корня трансцендентного уравнения, который дает длину участка контакта листов. При доказательстве неотрицательности контактных расстояний использован новый подход, основанный на том, что эти расстояния можно рассматривать как решения некоторых вариационных задач. Показано, что в зависимости от заданной нагрузки возможны три варианта картины взаимодействия листов: по всему короткому листу; в точке, расположенной на конце короткого листа; по части короткого листа и в точке. Полученные результаты обобщают известное ранее достаточное условие контакта листов в одной точке.

Ключевые слова: двухлистовая рессора, искривленная балка, модель Бернулли–Эйлера, изгиб, контактная задача, контактные силы, контактные расстояния, аналитическое решение.

M.A. Osipenko

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

A CONTACT PROBLEM FOR BENDING OF TWO-LEAF SPRING WITH THE LEAVES CURVED ALONG THE CIRCULAR ARC

The unbonded contact problem for bending of two-leaf spring is considered; the leaves are curved along the circular arc in their natural states. The lengths of the leaves are different; each leaf has one end clamped and the other free. The angle formed by the long leaf is less than the right one. The cross-sections of leaves are the rectangles of the same width but of the different thickness. These thicknesses are considered to vanish while the elastic lines of the leaves are analyzed geometrically. The real thicknesses affect only the bending stiffness of the leaves. The given loading is applied transversely to the leaves. There is no friction between the leaves. The bending is described by Bernoulli – Euler model. The problem is reduced to finding the density of the leaves interacting forces. This density is the sum of the piecewise-continuous part and the concentrated forces. The rigorous problem statement is formulated, the uniqueness of solution is established and the complete analytical solution of the problem is provided. This construction also proves the existence of the solution. The substantiation of the solution includes proving of the non-negativity of the contact forces and contact distances and the proving of the existence of the root of transcendental equation that gives the length of the contact segment. The proving of the non-negativity of the contact distances uses a new approach that is based on the fact that these distances can be regarded as the solutions of some variational problems. It is shown that three patterns of the leaves contact are possible: the contact along the whole short leaf; the contact at the point on the end of the short leaf; the contact along the part of the short leaf and at the point. The pattern kind depends on the given loading. The obtained results generalize the known sufficient condition for the pointwise contact of the leaves.

Keywords: two-leaf spring, curved beam, Bernoulli–Euler model, bending, contact problem, mathematical statement, contact forces, contact distances, analytical solution, contact pattern.

Введение

Контактная задача об изгибе двухлистовой рессоры с листами, искривленными по дуге окружности, заключается в отыскании контактных сил в системе двух консольных балок (листов) различной длины под заданной нагрузкой (рис. 1). В отсутствие этой нагрузки балки имеют форму дуги окружности и плотно прилегают друг к другу. Угол дуги, на который опирается длинная балка, меньше $\pi/2$. Поперечные сечения балок являются прямоугольниками одинаковой ширины, но различной толщины. Под нагрузкой балки испытывают слабый совместный изгиб с возможным отставанием.

Нагрузку предполагаем направленной перпендикулярно балкам. Трение между балками отсутствует; изгиб каждой балки описывается моделью Бернулли–Эйлера [1]. Строгая постановка рассматриваемой контактной задачи сформулирована в [2]; там же доказана единственность решения. Об аналитической структуре решения этой задачи в настоящее время известно немного. В [3] установлено, что если нагрузка имеется только на выступающей части длинной балки, то контактное взаимодействие балок происходит в одной точке, расположенной на конце короткой балки. В [4] получено более слабое условие на нагрузку, при выполнении которого имеет место одното-

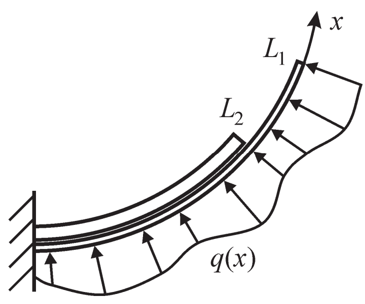


Рис. 1. Модель двухлистовой рессоры с искривленными листами

чечный контакт. В «технической» теории листовых рессор [5–8] характер контактного взаимодействия листов в такой рессоре не известен.

Целью настоящей работы является построение аналитического решения рассматриваемой задачи в общем случае (для произвольной нагрузки). Этим построением одновременно доказывается существование решения.

1. Постановка контактной задачи

Данная постановка следует подходу [2, 9, 10], который является развитием идей [11–13]. Для перемещений используются представления, несколько отличающиеся от использованных в [2]. Балки испытывают слабый (линейный) изгиб в одной плоскости. Пусть R – радиус окружности, по дуге которой изогнуты балки. Встречающиеся далее длины балок $L_1 > L_2 > 0$, криволинейная координата x и нормальные (перпендикулярные балке) перемещения точек балок y_1, y_2 считаются выраженными в единицах R (т.е. безразмерными). С помощью теории Бернулли–Эйлера [1] нетрудно найти $y_1(x)$, $y_2(x)$ при $0 \le x \le L_2$:

$$y_1(x) = a_1 \int_0^x \sin(x-s) \left(\int_s^{L_1} \sin(t-s) q(t)\, dt - \int_s^{L_2} \sin(t-s) f(t)\, dt \right) ds, \tag{1}$$

$$y_2(x) = a_2 \int_0^x \sin(x-s) \left(\int_s^{L_2} \sin(t-s) f(t)\, dt \right) ds, \tag{2}$$

где $a_i = 12R^3 \Big/ \left(Ewh_i^3 \right)$; E – модуль Юнга; w – ширина сечения; h_i – толщины сечений (геометрически – при определении функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ – толщины считаются равными нулю); $q(x)$ – плотность заданной нагрузки; $f(x)$ – плотность сил взаимодействия балок. Задача заключается в отыскании $f(x)$. Будем считать, что эта функция имеет вид

$$p(x) + \sum\nolimits_i P_i \delta(x - x_i), \tag{3}$$

где $p(x) \ge 0$ – кусочно-непрерывна, непрерывна слева при $0 < x \le L_2$ и непрерывна справа при $x = 0$; $P_i \ge 0$; $x_i > 0$ (все x_i различны); сумма конечна; δ – дельта-функция Дирака. Обозначим $r(x)=y_2(x)-y_1(x)$ (расстояние между балками). Из (1), (2) следует, что

$$r(x)=(a_1+a_2)\int_0^x \sin(x-s)\left(\int_s^{L_2}\sin(t-s)f(t)\,dt-\alpha k(s)\right)ds, \qquad (4)$$

где $\alpha=a_1/(a_1+a_2)$,

$$k(x)=\int_x^{L_1}\sin(s-x)q(s)\,ds. \qquad (5)$$

Будем считать, что $q(x)$ имеет вид (3); тогда $k(x)\geq 0$ непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема при $0\leq x\leq L_1$ (в точках разрыва производной доопределяем ее по непрерывности слева или справа). Условие контакта балок состоит, помимо неотрицательности плотности сил взаимодействия, в том, что расстояние между балками неотрицательно, а в тех точках, где плотность сил взаимодействия положительна, – равно нулю. Окончательно приходим к следующей математической постановке задачи.

Задача. Найти функцию $f(x)$ вида (3) такую, что при $0\leq x\leq L_2$

$$r(x)\begin{cases}=0 & (f(x)>0),\\ \geq 0 & (f(x)=0),\end{cases} \qquad (6)$$

где $r(x)$ выражается формулой (4).

Утверждение 1. Поставленная задача может иметь только одно решение.

Доказательство проведено в [2] (в более общем случае – для балок, искривленных по произвольной кривой).

2. Аналитическое решение задачи

Лемма. Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна при $\lambda\leq x\leq L$; $L-\lambda<\pi/2$; существует $\lambda\leq x_1\leq L$ такое, что $\varphi(x)\geq 0$ при $\lambda\leq x\leq x_1$ и $\varphi(x)\leq 0$ при $x_1\leq x\leq L$. Пусть, кроме того, $r(L)=0$, где

$$r(x) = \int_{\lambda}^{x} \sin(x-s)\varphi(s)\,ds, \tag{7}$$

тогда $r(x) \geq 0$ при $\lambda \leq x \leq L$.

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$v[\rho(x)] = \int_{\lambda}^{L} \left(\rho'^2(x)/2 - \rho^2(x)/2 + \varphi(x)\rho(x)\right)dx, \tag{8}$$

определенный на множестве непрерывных и кусочно-непрерывно дифференцируемых при $\lambda \leq x \leq L$ функций, удовлетворяющих условию $\rho(\lambda) = \rho(L) = 0$. Методами вариационного исчисления [14] нетрудно установить, что на функции $r(x)$ этот функционал достигает глобального минимума, то есть

$$v[\rho(x)] > v[r(x)] \tag{9}$$

для любой функции $\rho(x) \neq r(x)$ из указанного множества. Предположим, что $r(x) < 0$ на некотором подмножестве D отрезка $\lambda \leq x \leq L$. Из (7) и свойств $\varphi(x)$ следует, что $\varphi(x) \leq 0$ при $x \in D$. Положим $\rho(x) = |r(x)| \neq r(x)$. Тогда из (8) следует, что

$$v[\rho(x)] - v[r(x)] = 2\int_D \varphi(x)|r(x)|\,dx \leq 0.$$

Это неравенство противоречит (9). Полученное противоречие доказывает лемму. Заметим, что использованная здесь вариационная задача не имеет непосредственной связи с вариационными неравенствами, нередко применяемыми для исследования контактных задач [15].

Утверждение 2. Решение поставленной задачи имеет следующий вид:

а) если $k(L_2) = 0$, то

$$f(x) = \alpha q(x) \tag{10}$$

(взаимодействие листов по всему отрезку $0 \leq x \leq L_2$; рис. 2, *а*);

б) если $k(L_2) > 0$ и $\Phi(0) \leq 0$, то

$$f(x) = F\delta(x - L_2) \tag{11}$$

(взаимодействие листов в одной точке, рис. 2, *б*);

в) Если $k(L_2) > 0$ и $\Phi(0) > 0$, то

$$f(x) = P\delta(x - L_2) + Q\delta(x - \lambda) + \begin{cases} \alpha q(x) & (0 \le x \le \lambda), \\ 0 & (\lambda < x \le L_2) \end{cases} \tag{12}$$

(взаимодействие листов по части отрезка $0 \le x \le L_2$ и в точке; рис. 2, *в*), где

$$F = \alpha \int_0^{L_2} \sin(L_2 - x)k(x)dx \Big/ \int_0^{L_2} \sin^2(L_2 - x)dx\,, \tag{13}$$

$$P = \alpha b(\lambda)\,,\ Q = -\frac{\alpha c(\lambda)}{\sin(L_2 - \lambda)}\,, \tag{14}$$

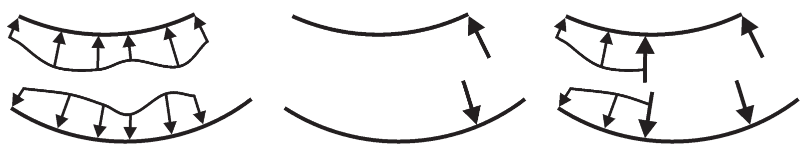
$$b(x) = \frac{k(x)}{\sin(L_2 - x)}\,,\ c(x) = \int_x^{L_1} \sin(s - L_2)q(s)\,ds\,, \tag{15}$$

$$\Phi(\Lambda) = \int_\Lambda^{L_2} \sin^2(L_2 - x)\big(b(\Lambda) - b(x)\big)\,dx\,, \tag{16}$$

$$0 < \lambda < L_2 \text{ – корень уравнения } \Phi(\Lambda) = 0\,. \tag{17}$$

Доказательство

а) Очевидно, что $f(x)$ имеет вид (3). Подставляя (10) в (4) и учитывая, что если $k(L_2) = 0$, то в верхнем пределе интеграла (5) можно L_1 заменить на L_2, найдем, что $r(x) = 0$ при $0 \le x \le L_2$; таким образом, (6) выполнено.



а *б* *в*

Рис. 2. Варианты сил взаимодействия листов

б) Очевидно, что $f(x)$ имеет вид (3). Подставляя (11) в (4) и учитывая (13), находим, что $r(L_2) = 0$, а при $0 \le x < L_2$

$$r(x) = \int_0^x \sin(x - s)\varphi_b(s)ds\,,$$

где

$$\varphi_b(x) = (a_1 + a_2)\sin(L_2 - x)\big(F - \alpha b(x)\big). \tag{18}$$

Используя (15), (5), нетрудно показать, что $b'(x) = c(x)\big/\sin^2(L_2 - x)$, причем $c(x)$ не убывает при $0 \le x \le L_2$ и $c(L_2) = k(L_2) > 0$. Следовательно, либо $b(x)$ не убывает при $0 \le x < L_2$, либо существует $0 \le x_* < L_2$ такое, что $b(x)$ не возрастает при $0 \le x \le x_*$ и $b(x)$ не убывает при $x_* \le x < L_2$. Из (13), (15), (16) и неравенства $\Phi(0) \le 0$ следует, что $F \ge \alpha b(0)$. Учитывая еще значение $b(L_2 - 0) = +\infty$, нетрудно найти, что в обоих упомянутых выше случаях существуют $0 \le x_1 \le L_2$ (в разных случаях, возможно, разные) такие, что $F - \alpha b(x) \ge 0$ при $0 \le x \le x_1$ и $F - \alpha b(x) \le 0$ при $x_1 \le x \le L_2$. Тогда функция (18) удовлетворяет условиям леммы (при $\lambda = 0$, $L = L_2$), следовательно, $r(x) \ge 0$ при $0 \le x \le L_2$. Далее, $f(x)$ может быть положительна только при $x = L_2$, а $r(L_2) = 0$; таким образом, (6) выполнено.

в) Существование корня $0 < \lambda < L_2$ следует из непрерывности $\Phi(\Lambda)$ при $0 \le \Lambda < L_2$ и значений

$$\Phi(0) > 0,\ \Phi(L_2 - 0) = 0,\ \Phi'(L_2 - 0) = 0,\ \Phi''(L_2 - 0) = -k(L_2)\big/3 < 0.$$

Единственность корня следует из утверждения 1. При доказательстве пункта (*б*) было установлено, что (независимо от знака $\Phi(0)$) либо $b(x)$ не убывает при $0 \le x < L_2$, либо существует $0 \le x_* < L_2$ такое, что $b(x)$ не возрастает при $0 \le x \le x_*$ и $b(x)$ не убывает при $x_* \le x < L_2$ (причем $b(L_2 - 0) = +\infty$). Из (16) следует, что в первом случае $\Phi(\lambda) < 0$, что противоречит (17). Поэтому имеет место второй случай; тогда из (16) вытекает, что $\lambda \le x_*$ (иначе $\Phi(\lambda) < 0$), следовательно, $b'(\lambda) \le 0$ и $c(\lambda) \le 0$. Тогда (учитывая неотрицательность b) получаем, что (12) имеет вид (3). Подставляя (12), (14) в (4), найдем

$$r(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le \lambda), \\ \int_\lambda^x \sin(x - s)\varphi_c(s)\,ds & (\lambda \le x < L_2), \end{cases}$$

где

$$\varphi_c(x) = (a_1 + a_2)\sin(L_2 - x)\big(b(\lambda) - b(x)\big); \tag{19}$$

с учетом (16), (17) также получим $r(L_2) = 0$. Из установленных выше свойств функции $b(x)$ следует, что существует $\lambda \le x_1 \le L_2$ такое, что $b(\lambda) - b(x) \ge 0$ при $\lambda \le x \le x_1$ и $b(\lambda) - b(x) \le 0$ при $x_1 \le x \le L_2$. Тогда функция (19) удовлетворяет условиям леммы (при $L = L_2$), следовательно, $r(x) \ge 0$ при $0 \le x \le L_2$. Далее, $f(x)$ может быть положительна только при $0 \le x \le \lambda$ и при $x = L_2$, а $r(x) = 0$ для этих значений x; таким образом, (6) выполнено.

3. Некоторые замечания к полученным результатам и выводы

Из утверждения 2 как частный случай может быть получено решение [2] контактной задачи для неискривленных листов; нетрудно видеть, что для этого в формулировке этого утверждения значения функции $\sin$ следует заменить на ее аргументы. Условие $\Phi(0) \le 0$ совпадает с полученным в [4] достаточным условием одноточечного контакта для листов, искривленных по дуге окружности (если при этом $k(L_2) = 0$, то заданная нагрузка, как легко установить, является одной силой, приложенной в точке $x = L_2$, и (10) также соответствует одноточечному контакту). Теперь установлена также необходимость этого условия; кроме того, полностью изучена картина контакта при нарушении этого неравенства. В [4] достаточные условия одноточечного контакта установлены для листов, искривленных по произвольной кривой, но на основе другого подхода, с помощью которого не удается исследовать картину контакта в общем случае (неодноточечного контакта). Возможно, новый подход, развитый в данной работе, позволит исследовать эту общую картину для произвольно искривленных листов.

Библиографический список

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 711 с.

2. Osipenko M.A., Nyashin Yu.I., Rudakov R.N. A contact problem in the theory of leaf spring bending // International Journal of Solids and Structures. – 2003. – No. 40 – P. 3129–3136.

3. Osipenko M.A., Nyashin Y.I., Rudakov R.N. On the theory of bending of foot prosthesis containing the curved plates // Russian Journal of Biomechanics. – 1999. – Vol. 3 – No. 3 – P. 73–77.

4. Osipenko M.A., Nyashin Y.I., Rudakov R.N. The sufficient condition for the pointwise contact in the two-leaf curved elastic element of the foot prosthesis under bending // Russian Journal of Biomechanics. – 2000. – Vol. 4 – No. 3 – P. 33–41.

5. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 1 / С.Д. Пономарев [и др.] – М.: Машгиз, 1956. – 884 с.

6. Пархиловский И.Г. Автомобильные листовые рессоры. – М.: Машиностроение, 1978. – 232 с.

7. Таланцев Н.Ф. Критерии оценки рессор // Автомобильная промышленность. – 1988. – № 10 – С. 20–21.

8. Пестренин В.М., Пестренина И.В., Таланцев Н.Ф. Численный анализ напряженно-деформированного состояния листовых рессор // Вычисл. мех. спл. сред. – 2009. – Т. 2, № 2 – С. 74–84.

9. Осипенко М.А., Няшин Ю.И. Новый итерационный метод расчета многолистовой рессоры // Вычисл. мех. спл. сред. – 2012. – Т. 5, № 4 – С. 371–376.

10. Осипенко М.А. Аналитический расчет статического изгиба двухлистовой рессоры с параболическим профилем короткого листа // Вестник ИжГТУ. – 2012. – № 3 (55) – С. 146–150.

11. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1973. – 400 с.

12. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 415 с.

13. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.

14. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.

15. Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике; Мос. гос. акад. приборостр. и информатики. – М.,1997. – 340 с.

References

1. Rabotnov Yu.N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Mechanics of deformable solids]. Moscow: Nauka, 1988, 711 p.

2. Osipenko M.A., Nyashin Yu.I., Rudakov R.N. A contact problem in the theory of leaf spring bending. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, no. 40, pp. 3129-3136.

3. Osipenko M.A., Nyashin Y.I., Rudakov R.N. On the theory of bending of foot prosthesis containing the curved plates. *Russian Journal of Biomechanics*, 1999, vol. 3, no. 3, pp. 73-77.

4. Osipenko M.A., Nyashin Y.I., Rudakov R.N. The sufficient condition for the pointwise contact in the two-leaf curved elastic element of the foot prosthesis under bending. *Russian Journal of Biomechanics*, 2000, vol. 4, no. 3, pp. 33-41.

5. Ponomaryov S.D. [et al.] Raschety na prochnost v mashinostroenii. T. 1 [Stress calculation in mechanical engineering, vol. 1]. Moscow: Mashgiz, 1956. 884 p.

6. Parhilovsky I.G. Avtomobilnye listovye ressory [Automotive leaf springs]. Moscow: Mashinostroenie, 1978. 232 p.

7. Talantsev N.F. Kriterii otsenki ressor [The criterions for evaluation of leaf springs]. *Avtomobilnaya promyshlennost*, 1988, no. 10, pp. 20-21.

8. Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Talantsev N.F. Chislennyj analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya listovykh ressor [The numerical analysis of stress-strain state of leaf springs]. *Vychislitelnaya mekhanika sploshnykh sred*, 2009, vol. 2, no. 2, pp. 74-84.

9. Osipenko M.A., Nyashin Y.I. Novyi iteratsionnyj metod rascheta mnogolistovoj ressory [The new iterational method for calculation of multileaf spring]. *Vychislitelnaya mekhanika sploshnykh sred*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 371-376.

10. Osipenko M.A. Analiticheskij raschet staticheskogo izgiba dvukhlistovoj ressory s parabolicheskim profilem korotkogo lista [Analytical calculation of the static bending of the combination two-leaf spring with the parabolic profile of the short leaf]. *Vestnik Izhevskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2012, no. 3 (55), pp. 146-150.

11. Feodosyev V.I. Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov [Selected problems and questions on the strength of materials]. Moscow: Nauka, 1973. 400 p.

12. Grigoluk E.I., Tolkachuov V.M. Kontaktnye zadachi teorii plastin i obolochek [The contact problems for plates and shells]. Moscow: Mashinostroenie, 1980. 415 p.

13. Johnson K.L. Contact mechanics. Cambridge University Press; Cambridge, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, 1985. 510 p.

14. Elsholtz L.E. Differentsialnye uravneniya i variatsionnoe ischislenie [Differential equations and calculus of variations]. Moscow: Editorial URSS, 2000. 320 p.

15. Kravtchuk A.S. Variatsionnye i kvazivariatsionnye neravenstva v mekhanike [Variational and quasi-variational inequalities in mechanics]. Moscovskaya gosudarstvennaya akademiya priborostroeniya i informatiki, 1997, 340 p.

Об авторе

Осипенко Михаил Анатольевич (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр-кт, 29, e-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru).

About the author

Michael A. Osipenko (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Theoretical Mechanics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., 614990, Perm, Russian Federation, e-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru).

Получено 03.02.2014

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Осипенко М.А. Контактная задача об изгибе двухлистовой рессоры с листами, искривленными по дуге окружности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 1. – С. 142–152.

Please cite this article in English as:

Osipenko M.A. A contact problem for bending of two-leaf spring with the leaves curved along the circular arc. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2013. No. 1. P. 142-152.