УДК 531/534: [57+61]

О.Ю. Долганова, В.А. Лохов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РОСТОВОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

В настоящее время биология и медицина становятся одними из самых привлекательных областей применения математики. Для исправления некоторых патологий развития у детей первостепенными являются вопросы моделирования роста живой ткани и управления ростом. В процессе роста само растущее тело испытывает деформацию, что определяет принципиальное отличие механики растущих тел от классической механики тел постоянного состава. В работе представлен анализ публикаций, в которых предложены различные модели механизма биологического роста живых тканей. Кратко проанализировано понятие биологического роста. Рассмотрены основные принципы моделирования роста и выделены основные направления, в рамках которых разработаны те или иные модели объемно-растущей ткани. Авторы приводят следующую классификацию моделей роста живой ткани: модели, основанные на гипотезе о влиянии на рост ткани внутриклеточного давления как стимулирующего фактора; модели многофазных сред, так называемые *mixture theory*; модели, основанные на гипотезе о влиянии остаточных напряжений на рост ткани как стимулирующего фактора; модели, связывающие зависимость скорости роста от механических напряжений, известную из наблюдений и экспериментов. На основе анализа литературных данных выделены факторы, влияющие на рост живой ткани. Таковыми являются химический состав, концентрация, транспорт и напряжения в материале тела. Напряжения являются существенным фактором, оказывающим влияние на рост. Практическая ценность механической модели ростового деформирования обусловлена возможностью широкого ее применения для описания нормального и патологического роста твердых тканей организма человека. В таком случае с точки зрения механики становится возможным моделирование и управление ростом.

Ключевые слова: биологический рост, ростовая деформация, биомеханическое моделирование, одномерные модели роста, модели многофазных сред, остаточные напряжения, растягивающие усилия, собственная деформация, полная деформация системы, малые деформации.

O.Y. Dolganova, V.A. Lokhov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

MATHEMATICAL MODELS OF GROWTH DEFORMATION

Currently biology and medicine become one of the most attractive areas of applied mathematics. To fix certain pathologies of children, growth modelling for living tissue and growth management are the issues of major importance. In the process of growth a growing body itself experiences deformation that proves a fundamental difference of mechanics of growing bodies from the classical mechanics of bodies of constant composition. This paper presents an analysis of publications related to various models of the mechanism of living tissues growth and a brief analysis of biological growth concept. The authors considered basic principles of growth modelling and specified major areas for developing certain models of body-growing tissue. The following classification of growth models for living tissue has been given: models based on the hypothesis about the influence of intracellular pressure on tissue growth as a stimulating factor; models of multiphase media, the so-called “mixture theory”; model based on the hypothesis about the influence of residual stresses on tissue growth as a stimulating factor; models connecting the rate of growth from the deformations known from observations and experiments. The analysis resulted in specifying factors influencing the growth of living tissue. These are the chemical composition, concentration, transport and stresses in the material body. Stress is a significant factor affecting growth. The practical importance of growth model for mechanical deformation is based on its wide application for describing normal and pathological growth of hard tissues in the human body. In this case, from mechanical point of view, it becomes possible to model and control growth.

Keywords: biological growth, growth deformation, biomechanical modelling, one-dimensional model of growth, mixture theory, residual stresses, tensile forces, eigenstrain, full deformation of the system, small deformation.

Введение

В настоящее время биология и медицина становятся одними из самых привлекательных областей применения математики. Для решения некоторых задач, связанных с синтезом искусственных тканей и органов, разработки новых и совершенствования существующих методик лечения заболеваний, исследования в области нормальных физиологических и патологических ростовых процессов тканей принято рассматривать на междисциплинарном уровне. Междисциплинарный подход в науке при исследовании ростовых процессов, в частности, является требованием сегодняшнего дня.

Вообще рост является общебиологическим свойством живой материи и входит в число основных составляющих биологического развития, наряду с формообразованием (морфогенезом) и возникновением новых типов клеток (дифференцировкой). Именно рост является одной из основных физиологических особенностей процесса развития, отличающей организм ребенка от организма взрослого человека, т.е. речь идет о количественном процессе, характеризующемся непрерывным увеличением массы организма и сопровождающемся изменением числа клеток или их размеров. В процессе роста само растущее тело испытывает деформацию, что определяет принципиальное отличие механики растущих тел от классической механики тел постоянного состава [20]. Историю возникновения и развития механики растущих тел можно найти в ряде статей, среди которых отметим [1, 9, 15, 16, 22]. Точного биологического определения роста нет, но говорят о необратимом изменении массы и размеров [9, 23].

Явления, понимаемые как рост живой ткани, разнообразны и могут отличаться в зависимости от принятой модели роста и уровня организации, на котором рассматривается предмет исследования. Из обзора существующих моделей можно выделить основополагающие направления, в рамках которых разработаны те или иные – модели объемно-растущей ткани:

– модели, основанные на гипотезе о влиянии на рост ткани внутриклеточного давления как стимулирующего фактора;

– модели многофазных сред, так называемые *mixture theory*;

– модели, основанные на гипотезе о влиянии остаточных напряжений на рост ткани как стимулирующего фактора;

– модели, связывающие, зависимость скорости роста от механических напряжений, известную из наблюдений и экспериментов.

1. Одномерные модели роста

Модель Локхарта (J.A. Lockhart) (1965) [12] является одной из первых моделей количественного описания роста ткани растений. В данной модели клетка ткани представлена цилиндром постоянного радиуса и за счет роста может увеличиваться только в длину. Рост связан с объемом воды, поступающей в клетку. Необратимое увеличение длины происходит за счет тургорного давления – давления протоплазмы на стенку клетки изнутри (на основания цилиндра). Упругая деформация клетки может быть записана в виде

$$\varepsilon=\frac{l-l_0}{l_0}, \tag{1}$$

где l – текущая длина клетки; l_0 – длина клетки на предыдущем временном шаге.

Дифференцируя (1) по времени и предполагая постоянство напряжений в клетке, выражение для объемного роста клетки растений приведем к виду

$$\frac{dl}{dt}=\frac{KA}{\alpha}(\Delta\Pi-P), \tag{2}$$

где K – водопроницаемость стенки клетки; $A=2\pi rl$ – длина стенки клетки; $\alpha=\pi r^2$ – площадь поперечного сечения клетки; $\Delta\Pi$ – градиент осмотического давления; P – тургорное давление.

Из предположения о постоянстве скорости деформации на текущем и предыдущем временных шагах выражение (2) запишем в виде

$$\frac{1}{l_0}\frac{dl_0}{dt}=\Phi\sigma, \qquad (3)$$

где $\sigma=\pi r^2 P/2\pi r\delta$ – напряжение в стенке клетки; Φ – характеризует необратимое удлинение клетки; левую часть выражения l_0/l можно понимать как начальную скорость деформации.

В настоящее время представление о том, что ростовое растяжение клеточной стенки растений происходит под воздействием внутриклеточного давления (достигающего нескольких атмосфер), общепринято. Однако модель не нашла применения в описании ростовых процессов в тканях человека, поскольку не учитывает зависимость скорости деформации от модуля упругости системы. Предположение о постоянстве упругой деформации не может являться удовлетворительным.

Далее Гудвин (1992) [60] преобразовал модель Локхарта [12], записав уравнение движения в виде

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\varphi\left(P-Y\right)+\frac{1}{E}\frac{dP}{dt}, \qquad (4)$$

где Y – пороговое напряжение в стенке клетки; φ – коэффициент расширения стенки клетки; E – модуль упругости стенки. Слагаемое $(1/V)dV/dt$ представляет собой скорость деформации; P – аналог механического напряжения или

$$E\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{1}{\tau}\left(\sigma-Y\right)+\frac{d\sigma}{dt}. \qquad (5)$$

Полагая второе слагаемое в (5) равным нулю, Гудвин отмечал, что при $\sigma>Y$ деформация ε клетки является суммой упругой деформации, пропорциональной напряжению в стенке и ростовой деформации, т.е.

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{d\Gamma}{dt}+\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt}. \qquad (6)$$

В дальнейшем такой подход применялся многими авторами в моделях роста, учитывающих влияние напряжений на скорость роста ткани.

2. Модели многофазных сред

В зарубежных литературных источниках существует целое направление исследований, так называемое *mixture theory*, последователи которого предполагают, что рост ткани является результатом транспорта жидкости из окружающей жидкой среды и последующих химических реакций. Транспорт жидкости внутрь клетки обусловлен природой [1, 2, 3].

Математические модели для описания роста мягких тканей состоят из уравнений реакции-диффузии для минимального набора химических веществ, уравнений для твердой фазы ткани и кинетических уравнений для межклеточной жидкости. Данные параметры для многих веществ в воде известны. Предполагается, что твердая фаза не претерпевает транспорта и что в межклеточной жидкости отсутствуют источники и приемники [17].

Модель растущей среды включает в себя пористый деформируемый каркас (твердую фазу) с объемной концентрацией α и жидкую фазу с объемной концентрацией $\beta=1-\alpha,$, перемещающуюся по системе связанных между собой пор. Для рассмотрения материала фаз как условно однородного вводится понятие приведенной «размазанной» плотности $\rho_1=\rho_1\cdot\alpha$ и $\rho_2=\rho_2\cdot\beta$, где звездочкой отмечены истинные плотности фаз. В жидкой фазе распределен обобщенный химический компонент с концентрацией *c*. Предполагается, что твердая фаза представляет собой вязкоупругое тело максвелловского типа, а жидкая фаза – линейно-вязкая несжимаемая жидкость.

Постановка задачи ростового деформирования одно-, двух-, трехфазной среды изложена в работе [23]. В общем случае для модели двухфазной растущей среды реологические соотношения, описывающие внешнюю (макроскопическую) деформацию среды, имеют вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}^e+\boldsymbol{\varepsilon}^i,\ \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^i}{dt}=\xi^i(\boldsymbol{\sigma},p,\chi),\ \boldsymbol{\varepsilon}^e=\boldsymbol{\varepsilon}^e(\boldsymbol{\sigma},p,\chi), \tag{7}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^e,\boldsymbol{\varepsilon}^i$ – тензоры полных, упругих и неупругих деформаций, соответственно (упругая составляющая тензора деформации зависит от напряжений); ξ^i – тензор скоростей неупругих (ростовых деформаций); $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений в среде как целом; p – давление в жидкой фазе; χ – дополнительные физико-химические и структурные характеристики ткани. Вместо тензора напряжений для среды в целом могут использоваться характеристики напряженного состояния твердой фазы [23].

В рамках модели многофазной объемно-растущей среды возможно рассмотрение неупругого деформирования и массообразования фаз, составляющих рост. Деформирование определяется присутствием напряжений в твердой фазе из-за давлений, развиваемых в жидкости и из-за внешних сил. Давления в жидкости развиваются в результате осмоса из-за наличия компонента, распределенного в жидкой фазе. Однако решение задачи в рамках системы уравнений, представленной в работе [23], видится абстрактным ввиду сложностей практического вычисления констант, входящих в определяющие соотношения материала фаз даже для максимально простой модели (двухфазной) многофазной среды.

3. Модели, учитывающие влияние остаточных напряжений на рост

С середины 70-х гг. XX в. проводилось большое количество исследований, посвященных формулированию интерпретации законов роста живой ткани как функции напряжений и деформаций. Исследователи отмечали, что поведение материала твердых тканей живых организмов под нагрузкой существенно отличается от аналогичного у мягких тканей [8, 4]. Так, для костной ткани ученые устанавливали существование некоторого равновесного состояния напряжений, не связанного с ростом. И рост полагался линейной функцией между напряжением, возникающим при нагрузке, и уравновешенным напряженным состоянием (Cowin, 1983). Темп роста костной ткани был выражен как показатель разности между энергией деформации в нагруженном состоянии и энергией деформации в равновесном состоянии (Harrigan, Hamilton, 1992). Для мягких тканей наблюдалась анизотропия свойств, вязкоупругое поведение материала и большие деформации и, напротив, практически упругое поведение и малые деформации – у твердых.

Что касается роста костной ткани, то, как считали ученые, «поле деформации роста твердых тканей предполагает совместность в любое время и поэтому свободно от напряжений». Для мягких тканей присутствие остаточных напряжений является обязательным условием роста ткани с сохранением сплошности ее материала [4]. Считалось, что ростовые деформации мягких тканей не являются совместными, поскольку все клетки тела не могут расти одинаково, и поэтому, чтобы сохранить однородность тела, возникают напряжения.

Хэрриган (Harrigan) и Гамильтон (Hamilton) в своих экспериментах демонстрировали наличие существенных изменений в величине остаточных напряжений в стенке сердца в период морфогенеза. В развивающемся эмбрионе сердце формируется в виде несрастающегося цилиндра, который в конечном счете закрывается, формируя сердечную трубку (Manasek, 1983). Изначально сердце свободно от напряжения. По мере деления клеток, происходит их слияние и формирование мягких тканей; базовая ткань должна выдержать рост и деление клеток, что, в свою очередь, становится причиной остаточного напряжения (Taber, 1993). В то время как растущая ткань развивается, ее развитие будет сопровождаться нагрузкой и сжатиями, которые нужно выдержать. Сталсберг (Stalsberg) (1970) показал, что нормальное развитие сердечной трубки нарушается при изменении внешних механических факторов. В работе Родригеза (E.K. Rodriguez) [15] приведен пример, когда рост тела становится причиной возникновения остаточных напряжений и распространения их по всей толщине стенки, в результате чего изменяется форма тела.

Таким образом, для описания ростовых процессов в живых тканях человека с точки зрения возникающих напряжений сформировалось два подхода: совместность ростовых деформаций для твердых тканей [90, 13, 21] и остаточные напряжения для мягких тканей, являющиеся обязательным условием роста [50, 7, 8, 10, 16].

4. Модели, учитывающие зависимость скорости роста от механических напряжений

Модели, о которых пойдет речь в данном разделе, являются чисто механическими в том смысле, что они имеют дело только с механическими (кинематическими и динамическими) переменными. Среда в этих моделях, по существу, трактуется как однофазная, причем ее перемещения связываются с твердым каркасом (жидкая фаза присутствует или неявно подразумевается только как субстанция, обеспечивающая доставку новой массы) [90].

Для описания свойств материала в данных моделях вводится понятие «растущего континуума» [21], т.е. материала, который допускает наряду с традиционными в механике типами деформаций (упругой или неупругой) еще ростовую деформацию. Под ростовой деформацией подразумевается неупругое изменение объема, формы и структуры частиц среды, обусловленное приращением и перераспределением ее массы.

По-видимому, первая континуальная динамическая модель растущего материала была предложена F.H. Hsu в его работе «Влияние механических сил на форму растущего упругого тела» В ходе экспериментов, провидимых Hsu на тканях растений и животных, была установлена зависимость скорости роста тела, т.е. скорости изменения его формы, от прилагаемых к телу объемных и поверхностных сил. Данная биолого-механическая зависимость в дальнейшем была выражена дифференциально определяющими соотношениями роста ткани.

В общем случае выражение, определяющее изменение формы тела при его росте, записано в виде

$$d = f\left(t, \rho, \dot{\rho}, s, \dot{s}\right), \tag{7}$$

где t – время, поскольку ростовые свойства зависят от возраста материала; ρ, $\dot{\rho}$ – плотность материала и изменение плотности за время t; s, $\dot{s}$ – напряжения и изменения напряжений в материале за время t.

Поскольку под ростом понимается достаточно медленный процесс, силами инерции пренебрегают, этим объясняется отсутствие инерционных параметров. Выражение (7) определяет поведение растущего материала. Выбор начального момента $\left.(\rho,\, s)\right|_{t=0}$ произволен, поскольку рост тела определяется текущими механическими условиями и не зависит от истории нагружения. Случай, когда напряжения и изменение напряжений s, $\dot{s}$ равны нулю, означает нормальный рост.

Далее в работе приводятся некоторые рассуждения, касающиеся зависимости ростовых свойств материала от возраста. Иными словами, предполагается, что влияние напряжений на ростовые свойства материала зависит не только от механических свойств, но и от возраста материала. «Эффективные напряжения» в материале могут быть записаны как произведения механических напряжений и функции времени. С учетом предположения, что нормальный рост – это функция времени и постоянство плотности, выражение (7) может быть записано в виде

$$d(t)=A_1(t)+A_2(t)s+A_3(t)\dot{s}. \qquad (8)$$

В дальнейшем данная теория была развита А.А. Штейном [18] в его работах. Отправной точкой является декомпозиция тензора скорости полной деформации на упругую и ростовую (неупругую) компоненты:

$$\xi=\xi_e+\xi_g. \qquad (9)$$

Выражение для тензора скорости ростовой деформации представимо в виде

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{g}}=\mathbf{A}+\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}. \qquad (10)$$

При этом упругая компонента подчиняется закону Гука

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{e}}=K\boldsymbol{\sigma}. \qquad (11)$$

В общем случае выражение для тензора скорости ростовой деформации может быть записано в виде

$$\xi_{kl}=A_{kl}+B_{klmn}\sigma^{mn}+\frac{d}{dt}(B_{klmn}\sigma^{mn}), \qquad (12)$$

где A_{kl} – скорость собственного роста; B_{klmn} – тензор упругих коэффициентов, отвечающий за влияние напряжений на ростовую деформацию. Напряжения в выражении (12) удовлетворяют уравнениям равновесия.

Предполагается, что деформации настолько малы, что производной по времени можно пренебречь и принять параметры материала постоянными для рассматриваемого интервала времени. В случае изотропии материала и предположения о малости деформаций выражение (12) можно упростить и записать в виде

$$\xi_{kl}=A\delta_{kl}+B\sigma_{kl}, \qquad (13)$$

где δ_{kl} – символ Кронекера; A – параметр собственного роста; B – параметр, отвечающий за влияние напряжений на ростовую деформацию.

Предположение об изотропии материала позволило вычислить параметры A, B экспериментально, что представлено в работе Масич А.Г. [21].

5. Новая формулировка механической модели роста

Следует отметить, что ростовая деформация $\boldsymbol{\varepsilon}^g$ может быть рассмотрена как один из видов собственной деформации [14]. Из предположения малости деформаций полная деформация системы будет равна сумме упругой $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ и ростовой деформаций ($\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^g$). Появление ростовой деформации в системе, вообще говоря, может изменить напряжения в системе. Напряжения, создаваемые собственной деформацией при отсутствии внешних сил, называют собственными напряжениями. Если тело свободно от опор, то собственные напряжения будут самоуравновешены, и тогда их называют остаточными напряжениями.

В работе А.Г. Масич, исследование которой посвящено вычислению параметров определяющего соотношения (13), принято предположение об изотропии материала и роста, что позволило заменить тензоры на скалярные величины, которые в ее исследовании были определены. Однако данное определяющее соотношение не исключает возникновения собственных напряжений в ткани в процессе роста. Авторами данной статьи предложена новая формулировка определяющего соотношения (13), из которой следует, что собственная (ростовая) деформация не вызывает собственных напряжений в ткани. Условие отсутствия собственных напряжений является необходимым при разработке алгоритма управления ростовыми деформациями [19].

Поэтому, применяя гипотезу об изотропии материала и закон Гука, определяющее соотношение для $\boldsymbol{\xi}^g$ можно записать в виде (14)

$$\boldsymbol{\xi}^g = A\mathbf{I} + M\boldsymbol{\varepsilon}^e, \tag{14}$$

$$M = B/E, \tag{15}$$

где A, M – константы; $\mathbf{I}$ – единичный тензор; E – модуль упругости материала.

Далее показано, что ростовая деформация, соответствующая формуле (1), не вызывает собственных напряжений в ткани и может быть найдена как

$$\boldsymbol{\xi}^g dt = A\mathbf{I}dt + M\boldsymbol{\varepsilon}^e dt. \tag{16}$$

Действительно, слагаемое $A\mathbf{I}dt$ аналогично равномерному температурному нагреву, который не вызовет напряжений в теле при определенных граничных условиях. Что касается слагаемого $M\boldsymbol{\varepsilon}^{e}dt$, то в данном случае применима теорема о собственной деформации, вызванной механическими силами в линейно-упругом теле и потому свободной от напряжений. Тогда, если внешние силы не меняются, скорость ростовых деформаций не изменится. В таком случае интегрирование на каждом временном шаге можно заменить произведением на время и записать определяющее соотношение для ростовой деформации в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{g} = A\mathbf{I}T + MT\boldsymbol{\varepsilon}^{e}. \tag{17}$$

где T – время.

Заключение

Изучение проблемы биомеханического моделирования ростовых процессов в тканях, анализ публикаций, в которых предложены различные модели механизма роста живых тканей и модели управления данным процессом, позволяют сделать вывод, что подходы к математической интерпретации процесса роста живой ткани различны, однако во всех случаях биологическое понятие роста включает в себя два основных макроскопических процесса – изменение объема и приток массы. Математическая формализация представлений о растущей среде представлена механическими и физико-химическими моделями роста живых тканей. В настоящее время физико-химические модели и модели, учитывающие влияние остаточных напряжений на скорость роста, сложны в реализации, поскольку параметры модели не представляется возможным определить с достаточной точностью.

Из анализа литературных данных можно выделить факторы, влияющие на рост: химический состав, концентрация, транспорт и напряжения в материале тела. Механические напряжения, возникающие в теле при приложении к нему внешних механических сил, являются существенным фактором, оказывающим влияние на рост. Из определяющего соотношения, сформулированного авторами, следует, что ростовая деформация не вызывает остаточных напряжений в ткани. Тогда с точки зрения механики становится возможным моделирование и управление ростом.

Библиографический список

1. Ambrosi D., Vitale G. The theory of mixtures for growth and remodeling compression // Mini-Workshop: The mathematics of growth and remodelling of soft biological tissues. – 2008. – No. 39 – P. 9–10.

2. Ateshian G.A. The role of mass balance equations in growth mechanics illustrated in surface and volume dissolutions // Journal of Biomechanics Engineering. – 2011 – Vol. 133. – No. 1 – P. 381–390.

3. The correspondence between equilibrium biphasic and triphasic material properties in mixture models of articular cartilage / G.A. Ateshian, N.O. Chahine, I.M. Basalo, C.T. Hung // Journal of Biomechanics. – 2004. – Vol. 37. – No. 3 – P. 391–400.

4. Chuong C.J., Fung Y.C. On residual stresses in arteries // Journal of Biomechanical Engineering. – 1986. – Vol. 108. – P. 189–192.

5. Residual Strain Effects on the Stress Field in a Thick Wall Finite Element Model of the Human Carotid Bifurcation / A. Delfino, N. Stergiopulos, J.E. Moore, J.J. Meister // Journal of Biomechanics. – 1997. – Vol. 30. – No. 8 – P. 777–786.

6. Elastic growth models / A. Goriely, M. Robertson-Tessi, M. Tabor, R. Vandiver // Program in Applied Mathematics. RUMMBA, University of Arizona, 2010. – 45 p.

7. Experimental Investigation of the Distribution of Residual Strains in the Artery Wall / S.E. Greenwald, J.E. Moore, A. Rachev, T.P.C. Kane, J.J. Meister // Transactions of the ASME. Journal of Biomechanical Engineering. – 1997. – Vol. 119 – P. 438–444.

8. Hoger A. Residual Stress in an Elastic Body: a Theory for Small Strains and Arbitrary Rotations // Journal of Elasticity. – 1993. – Vol. 31 – P. 1–24.

9. Hsu F. The influence of mechanical loads on the form of a growing elastic body // Journal of Biomechanics. – 1968. – Vol. 1. – No. 4. – P. 303–311.

10. Klarbring A., Olsson T., Stalhad J. Theory of residual stresses with application to an arterial geometry // Arch. Mech. – 2007. – Vol. 59. – No. 4 – P. 341–364.

11. Lanyon L.E., Magee P.T., Baggott D.G. The relationship of functional stress and strain to the processes of bone remodelling. An experimental study on the sheep radius // J. Biomech. – 1979. – Vol. 12. – No. 8 – P. 593–600.

12. Lockhart J.A. An analysis of irreversible plant cell elongation // J. Theoretical Biology. – 1965. – Vol. 8. – No. 2 – P. 264–275.

13. Lubarda A., Hoger A. On the mechanics of solids with a growing mass // International Journal of Solids Structure. – 2002. – Vol. 39.

14. Mura T. Micromechanics of Defects in Solids. – Dordrecht: Kluwer Academic Publ, 1991.

15. Rodriguez E.K., Hoger A., McCulloch A.D. Stress-dependent finite growth in soft elastic tissues // Journal Biomech. – 1994. – Vol. 27. – No. 4 – P. 455–467.

16. Taber L.A., Eggers D.W. Theoretical Study of Stress-Modulated Growth in the Aorta // Journal of Theoretical Biology. – 1996. – Vol. 180. – P. 343–357.

17. Кизилова Н.Н., Логвенков С.А., Штейн А.А. Математическое моделирование транспортно-ростовых процессов в многофазных биологических сплошных средах // Механика жидкости и газа. – 2012. – № 1 – С. 3–13.

18. Логвенков С.А., Штейн А.А. Управление биологическим ростом как задача механики // Российский журнал биомеханики. – 2006. – Т. 10, № 2. – С. 9–19.

19. Лохов В.А., Долганова О.Ю. Алгоритм поиска оптимальных усилий для лечения двусторонней расщелины твердого неба // Российский журнал биомеханики. – 2012. –Т. 16, № 3 (57). – С. 42–56.

20. Лычев С.А. Краевые задачи механики растущих тел и тонкостенных конструкций: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М., 2012. – 32 с.

21. Масич А.Г. Математическое моделирование ортопедического лечения врожденной расщелины твердого неба у детей: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Пермь, 2000. – 132 с.

22. Регирер С.А., Штейн А.А. Методы механики сплошной среды в применении к задачам роста и развития биологических тканей // Современные проблемы биомеханики. – 1985. – Т. 2 – С. 5–67.

23. Штейн А.А., Юдина Е.Н. Математическая модель растущей растительной ткани как трехфазной деформируемой среды // Российский журнал биомеханики – 2011. – Т. 15, № 1 – С. 42–51.

References

1. Ambrosi D., Vitale G. The theory of mixtures for growth and remodeling compression. *Mini-Workshop: The mathematics of growth and remodelling of soft biological tissues*, 2008, no. 39, pp. 9-10.

2. Ateshian G.A. The role of mass balance equations in growth mechanics illustrated in surface and volume dissolutions. *Journal of Biomechanics Engineering*, 2011, vol. 133, no. 1, pp. 381-390.

3. Ateshian G.A., Chahine N.O., Basalo I.M., Hung C.T. The correspondence between equilibrium biphasic and triphasic material properties in mixture models of articular cartilage. *Journal of Biomechanics*, 2004, vol. 37, no 3, pp. 391-400.

4. Chuong C.J., Fung Y.C. On residual stresses in arteries. *Journal of Biomechanical Engineering*, 1986, vol. 108, pp. 189-192.

5. Delfino A., Stergiopulos N., Moore J.E., Meister J.J. Residual Strain Effects on the Stress Field in a Thick Wall Finite Element Model of the Human Carotid Bifurcation. *Journal of Biomechanics*, 1997, vol. 30, no. 8, pp. 777-786.

6. Goriely A., Robertson-Tessi M., Tabor M., Vandiver R. Elastic growth models. *Program in Applied Mathematics.* RUMMBA, University of Arizona, 2010, 45 p.

7. Greenwald S.E., Moore J.E., Rachev A., Kane T.P.C., Meister J.J. Experimental Investigation of the Distribution of Residual Strains in the Artery Wall. Transactions of the ASME. *Journal of Biomechanical Engineering*, 1997, vol. 119, pp. 438-444.

8. Hoger A. Residual Stress in an Elastic Body: a Theory for Small Strains and Arbitrary Rotations. *Journal of Elasticity*, 1993, vol. 31, pp. 1-24.

9. Hsu F. The influence of mechanical loads on the form of a growing elastic body. *Journal of biomechanics*, 1968, vol. 1, no. 4, p. 303-311.

10. Klarbring A., Olsson T., Stalhad J. Theory of residual stresses with application to an arterial geometry. *Arch. Mech.*, 2007, vol. 59, no. 4, pp. 341-364.

11. Lanyon L.E., Magee P.T., Baggott D.G. The relationship of functional stress and strain to the processes of bone remodelling. An experimental study on the sheep radius. *J. Biomech.*, 1979, vol. 12, no. 8, pp. 593-600.

12. Lockhart J.A. An analysis of irreversible plant cell elongation. *J. Theoretical Biology*, 1965, vol. 8, no. 2, pp. 264-275.

13. Lubarda A., Hoger A. On the mechanics of solids with a growing mass. *International Journal of Solids Structure*, 2002, vol.39.

14. Mura T. Micromechanics of Defects in Solids. Dordrecht: Kluwer Academic Publ, 1991.

15. Rodriguez E.K., Hoger A., McCulloch A.D. Stress-dependent finite growth in soft elastic tissues. *Journal Biomechanics*, 1994, vol. 27, no. 4, pp. 455-467.

16. Taber L.A., Eggers D.W. Theoretical Study of Stress-Modulated Growth in the Aorta. *Journal of Theoretical Biology*, 1996, vol. 180, pp. 343-357.

17. Kizilova N.N., Logovenkov S.A., Stein A.A. Matematicheskoe modelirovanie transportno-rostovykh protsessov v zhivykh tkanyakh [Mathematical modeling of transport and the growth processes in multiphase biological continuum media]. *Mechanica zhidkosti i gaza*, 2012, no. 1, pp. 3-13.

18. Logvenkov S.A., Stein A.A. Upravlenie zhivym rostom kak zadacha mekhaniki [Management of biological growth as a problem of the mechanics]. *Rossiiskij journal biomechaniki*, 2006, vol. 10, no. 2, pp. 9-19.

19. Lochov V.A., Dolganova O.Y. Algoritm poiska optimalnykh usilij dlya lecheniya dvustoronnej rasshcheliny tverdogo neba [Optimum force-searching algoritm for ortopaedic treatment of two-sided cleft of the hard palate]. *Rossiiskij journal biomechaniki*, 2012, vol. 16, no. 3 (57), pp. 42-56.

20. Lichev S.A. Kraevye zadachi mekhaniki rastushikh tel i tonkostennykh konstruktsij [Boundary value problems in mechanics of growing solids and thin-walled structures]. *Abstract of the thesis of the doctors dissertation physical and mathematics sciences.* Moscow, 2012. 32 p.

21. Masich A.G. Matematicheskoe modelirovanie ortopedicheskogo lecheniya vrozhdennoj rascheliny tverdogo neba [Mathematical modeling of orthopedic treatment of congenital cleft palate in children]. *Thesis of the candidate dissertation physical and mathematics sciences.* Perm, 2000. 132 p.

22. Regirer S.A., Stein A.A. Metody mekhaniki sploshnoj sredy v primenenii k zadacham rosta i razvitiya biologicheskikh tkanej [Methods of continuum mechanics applied to the objectives of the growth and development of the biological tissue]. *Sovremennye problemi biomechaniki*, 1985, vol. 2, pp. 5-67.

23. Stein A.A., Yudina E.N. Matematicheskaya model rastuschej rastitelnoj tkani kak trekhfaznoj deformiruemoj sredy [Mathematical model of the growing plant tissue as three-phase of a deformable medium]. *Rossijskij zhurnal biomekhaniki*, 2011, vol. 15, no. 1, pp. 42-51.

Об авторах

Долганова Ольга Юрьевна (Пермь, Россия) – аспирант кафедры теоретической механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: aoy85@yandex.ru)

Лохов Валерий Александрович (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: valeriy.lokhov@yandex.ru)

About the authors

Olga Yu. Dolganova (Perm, Russian Federation) – Doctoral Student of Department of Theoretical Mechanics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., 614990, Perm, Russian Federation, e-mail: aoy85@yandex.ru).

Valeriy A. Lokhov (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physics and Mathematics Sciences, Department of Theoretical Mechanics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., 614990, Perm, Russian Federation, e-mail: valeriy.lokhov@yandex.ru).

Получено 27.01.2014

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Долганова О.Ю., Лохов В.А. Математические модели ростового деформирования // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 1. – С. 126–141.

Please cite this article in English as:

Dolganova O.Y., Lokhov V.A. Mathematical models of growth deformation. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2013. No. 1. P. 126-141.