

УДК 532.133

С.Д. Анферов, О.И. Скульский, Е.В. Славнов

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА
ПРЯМОГО ОТЖИМА МАСЛИЧНОЙ КУЛЬТУРЫ**

В качестве объекта исследования выступала смесь измельченных зерен масличной культуры, пропитанных маслом, подвергавшихся деформированию при плунжерном прессовании. Целью моделирования было определение скорости оттока растительного масла при заданных условиях нагружения. Обрабатываемый материал в этой модели был представлен двухфазной смесью. Первой фазой был жмых масличной культуры, игравший роль пористого скелета. Растительное масло, насыщающее пористый скелет, являлось второй фазой среды. Для описания поведения материала был применен подход динамики многофазных сред. Для каждого из компонентов смеси были составлены балансовые уравнения. Фильтрация была описана введением силы межфазного взаимодействия. На основе проведенных ранее исследований для описания свойств пористого скелета и масла была использована модель вязкой жидкости. Вязкость пористого скелета предполагалась зависящей от давления. Численное решение задачи было выполнено в двумерной постановке для среднего сечения камеры отжима с применением метода конечных элементов. В качестве основных неизвестных величин выступали поля скорости и давления компонентов смеси. В соответствии с распространенным в подземной гидродинамике подходом пористость материала предполагалась зависящей от эффективного давления пористого скелета. Дискретизация области проводилась с помощью четырехугольных девятиузловых конечных элементов с линейным и квадратичным порядком аппроксимации полей давления и скорости соответственно. В полученных решениях распределение содержания масла по длине камеры отжима проявляет нелинейность при высоких внешних нагрузках. Также было показано, что значительное влияние на расход отжатого масла оказывает изменение пористости в процессе прессования.

Ключевые слова: отжим, пористая среда, фильтрация, двухфазная смесь, вязкая жидкость, метод конечных элементов.

S.D. Anferov, O.I. Skul'skiy, E.V. SlavnovInstitute of Continuous Media Mechanics UrB RAS,
Perm, Russian Federation**MATHEMATICAL MODELLING OF VEGETABLE OIL
PLUNGER EXTRACTION**

The research relates to studying a mixture of grained oilseeds saturated with oil and deformed with plunger molding. Mathematical simulations aim was determination of oil extraction velocity under the set loading conditions. Current statement treats processed material as biphasic mixture. Oilseed cake presented the first phase, which also was material's porous skeleton. Vegetable oil filling the porous skeleton was the second phase of the mixture. Multiphase dynamics approach was applied in current research for material behavior description. Balance equations were set up for each mixture compo-

nents. Interfacial volumetric force introduction modelled filtration of liquid. According to former researches, viscous liquid model described properties of porous skeleton as well as properties of vegetable oil. Porous skeleton viscosity assumed to be pressure dependent. Numerical solution of problem was carried out in two-dimensional statement for expression chamber middlesection using finite element approach. The primary variables were constituent's velocity and pressure fields. Current study used cake pressure dependent porosity model that is common in porous media mechanics. Computational domain discretization was carried out using nine-node rectangular finite elements with linear and quadratic approximation for pressure and velocity fields respectively. Oil saturation distribution along expression chamber height obtained in numerical experiments demonstrates nonlinearity under high external loads. Moreover, the study investigated porosity changes influence on vegetable oil flow during expression.

Keywords: vegetable oil extraction, porous media, filtration, biphasic mixture, viscous liquid, finite element method.

Введение

Растительное масло широко применяется в пищевой промышленности и используется в качестве сырья для получения биологического дизельного топлива. Наиболее распространенным способом получения растительного масла является механический отжим семян масличных культур [1–6]. Семена в процессе отжима подвергаются значительным механическим нагрузкам, приводящим к их разрушению и высвобождению масла. Существует два основных вида механического отжима: плунжерное прессование [1, 2] и экструзионный отжим [3–6]. Данная статья посвящена первому из них.

Среди существующих на данный момент моделей процесса холодного отжима широко распространены полуэмпирические модели [4–6]. Также развитие получили аналитические подходы к решению задачи отжима, в том числе и в нелинейной постановке, но с рядом упрощающих допущений [7–9]. Модель, рассмотренная в этой статье, так же как и в работах [10–22], основывается на континуальном описании процесса деформирования масличной культуры.

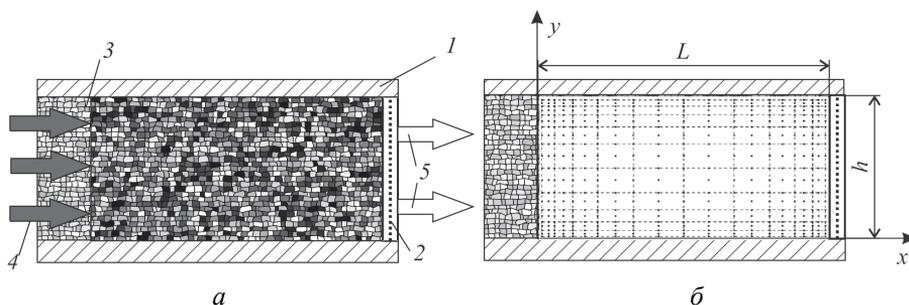


Рис. 1. Схема рабочей области плунжерного пресса для отжима масла (а): 1 – корпус плунжерного пресса; 2 – сито для разделения масла и жмыха; 3 – масличная культура; 4 – внешняя нагрузка; 5 – направление оттока отжатого масла; дискретизация рабочей области четырехугольными конечными элементами (б)

При плунжерном прессовании (рис. 1) внешняя нагрузка, прикладываемая к материалу, приводит к разрушению семян, а также создает перепад давления, необходимый для фильтрации насыщающей жидкости.

Установленное в правой части области сито препятствует выходу жмыха и позволяет собирать отжатое масло. Моделирование этого процесса осложняется нелинейностью свойств материала, а также изменением объемных долей составляющих.

1. Постановка задачи

В данной модели обрабатываемый материал предполагается состоящим только из жмыха семян масличной культуры и масла. В рассматриваемой смеси жмых играет роль пористого скелета, пустоты в котором заполнены фильтрующейся жидкостью, а именно маслом. В ходе отжима рабочая область плунжерного пресса считается полностью заполненной этой смесью, компоненты которой предполагаются химически не реагирующими между собой. В соответствии с условиями процесса прямого механического отжима к материалу посредством подвижного поршня прикладывается постоянная нагрузка, приводящая к оттоку масла через проницаемую стенку и изменению соотношения объемных долей составляющих смеси. Известно, что уменьшение количества масла в смеси приводит к увеличению сопротивления среды. Процесс отжима предполагается изотермическим. Малые скорости протекающих процессов позволяют считать течение смеси и ее составляющих ламинарным. Для описания насыщенной жидкостью пористой среды применяется подход динамики многофазных сред [10, 15, 22–24]. В качестве первой фазы выступает жмых масличной культуры, второй фазой является масло. Описание поведения среды выполнено в рамках Эйлера подхода, согласно которому наблюдение ведется за элементарным объемом пространства, в отличие от наблюдения за материальным объемом при Лагранжевом способе описания движения. Предполагается, что смесь полностью заполняет элементарный объем пространства, тем не менее каждая из фаз заполняет лишь часть этого объема. По этой причине в соответствии с подходом динамики многофазных сред [24] объемные или приведенные плотности каждой из фаз вводятся следующим образом [10, 24]:

$$\rho_i = \rho_i^o \cdot \alpha_i, \quad \alpha_i = \frac{V_i}{V}, \quad (1)$$

где ρ_i^o – истинная плотность фазы; α_i – объемная доля фазы; V_i – объем, занимаемый фазой; V – объем, занимаемый средой. Истинная плотность фазы может быть выражена следующим образом:

$$\rho_i^o = \frac{M_i}{V_i}, \quad (2)$$

где M_i – масса i -й фазы смеси; V_i – объем, занимаемый i -й фазой (индивидуальный объем). В рамках предложенной модели, материал каждой из фаз предполагается несжимаемым. Это означает, что истинные плотности компонентов смеси остаются неизменными, тогда как объемные плотности (приведенные плотности) могут меняться вследствие перераспределения компонентов смеси в пространстве. Также выполняется следующее ограничение на объемные доли составляющих смеси:

$$\sum_i \alpha_i = 1. \quad (3)$$

Поскольку процесс отжима сопряжен с активным механическим воздействием на пористый скелет, в данной модели учитываются неупругие деформации пористого скелета. В близких по тематике работах [18, 20, 21] деформации пористого скелета не учитываются, а в работах [14, 25] деформации пористого скелета предполагаются малыми и упругими.

При моделировании поведения среды границы раздела фаз не учитываются, что приводит к модели двухкомпонентной смеси. Тем не менее уравнения баланса количества движения и неразрывности должны быть записаны для каждого из компонентов смеси. В рассматриваемой постановке влияние силы тяжести не учитывается. Описание движения среды выполнено в двумерной постановке для среднего сечения рабочей области плунжерного прессы. Уравнения неразрывности и баланса количества движения в стационарном случае принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{v}_i) = 0, \\ \rho_i \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i + \mathbf{F}_{ji}, \end{cases} \quad (4)$$

где σ_i – тензор напряжений Коши i -й составляющей смеси; F_{ji} – сила межфазного взаимодействия, возникающая из-за сопротивления пористого скелета движению жидкости фильтрующейся сквозь него. Реометрические испытания семян масличных культур, подвергнутых отжиму [1, 2], показали, что определяющее соотношение вязкой жидкости является подходящим для описания такого материала. Общие напряжения в материале могут быть представлены в следующем виде:

$$\sigma = \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2. \quad (5)$$

Каждый из компонентов смеси представляет собой вязкую жидкость, причем вязкость масла предполагается постоянной, а вязкость жмыха считается зависящей от давления [2, 26, 27].

$$\sigma_i = -P_i \mathbf{I} + 2\mu_i \mathbf{D}_i, \quad (6)$$

$$\mu_1 = \mu_0 \text{Exp}[a_\mu (P - P_0)]. \quad (7)$$

В выражении (7) μ_0 – вязкость пористого скелета при отсчетном давлении P_0 ; a_μ – коэффициент изменения вязкости; P_i – давление i -й составляющей смеси. Таким образом, вводится гипотеза о том, что рост сопротивления смеси обусловлен увеличением вязкости пористого скелета.

Взаимодействие составляющих смеси, как отмечалось ранее, осуществляется посредством силы межфазного взаимодействия. В данном случае аналогично [23, 28] эта сила предполагается прямо пропорциональной скорости относительного движения компонентов вязкости фильтруемой жидкости μ_2 , а также объемной доли фильтруемой жидкости в соответствии с [22–24]. Итоговое выражение для силы межфазного взаимодействия может быть записано в следующем виде:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mu_2 \cdot (\alpha_2)^2 r_{12} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1), \quad \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}. \quad (8)$$

В выражении (8) r_{12} – проницаемость среды. Эта величина предполагается постоянной, так же как в работах [19, 20]. Система уравнений (4) в стационарном случае с учетом определяющих соотношений (6), (7) и выражения для силы межфазного взаимодействия (8), а также (1) и (3) принимает вид

$$\begin{cases} \nabla((1-\alpha_2)\mathbf{v}_i)=0, \\ \nabla(\alpha_2\mathbf{v}_i)=0, \\ \overset{\circ}{\rho}(1-\alpha_2)\mathbf{v}_2 \cdot \nabla\mathbf{v}_2 = -\nabla P_1 + \nabla \cdot (2\mu_1(P_1)\mathbf{D}_1) - \mu_2(\alpha_2)^2 r_{12}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \\ \overset{\circ}{\rho}_2\alpha_2\mathbf{v}_2 \cdot \nabla\mathbf{v}_2 = -\nabla P_2 + 2\mu_2\nabla \cdot \mathbf{D}_2 - \mu_2(\alpha_2)^2 r_{12}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \end{cases} \quad (9)$$

Система (9) не является замкнутой, поэтому необходимо ввести дополнительное уравнение, связывающее содержание масла с параметрами процесса. В данном случае пористая среда предполагается полностью насыщенной жидкостью, поэтому объемная доля пор совпадает с объемной долей фильтрующейся жидкости [10, 14]:

$$m = \frac{V_p}{V} = \frac{V_2}{V} = \alpha_2, \quad (10)$$

где m – объемная доля пор, или пористость [23]; V_p – объем пор; V – объем, занятый смесью. Таким образом, согласно выражению (10) с учетом ограничения (3) изменение пористости материала неизбежно приводит к изменению объемных долей фаз, а также, как видно из выражения (1), к приведенной плотности материала. Согласно [23] используется следующая зависимость пористости материала от давления:

$$m = m_0 \text{Exp}[a_m(P_1 - P_0)], \quad (11)$$

где m_0 – начальная пористость при отсчетном давлении P_0 ; a_m – коэффициент изменения пористости. Применение уравнения (11) с учетом (10) позволяет замкнуть систему (9). В работах [10, 14, 29] можно найти альтернативные способы определения изменения пористости при деформировании пористого скелета.

Помимо этого, система (9) должна быть дополнена граничными условиями. Как было отмечено ранее, к материалу прикладывается постоянная нагрузка на одной границе области, что может быть записано следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}. \quad (12)$$

Выражение (12) с учетом допущения аддитивности напряжений (5) может быть преобразовано к виду [24]

$$\begin{aligned}
 &(\alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}, \\
 &\alpha_1 \sigma_1 \cdot \mathbf{n} + \alpha_2 \sigma_2 \cdot \mathbf{n} = \alpha_1 \mathbf{t} + \alpha_2 \mathbf{t} \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \sigma_1 \cdot \mathbf{n} = \alpha_1 \mathbf{t}, \\ \alpha_2 \sigma_1 \cdot \mathbf{n} = \alpha_2 \mathbf{t}, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}, \\ \sigma_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}. \end{array} \right.
 \end{aligned} \tag{13}$$

При выводе (13) используется предположение о том, что нагрузка, прикладываемая к материалу, распределяется между составляющими пропорционально их объемным долям. На боковых стенках задаются условия прилипания для каждого из компонентов смеси:

$$v_i = 0, i = 1, 2. \tag{14}$$

Другая стенка области, представляющая собой мелкоячеистое сито, предполагается полностью проницаемой для масла и непроницаемой для жмыха. По этой причине на ней для пористого скелета задаются условия прилипания (15), а для масла определяются условия свободной границы (16):

$$v_1 = 0, \tag{15}$$

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{16}$$

2. Численная реализация

В качестве численного метода решения системы уравнений (9) с граничными условиями (13)–(16) был выбран широко используемый [12, 13, 15–18, 25] метод конечных элементов [30]. Расчетная область была покрыта сеткой из девятиузловых конечных элементов со сгущением по направлению к границам области. В данном случае применяется формулировка Галеркина, использующая ортогонализацию невязки. Система исходных уравнений для типичного конечного элемента площади Ω^e принимает вид

$$\int_{\Omega^e} Q_i \left(\frac{\partial(\alpha_i(P_1)v_{ix})}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha_i(P_1)v_{iy})}{\partial y} \right) dx dy = 0, \tag{17}$$

$$\int_{\Omega^e} w_{ix} \left\{ \overset{\circ}{\rho}_i \alpha_i(P_1) \left(v_{ix} \frac{\partial v_{ix}}{\partial x} + v_{iy} \frac{\partial v_{ix}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu_i \frac{\partial v_{ix}}{\partial x} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_i \left(\frac{\partial v_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial v_{iy}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial P_i}{\partial x} + \mu_2 (\alpha_2(P_1))^2 r_{12} (v_{ix} - v_{jx}) \right\} dx dy = 0, \quad (18)$$

$$\int_{\Omega^e} w_{iy} \left\{ \overset{\circ}{\rho}_i \alpha_i(P_1) \left(v_{ix} \frac{\partial v_{iy}}{\partial x} + v_{iy} \frac{\partial v_{iy}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu_i \frac{\partial v_{iy}}{\partial y} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_i \left(\frac{\partial v_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial v_{iy}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial P_i}{\partial y} + \mu_2 (\alpha_2(P_1))^2 r_{12} (v_{iy} - v_{jy}) \right\} dx dy = 0, \quad (19)$$

где i – номер рассматриваемого компонента смеси; j – номер оставшегося компонента смеси; (Q_i, w_{ix}, w_{iy}) весовые функции метода Галеркина для неизвестных (P_i, v_{ix}, v_{iy}) соответственно. К уравнениям (18), (19) для понижения порядка дифференцирования может быть применена теорема Гаусса–Остроградского [30]. Уравнение (17) остается неизменным, то же относится и к первым членам уравнений (18), (19). Окончательно уравнения (18), (19) в ослабленной форме принимает следующий вид:

$$\int_{\Omega^e} \left[w_{ix} \overset{\circ}{\rho}_i \alpha_i(P_1) \left(v_{ix} \frac{\partial v_{ix}}{\partial x} + v_{iy} \frac{\partial v_{ix}}{\partial y} \right) + 2\mu_i \frac{\partial w_{ix}}{\partial x} \frac{\partial v_{ix}}{\partial x} - \frac{\partial w_{ix}}{\partial x} P_i + \right. \\ \left. + \mu_i \frac{\partial w_{ix}}{\partial y} \left(\frac{\partial v_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial v_{iy}}{\partial x} \right) + \mu_2 (\alpha_2(P_1))^2 r_{12} w_{ix} (v_{ix} - v_{jx}) \right] dx dy - \int_{\Gamma^e} w_{ix} t_{ix} ds = 0, \quad (20)$$

$$\int_{\Omega^e} \left[w_{iy} \overset{\circ}{\rho}_i \alpha_i(P_1) \left(v_{ix} \frac{\partial v_{iy}}{\partial x} + v_{iy} \frac{\partial v_{iy}}{\partial y} \right) + 2\mu_i \frac{\partial w_{iy}}{\partial y} \frac{\partial v_{iy}}{\partial y} - \frac{\partial w_{iy}}{\partial y} P_i + \right. \\ \left. + \mu_i \frac{\partial w_{iy}}{\partial x} \left(\frac{\partial v_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial v_{iy}}{\partial x} \right) + \mu_2 (\alpha_2(P_1))^2 r_{12} w_{iy} (v_{iy} - v_{jy}) \right] dx dy - \int_{\Gamma^e} w_{iy} t_{iy} ds = 0, \quad (21)$$

где t_{ix}, t_{iy} – компоненты усилий i -й составляющей смеси на границе конечного элемента. Для компонентов усилий справедливы следующие выражения:

$$\begin{aligned} t_{ix} &= \left(2\mu_i \frac{\partial v_{ix}}{\partial x} - P_i \right) n_x + \mu_i \left(\frac{\partial v_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial v_{iy}}{\partial x} \right) n_y, \\ t_{iy} &= \mu_i \left(\frac{\partial v_{ix}}{\partial y} + \frac{\partial v_{iy}}{\partial x} \right) n_x + \left(2\mu_i \frac{\partial v_{iy}}{\partial y} - P_i \right) n_y, \end{aligned} \quad (22)$$

где n_x, n_y – направляющие косинусы вектора единичной внешней нормали \mathbf{n} к поверхности Γ^e . Уравнение (17) с учетом выражений (10)–(11) может быть преобразовано к следующему виду:

$$\int_{\Omega^e} Q_i \left(\alpha_i(P_1) \frac{\partial v_{ix}}{\partial x} + \alpha_i(P_1) \frac{\partial v_{iy}}{\partial y} + (-1)^i a_m \alpha_2(P_1) \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} v_{ix} + \frac{\partial P_1}{\partial y} v_{iy} \right) \right) dx dy = 0. \quad (23)$$

Поскольку при решении используется метод конечных элементов в постановке Галеркина, набор весовых функций совпадает с набором функций аппроксимации соответствующих полей давления и скорости. Неизвестные переменные могут быть аппроксимированы следующим образом:

$$v_{ix}(x, y) = \sum_{m=1}^M \psi_m(x, y) v_{ix}^m, \quad v_{iy}(x, y) = \sum_{m=1}^M \psi_m(x, y) v_{iy}^m, \quad (24)$$

$$P_i(x, y) = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x, y) P_i^n, \quad (25)$$

где ψ и φ – функции формы; $(v_{ix}^m, v_{iy}^m, P_i^n)$ – узловые значения неизвестных величин (v_{ix}, v_{iy}, P_i) ; i – номер составляющей смеси.

Таким образом, подстановка (24) и (25) в (20), (21), (23) сводит исходную задачу к решению системы нелинейных алгебраических уравнений относительно узловых значений неизвестных величин из (24)–(25). В качестве метода решения этой системы был использован итерационный алгоритм Пикара [30], согласно которому уточненное решение $\{u\}^r$ на шаге r может быть вычислено на основании предыдущего решения $\{u\}^{r-1}$ следующим образом:

$$\{u\}^r = \left[K(\{u\}^{(r-1)}) \right]^{-1} \{F\}. \quad (26)$$

В выражении (26) $\left[K(\{u\}^r) \right]$ представляет собой глобальную матрицу жесткости рассматриваемой системы уравнений вычисленную при конкретных узловых значениях неизвестных величин $\{u\}^r$. Критерий сходимости метода Пикара может быть представлен следующим образом:

$$\sqrt{\frac{\sum_{I=1}^N (u_I^{(r)} - u_I^{(r-1)})^2}{\sum_{I=1}^N (u_I^{(r)})^2}} < \varepsilon, \quad (27)$$

где ε – требуемая точность решения. Несмотря на меньшую скорость сходимости метода Пикара по сравнению с методом Ньютона-Рафсона, меньшие вычислительные затраты одной итерации позволяют сохранить время счета приемлемым. В качестве начального приближения было использовано решение линеаризованной задачи для случая постоянной пористости материала и постоянной вязкости скелета без учета конвективных слагаемых и взаимодействия фаз. Требуемая точность решения согласно критерию (27) была выбрана $\varepsilon=10^{-12}$.

3. Результаты

Следует отметить, что при такой постановке задачи функции формы, используемые для аппроксимации давления каждой из составляющих смеси, должны быть на один порядок ниже порядка функций, используемых для аппроксимации скорости [30, 31]. Известно, что использование функций формы одного и того же порядка для всех неизвестных приводит к неточным решениям [2]. В данной работе были использованы девятиузловые конечные элементы с квадратичным порядком аппроксимации скорости и линейным порядком аппроксимации давления. Выбор конечных элементов был обусловлен необходимостью выполнения критерия допустимости элементов LBB (Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi) [30–32].

Расчетная область размером $0,2 \times 0,1$ м была покрыта сеткой из 10×10 девятиузловых прямоугольных конечных элементов со сгущением к границам области. Атмосферное давление было выбрано в ка-

честве отсчетного уровня, поэтому в выражениях (7), (11) $P_0=0$. Следующие параметры модели были неизменными при численных расчетах: истинная плотность пористого скелета $\rho_1^0=10^3$ кг/м³, истинная плотность масла $\rho_2^0=750$ кг/м³, вязкость масла $\mu_2=10^4$ кг/(м·с), начальная пористость (начальное содержание масла) $m_0=0,7$. Пористость материала и, как следствие, объемные доли компонентов смеси определялись в соответствии с выражением (11) на основании рассчитанного на предыдущей итерации поля давления пористого скелета.

Целью первых двух серий расчетов было определение влияния оттока масла на процесс плунжерного отжима. Первая из них была проведена для случая постоянной вязкости пористого скелета, во второй серии вязкость пористого скелета предполагалась зависящей от давления. Каждая из них проводилась при различных внешних нагрузках – 50, 110, 170, 250 атм. Среда предполагалась легкосжимаемой с коэффициентом изменения пористости $a_m=-8,47\cdot 10^{-9}$ 1/Па [23, 33].

Для определения влияния коэффициента изменения пористости на процесс плунжерного отжима была проведена третья серия расчетов. В каждом численном эксперименте величина внешней нагрузки была постоянной $t=110$ атм, коэффициент изменения пористости a_m принимал значения от $-8,47\cdot 10^{-9}$ до $-8,47\cdot 10^{-10}$ 1/Па. Ниже приведены результаты проведенных расчетов.

Постоянная вязкость

Первая серия расчетов была проведена для постоянной вязкости пористого скелета μ_1 , которая была принята равной 10^5 кг/(м·с). На рис. 2 представлены распределения эффективного давления пористого скелета и эффективного давления масла по длине при различных значениях внешней нагрузки. Под эффективным давлением понимается произведение давления i -го компонента смеси P_i и объемной доли соответствующего компонента α_i .

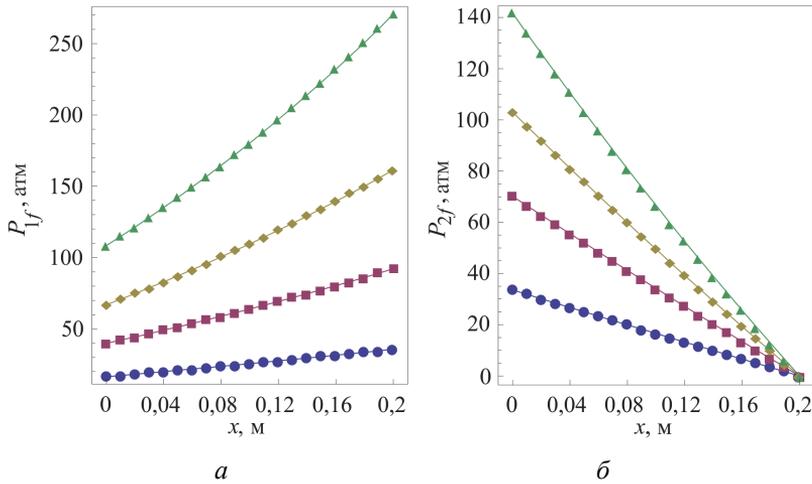


Рис. 2. Распределение по длине (x) эффективного давления пористого скелета P_{1f} (а) и эффективного давления в масле P_{2f} (б) при внешних нагрузках t , равных: ● 50 атм; ■ 110 атм; ◆ 170 атм; ▲ 250 атм

На левой непроницаемой границе области, как и предполагалось, давление масла равно нулю, что соответствует отсчетному уровню давления. Нагрузка, приложенная к смеси, согласно предположениям динамики многофазных сред распределяется между ее составляющим пропорционально их объемным долям. По этой причине сумма эффективных давлений составляющих на левой стенке равна величине нагрузки, приложенной к материалу. Распределение давления масла остается линейным на всем диапазоне внешних нагрузок, тогда как давление пористого скелета проявляет нелинейность. На рис. 3 представлено распределение по длине общего давления $P_{\text{общ}}$, а также объемной доли масла α_2 , насыщающего пористый скелет при различных значениях внешней нагрузки. Общее давление смеси может быть определено следующим образом:

$$P_{\text{общ}} = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2. \quad (28)$$

Отклонение распределения общего давления смеси по длине от линейного закона более заметно (см. рис. 3), причем это отклонение усиливается с ростом внешней нагрузки. Представленные распределения общего давления имеют строго убывающий характер при внешней нагрузке, равной 50 и 110 атм. Начиная со 170 атм, возникает область повторного увеличения общего давления. С ростом внешней нагрузки

$P_{\text{общ}}$ на проницаемой стенке также увеличивается. Давления в этих двух областях становятся равными при величине внешней нагрузки, равной 190 атм.

Основной вклад в нелинейность поля общего давления вносит изменение содержания масла, что следует из (28) и общего характера распределений P_1 и P_2 . При данном коэффициенте изменения пористости в указанном диапазоне внешних нагрузок распределение содержания масла близко к линейному.

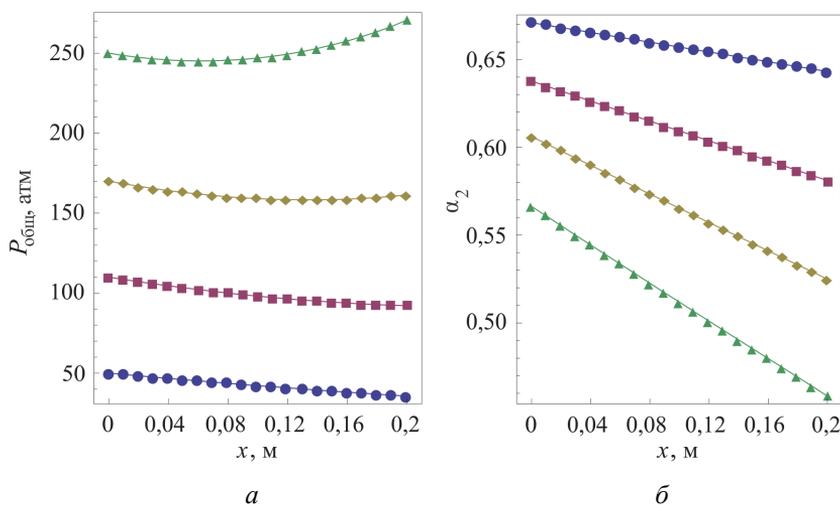


Рис. 3. Распределение по длине (x) эффективного давления материала в целом $P_{\text{общ}}$ (а) и объемной доли масла α_2 (б) при внешних нагрузках t , равных: ● 50 атм; ■ 110 атм; ◆ 170 атм; ▲ 250 атм

В левой части камеры отжима при $x \in [0,04; 0,2]$ скорость масла изменяется практически линейно; в правой части камеры отжима при $x \in [0,0; 0,04)$ наблюдается нелинейное уменьшение модуля скорости, что может быть вызвано снижением содержания масла в этой зоне (рис. 4). Примечателен факт существования максимума функции расхода масла [5] при величине внешней нагрузки, равной 210 атм (см. рис. 4). Последующее снижение объемного расхода масла может быть подтверждено экспериментально.

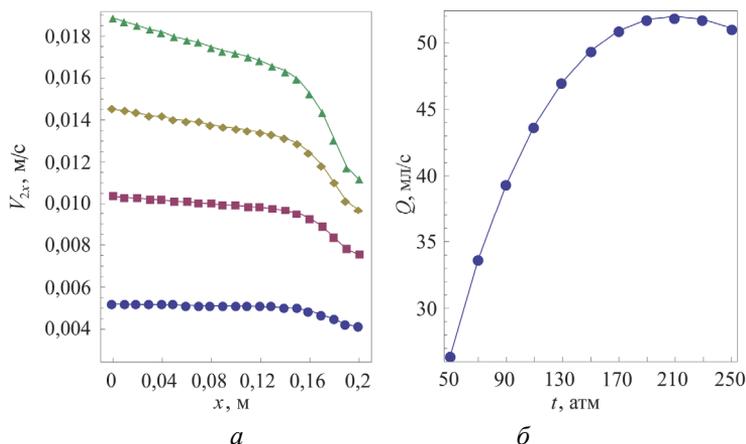


Рис. 4. Распределение по длине (x) горизонтальной составляющей скорости масла V_{2x} (а) и зависимость расхода отжатого масла Q от приложенной внешней нагрузки t (б) при внешних нагрузках t , равных: ● 50 атм; ■ 110 атм; ◆ 170 атм; ▲ 250 атм

Переменная вязкость

В этой серии численных экспериментов начальная вязкость пористого скелета μ_0 в каждом из расчетов была равна $10^5 \text{ кг}/(\text{м}\cdot\text{с})$, коэффициент изменения вязкости a_{μ} был равен $1,61 \cdot 10^{-8} \text{ 1/Па}$. По аналогии с предыдущей серией на последующих рисунках приведены распределения давления составляющих смеси, общего давления смеси, горизонтальной составляющей скорости масла. Поскольку также проводился учет изменения пористости скелета (содержания масла), полученные результаты демонстрируют поведение, схожее с предыдущим случаем. В отличие от рассмотренного ранее случая, в котором вязкость пористого скелета предполагалась постоянной, рост эффективного давления жмыха с приближением к выходу из области ослабевает, что является следствием повышения вязкости материала с ростом давления. Кроме этого, нелинейность распределения давления масла по высоте становится более выраженной по сравнению с предыдущей серией расчетов (рис. 5).

Содержание масла, которое полностью определяется в рамках данной модели давлением пористого скелета, распределено по длине отличным образом: наблюдается более резкое снижение объемной доли масла с приближением к проницаемой стенке камеры отжима (рис. 6). Распределения горизонтальной составляющей скорости масла

при $x \in [0,06;0,2]$ проявляют большую нелинейность по сравнению с предыдущей серией расчетов (рис. 7). В соответствии с классическими представлениями о фильтрации, согласно которым скорость жидкости, насыщающей пористый скелет, пропорциональна градиенту давления этой жидкости, это отличие вызвано отклонением распределения давления масла от линейного закона.

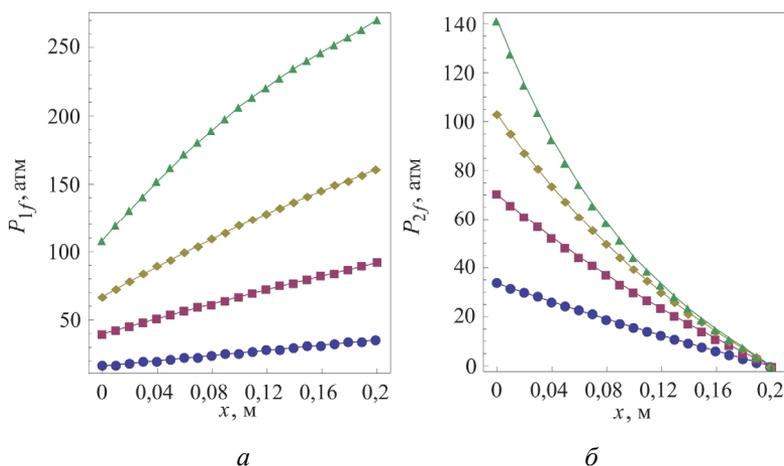


Рис. 5. Распределение по длине (x) эффективного давления пористого скелета P_{1f} (а) и эффективного давления в масле P_{2f} (б) при внешних нагрузках t , равных ● 50 атм; ■ 110 атм; ◆ 170 атм; ▲ 250 атм

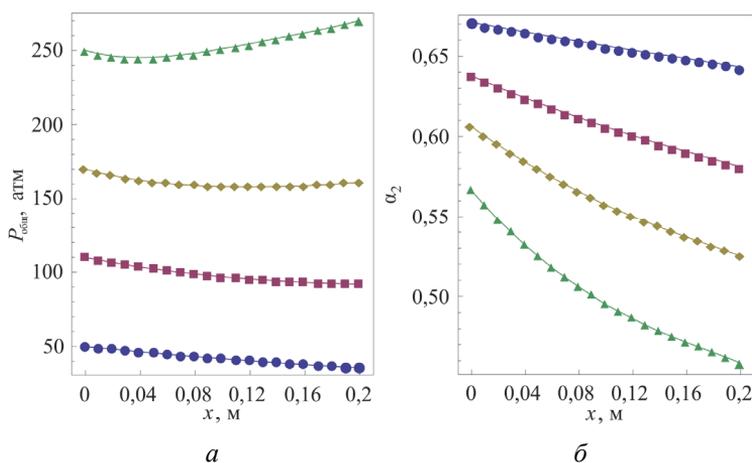


Рис. 6. Распределение по длине (x) эффективного давления материала в целом $P_{общ}$ (а) и объемной доли масла α_2 (б) при внешних нагрузках t , равных: ● 50 атм; ■ 110 атм; ◆ 170 атм; ▲ 250 атм

В правой части камеры отжима происходит отток жидкой фазы за пределы области, по этой причине содержание масла здесь ниже, чем в левой части (см. рис. 6), что позволяет приходящим слева слоям материала перемещаться к выходу из области с более высокой скоростью, стремясь занять место, освобожденное отжатым маслом.

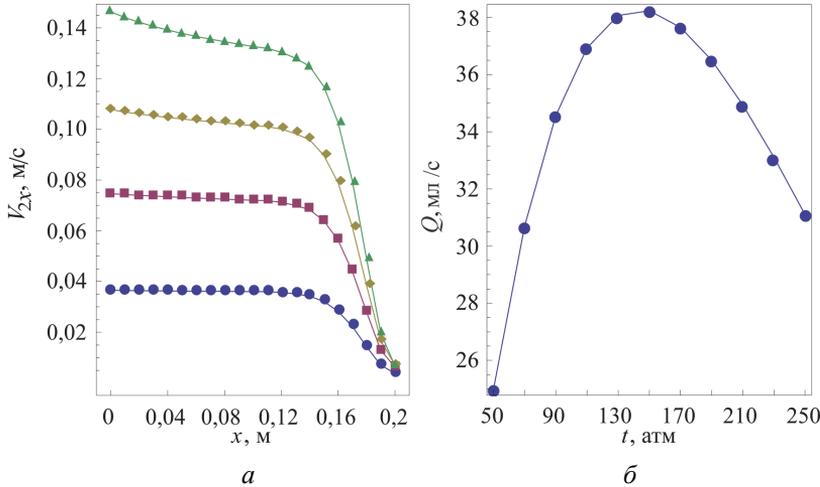


Рис. 7. Распределение по длине (x) горизонтальной составляющей скорости масла V_{2x} (а) и зависимость расхода отжатого масла Q от приложенной внешней нагрузки t (б) при внешних нагрузках t , равных ● 50 атм; ■ 110 атм; ◆ 170 атм; ▲ 250 атм

У зависимости расхода отжатого масла также наблюдается максимум, но в данном случае при величине внешней нагрузки, равной 150 атм. Полученные значения расхода ниже, чем в предыдущем случае, что обуславливается влиянием роста вязкости пористого скелета на распределение давления в среде.

Влияние коэффициента изменения пористости

Данная серия расчетов проводилась при постоянной внешней нагрузке, равной 110 атм. Увеличение коэффициента изменения пористости приводит к меньшей сжимаемости среды в целом и росту нелинейности эффективного давления пористого скелета (рис. 8). Повышение вязкости жмыха с ростом давления усиливает эту нелинейность. В случае слабой сжимаемости пор при $a_m = -8,47 \cdot 10^{-10}$ 1/Па и переменной вязкости пористого скелета давление жмыха в левой части камеры отжима при $u \in [0,16; 0,2]$ возрастает быстрее, чем при более сильной

сжимаемости пор. В средней части камеры отжима при $u \in (0,04; 0,16)$ давление жмыха возрастает практически линейно. В нижней части области вновь наблюдается резкий рост давления. Подобная ситуация наступает и в случае постоянной вязкости смеси, но при более высоких внешних нагрузках, причиной этого является более быстрый рост давления пористого скелета из-за повышения вязкости. Следует отметить, что содержание масла на правой проницаемой границе области одинаково для любых рассмотренных коэффициентов изменения пористости и не зависит от изменений вязкости пористого скелета и определяется только величиной приложенной нагрузки (рис. 9). Тем не менее расход отжатого масла зависит от свойств среды. Полученные результаты показывают, что чем слабее сжимаемость пор, тем ниже скорость масла в области (рис. 10). Можно заметить, что в случае переменной вязкости в левой части камеры отжима скорости масла выше, что может быть вызвано более высоким градиентом давления масла в этой области. Зависимость расхода отжатого масла от коэффициента изменения пористости (см. рис. 10) является убывающей, что свидетельствует о позитивном влиянии сжимаемости пор на расход отжатого масла. При этом повышение вязкости жмыха в процессе отжима приводит к снижению количества получаемого масла в случае высокой сжимаемости пор при $a_m \leq -4,66 \cdot 10^{-9}$ 1/Па.

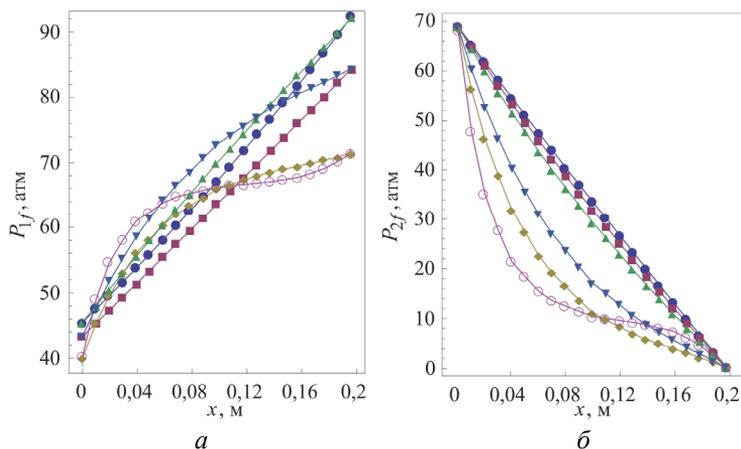


Рис. 8. Распределение по длине области (x) эффективного давления пористого скелета P_{1f} и эффективного давления в масле P_{2f} при внешней нагрузке $t = 110$ атм: a – для постоянной вязкости пористого скелета при a_m , равных $\bullet -8,47 \cdot 10^{-9}$ 1/Па, $\blacksquare -5,42 \cdot 10^{-9}$ 1/Па, $\blacklozenge -8,472 \cdot 10^{-9}$ 1/Па; b – для переменной вязкости пористого скелета при a_m , равных $\blacktriangle -8,47 \cdot 10^{-9}$ 1/Па, $\blacktriangledown -5,42 \cdot 10^{-9}$ 1/Па, $\circ -8,472 \cdot 10^{-9}$ 1/Па

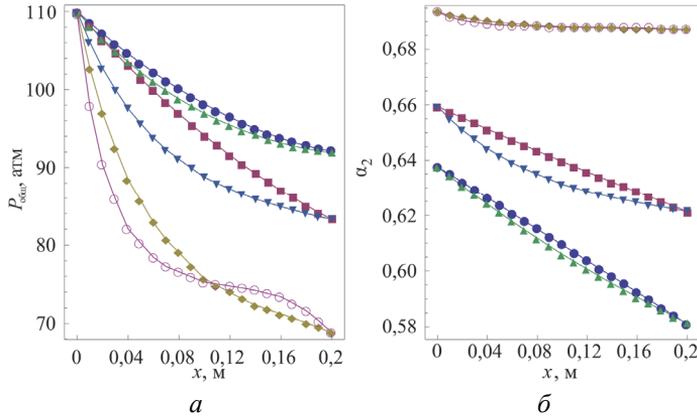


Рис. 9. Распределение по длине области (x) общего давления среды $P_{\text{общ}}$ и содержания масла α_2 при внешней нагрузке $t = 110$ атм: a – для постоянной вязкости пористого скелета при a_m , равных $\bullet - 8,47 \cdot 10^{-9}$ 1/Па, $\blacksquare - 5,42 \cdot 10^{-9}$ 1/Па, $\blacklozenge - 8,472 \cdot 10^{-9}$ 1/Па; 2) для переменной вязкости пористого скелета при a_m , равных: $\blacktriangle - 8,47 \cdot 10^{-9}$ 1/Па, $\blacktriangledown - 5,42 \cdot 10^{-9}$ 1/Па, $\circ - 8,472 \cdot 10^{-9}$ 1/Па; зависимость расхода отжатого масла от коэффициента изменения пористости (β): \bullet для постоянной вязкости; \blacksquare для переменной вязкости

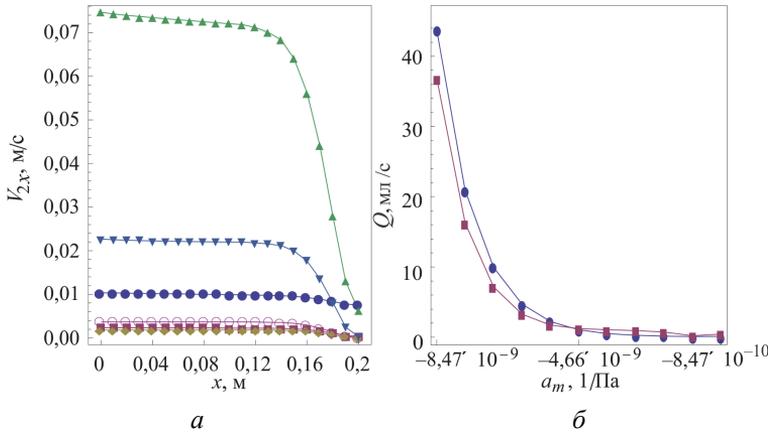


Рис. 10. Распределение по длине (x) горизонтальной составляющей скорости масла V_{2x} при внешней нагрузке $t = 110$ атм. (a) 1) для постоянной вязкости пористого скелета при a_m , равных: $\bullet - 8,47 \cdot 10^{-9}$ 1/Па, $\blacksquare - 5,42 \cdot 10^{-9}$ 1/Па, $\blacklozenge - 8,472 \cdot 10^{-9}$ 1/Па; b – для переменной вязкости пористого скелета при a_m равных $\blacktriangle - 8,47 \cdot 10^{-9}$ 1/Па, $\blacktriangledown - 5,42 \cdot 10^{-9}$ 1/Па, $\circ - 8,472 \cdot 10^{-9}$ 1/Па

Заключение

В работе была построена математическая модель плунжерного прессования масличной культуры, представлявшей собой насыщенную жидкостью пористую среду. Было получено стационарное решение за-

дачи отжима для случая постоянной и переменной вязкости пористого скелета.

Анализ решения показал, что в рамках принятых в данной модели допущений учет изменения пористости материала в процессе отжима играет важную роль и приводит к более высоким значениям расхода получаемого масла. Также было замечено снижение расхода отжатого масла после превышения определенного значения внешней нагрузки. Исследование влияния увеличения вязкости пористого скелета с повышением давления на отток масла показало, что рассчитанные значения расхода масла оказываются ниже, чем в случае постоянной вязкости, при этом распределения давления составляющих демонстрируют более выраженную нелинейность.

Необходимо последующее выполнение процедуры определения констант построенной модели на основании результатов экспериментов по плунжерному прессованию, что позволит перейти к верификации модели. Качественная проверка адекватности была представлена в разделе обсуждения результатов решения задачи. Представленные факты не противоречат наблюдаемым в процессе отжима явлениям.

Результаты, представленные в данной работе, могут оказаться полезными при нахождении оптимальных режимов плунжерного отжима, а также послужить отправной точкой для построения модели широко применяемого экструзионного отжима, отличающегося более сложной геометрией области и условиями нагружения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 13-08-96006 р_урал_а)

Библиографический список

1. Славнов Е.В., Петров И.А. Изменение вязкости экструдата рапса в процессе отжима масла // Аграрный вестник Урала. – 2011. – № 6. – С. 42–44.

2. Славнов Е.В., Петров И.А., Анферов С.Д. Изменение вязкости экструдата рапса в процессе отжима масла (влияние давления) // Аграрный вестник Урала. – 2011. – № 10. – С. 16–18.

3. Славнов Е.В. Изменение проницаемости масличных культур в процессе отжима масла на примере экструдата рапса // Доклады Рос. акад. с.-х. наук. – 2013. – № 3. – С. 58–60.

4. Яковлев Д.А. Теоретические исследования процесса отжима сока шнековым рабочим органом с дополнительным дренирующим контуром // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. – 2011. – Т. 11. – № 7. – С. 997–1004.

5. Яковлев Д.А. Рационализация шнекового рабочего органа для отжима сока из зеленых растений // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. – 2010. – Т. 10. – № 4. – С. 556–559.

6. Петров И.А., Славнов Е.В. Моделирование шнек-прессового отжима как совокупности процессов течения вязкой несжимаемой смеси и фильтрации жидкости сквозь пористую среду // Вычислительная механика сплошных сред. – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 277–285. doi: 10.7242/1999-6691/2013.6.3.31

7. Меретуков З.А., Косачев В.С., Кошевой Е.П. Решение задачи нелинейной напоропроводности при отжиме // Известия вузов. Пищевая технология. – 2011. – Т. 323–324. – № 5–6. – С. 62–64.

8. Меретуков З.А., Кошевой Е.П., Косачев В.С. Решение дифференциального уравнения отжима // Новые технологии. – 2011. – № 4. – С. 54–57.

9. Asgari A., Bagheripour M.H., Mollazadeh M. A generalized analytical solution for a nonlinear infiltration equation using the exp-function method // Scientia Iranica. – 2011. – Vol. 18, iss. 1. – P. 28–35. doi: 10.1016/j.scient.2011.03.004

10. Sanavia L., Schrefler B.A., Steinmann P. A formulation for an unsaturated porous medium undergoing large inelastic strains // Computational Mechanics. – 2002. – Vol. 28. – P. 137–151.

11. Аптуков В.Н. Модель упруговязкопластического пористого тела // Вестник Перм. ун-та. Математика. Механика. Информатика. – 2008. – № 4. – С. 77–81.

12. Wang S.-J., Hsu K.-C. Dynamic interactions of groundwater flow and soil deformation in randomly heterogeneous porous media // Journal of Hydrology. – 2013. – Vol. 499. – No. 30. – P. 50–60. doi: 10.1016/j.jhydrol.2013.06.047

13. Model coupling for multiphase flow in porous media / R. Helmig, B. Flemisch, M. Wolff, A. Ebigbo, H. Class // Advances in Water Resources. – 2013. – Vol. 51. – P. 52–66. doi: 10.1016/j.advwatres.2012.07.003

14. Kondaurou V.I. A non-equilibrium model of a porous medium saturated with immiscible fluids // Journal of Applied Mathematics and

Mechanics. – 2009. – Vol. 73. – Iss. 1. – P. 88–102. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2009.03.004

15. Khoei A.R., Mohammadnejad T. Numerical modeling of multi-phase fluid flow in deforming porous media: A comparison between two- and three-phase models for seismic analysis of earth and rockfill dams // Computers and Geotechnics. – 2011. – Vol. 38, iss. 2. – P. 142–166. doi: 10.1016/j.compgeo.2010.10.010

16. Amaziane B., Jurak M, Keko A.Ž. Numerical simulations of water-gas flow in heterogeneous porous media with discontinuous capillary pressures by the concept of global pressure // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 236, iss. 17. – P. 4227–4244. doi: 10.1016/j.cam.2012.05.013

17. Sun S., Salama A., El-Amin M.F. An Equation-Type Approach for the Numerical Solution of the Partial Differential Equations Governing Transport Phenomena in Porous Media // Procedia Computer Science. – 2012. – Vol. 9. – P. 661–669. doi: 10.1016/j.procs.2012.04.071

18. Fučík R., Mikyška J. Discontinuous Galerkin and Mixed-Hybrid Finite Element Approach to Two-Phase Flow in Heterogeneous Porous Media with Different Capillary Pressures // Procedia Computer Science. – 2011. – Vol. 4. – P. 908–917. doi: 10.1016/j.procs.2011.04.096

19. Mixed and Galerkin finite element approximation of flow in a linear viscoelastic porous medium / E. Rohan, S. Shaw, M.F. Wheeler, J.R. Whiteman // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2013. – Vol. 260. – P. 78–91. doi: 10.1016/j.cma.2013.03.003

20. El-Amin M.F., Salama A., Sun S. A Conditionally Stable Scheme for a Transient Flow of a Non-Newtonian Fluid Saturating a Porous Medium // Procedia Computer Science. – 2012. – Vol. 9. – P. 651–660. doi: 10.1016/j.procs.2012.04.070

21. Liu J., Mu L., Ye X. A Comparative Study of Locally Conservative Numerical Methods for Darcy's Flows // Procedia Computer Science. – 2011. – Vol. 4. – P. 974–983. doi: 10.1016/j.procs.2011.04.103

22. Choquet C. On a fully coupled nonlinear parabolic problem modelling miscible compressible displacement in porous media // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – Vol. 339. – Iss. 2. – P. 1112–1133. doi: 10.1016/j.jmaa.2007.07.037.

23. Механика насыщенных пористых сред / В.Н. Николаевский, К.С. Басниева, А.Т. Горбунов, Г.А. Зотов. – М.: Недра, 1970. – 339 с.

24. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. – М.: Наука, 1987. – 464 с.

25. Albets-Chico X., Kassinos S. A consistent velocity approximation for variable-density flow and transport in porous media // *Journal of Hydrology*. – 2013. – Vol. 507. – No. 12. – P. 33–51. doi: 10.1016/j.jhydrol.2013.10.009

26. Горнер Р.В. Теоретические основы переработки полимеров. – М.: Химия, 1977. – 464 с.

27. Скульский О.И., Аристов С.Н. Механика аномально вязких жидкостей. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2004. – 156 с.

28. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.

29. Коновалов А.Б. Имитационное моделирование рабочего процесса в прессах с продольной фильтрацией // *Технико-технологические проблемы сервиса*. – 2012. – Т. 20, № 2. – С. 40–47.

30. Reddy J.M. An introduction to nonlinear finite element analysis. – Oxford, 2004. – 482 p.

31. Segal Ir.A. Finite element methods for the incompressible Navier-Stokes equations. – Delft University of Technology, 2012. – 80 p.

32. Reddy J.M., Brezzi F., Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods. – Springer-Verlag, 1991.

33. Об альтернативном способе определения предела упругости горных пород в условиях, адекватных пластовым / В.А. Вавилин, Ю.К. Романов, Т.Р. Галиев, Р.Ф. Сулейманов // *Георесурсы*. – 2008. – № 5. – С. 44–48.

References

1. Slavnov E.V., Petrov I.A. Izmenenie viazkosti ekstrudata rapsa v protsesse otzhima masla [Rape cake viscosity variation during oilseeds extraction]. *Agrarnyj vestnik Urala*, 2011, no. 6, pp. 42-44.

2. Slavnov E.V., Petrov I.A., Anferov S.D. Izmenenie viazkosti ekstrudata rapsa v protsesse otzhima masla (vliianie davleniia) [Rape cake viscosity variation during oilseeds extraction (pressure influence)]. *Agrarnyj vestnik Urala*, 2011, no. 10, pp. 16-18.

3. Slavnov E.V. Izmenenie pronitsaemosti maslichnykh kul'tur v protsesse otzhima masla na primere ekstrudata rapsa [Oilseeds permeability variation during rape oil extraction]. *Doklady Rossiiskoj akademii sel'skhozhoziaistvennykh nauk*, 2013, no. 3, pp. 58-60.

4. Iakovlev D.A. Teoreticheskie issledovaniya protsessa otzhima soka shnekovym rabochim organom s dopolnitelnym dreniruiushchim konturom [Theoretical investigation of Juice extrusive extraction process with an additional drain circuit]. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2011, vol. 11, no. 7, pp. 997-1004.

5. Iakovlev D.A. Ratsionalizatsiya shnekovogo rabocheho organa dlia otzhima soka iz zelenykh rastenij [Rationalization of the screw-working body for extraction of juice from green plants]. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2010, vol. 10, no. 4, pp. 556-559.

6. Petrov I.A., Slavnov E.V. Modelirovanie shnek-pressovogo otzhima kak sovokupnosti protsessov techeniya viazkoi neszhimaemoj smesi i filtratsii zhidkosti skvoz poristuyu sredu [Simulation of screw-press oil extraction as a set of two processes: incompressible viscous mixture flow and fluid filtration in porous medium]. *Computational continuum mechanics*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 277-285. doi: 10.7242/1999-6691/2013.6.3.31

7. Meretukov Z.A., Kosachev V.S., Koshevoi E.P. Reshenie zadachi nelineinoj naporoprovodnosti pri otzhime. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenij. Pishchevaya tekhnologiya*, 2011, vol. 323-324, no. 5-6, pp. 62-64.

8. Meretukov Z.A., Koshevoi E.P., Kosachev V.S. Reshenie differentsialnogo uravneniya otzhima [Extraction differential equation solution]. *Novye tekhnologii*, 2011, no. 4, pp. 54-57.

9. Asgari A., Bagheripour M.H., Mollazadeh M. A generalized analytical solution for a nonlinear infiltration equation using the exp-function method. *Scientia Iranica*, 2011, vol. 18, iss. 1, pp. 28-35. doi: 10.1016/j.scient.2011.03.004

10. Sanavia L., Schrefler B.A., Steinmann P. A formulation for an unsaturated porous medium undergoing large inelastic strains. *Computational Mechanics*, 2002, vol. 28, pp. 137-151.

11. Aptukov V.N. Model' uprugo-viazkoplasticheskogo poristogo tela [The model of the elasto-viscoplastic porous body]. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2008, no. 4, pp. 77-81.

12. Wang S.-J., Hsu K.-C. Dynamic interactions of groundwater flow and soil deformation in randomly heterogeneous porous media. *Journal of Hydrology*, 2013, vol. 499, no. 30, pp. 50-60. doi: 10.1016/j.jhydrol.2013.06.047.

13. Helmig R., Flemisch B., Wolff M., Ebigbo A., Class H. Model coupling for multiphase flow in porous media. *Advances in Water Resources*, 2013, vol. 51, pp. 52-66. doi: 10.1016/j.advwatres.2012.07.003.

14. Kondaurov V.I. A non-equilibrium model of a porous medium saturated with immiscible fluids. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, iss. 1, pp. 88-102. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2009.03.004.

15. Khoei A.R., Mohammadnejad T. Numerical modeling of multi-phase fluid flow in deforming porous media: A comparison between two- and three-phase models for seismic analysis of earth and rockfill dams. *Computers and Geotechnics*, 2011, vol. 38, iss. 2, pp. 142-166. doi: 10.1016/j.compgeo.2010.10.010.

16. Amaziane B., Jurak M., Keko A.Ž. Numerical simulations of water-gas flow in heterogeneous porous media with discontinuous capillary pressures by the concept of global pressure. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2012, vol. 236, iss. 17, pp. 4227-4244. doi: 10.1016/j.cam.2012.05.013.

17. Sun S., Salama A., El-Amin M.F. An Equation-Type Approach for the Numerical Solution of the Partial Differential Equations Governing Transport Phenomena in Porous Media. *Procedia Computer Science*, 2012, vol. 9, pp. 661-669. doi: 10.1016/j.procs.2012.04.071.

18. Fučík R., Mikyška J. Discontinuous Galerkin and Mixed-Hybrid Finite Element Approach to Two-Phase Flow in Heterogeneous Porous Media with Different Capillary Pressures. *Procedia Computer Science*, 2011, vol. 4, pp. 908-917. doi: 10.1016/j.procs.2011.04.096.

19. Rohan E., Shaw S., Wheeler M.F., Whiteman J.R. Mixed and Galerkin finite element approximation of flow in a linear viscoelastic porous medium. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, vol. 260, pp. 78-91 doi: 10.1016/j.cma.2013.03.003.

20. El-Amin M.F., Salama A, Sun S. A Conditionally Stable Scheme for a Transient Flow of a Non-Newtonian Fluid Saturating a Porous Medium. *Procedia Computer Science*, 2012, vol. 9, pp. 651-660. doi: 10.1016/j.procs.2012.04.070.

21. Liu J., Mu L., Ye X. A Comparative Study of Locally Conservative Numerical Methods for Darcy's Flows. *Procedia Computer Science*, 2011, vol. 4, pp. 974-983. doi: 10.1016/j.procs.2011.04.103.

22. Choquet C. On a fully coupled nonlinear parabolic problem modelling miscible compressible displacement in porous media. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, vol. 339, Iss. 2, pp. 1112-1133. doi: 10.1016/j.jmaa.2007.07.037.

23. Nikolaevskij V.N., Basnieva K.S., Gorbunov A.T., Zotov G.A. Mekhanika nasyshchennykh poristykh sred [Saturated porous media mechanics]. Moscow: Nedra, 1970. 339 p.
24. Nigmatulin R.I. Dinamica mnogofaznykh sred [Multyphase dynamics]. Part. 1. Moscow: Nauka, 1987. 464 p.
25. Albets-Chico X., Kassinos S. A consistent velocity approximation for variable-density flow and transport in porous media. *Journal of Hydrology*, 2013, vol. 507, no. 12, pp. 33-51. doi: 10.1016/j.jhydrol.2013.10.009
26. Torner R.V. Teoreticheskie osnovy pererabotki polimerov [Theoretical principles of polymer processing]. Moscow: Chemistry, 1977. 464 p.
27. Skulskiy O.I., Aristov S.N. Mekhanika anomalno vyazkikh zhidkostey [Anomalously viscous liquids mechanics]. Yekaterinburg: Uralskoe otdelenie Rossiyskoy akademii nauk, 2004. 156 p.
28. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. Konvektivnaya ustoichivost' neshhimaemoj zhidkosti [Convective stability of incompressible fluid]. Moscow: Nauka, 1972, 392 p.
29. Konovalov A.B. Imitatsionnoe modelirovanie rabocheho protsessa v pressakh s prodolnoj filtratsiej. *Tekhniko-tekhnologicheskie problemy servisa*, 2012, vol. 20, no. 2, pp. 40-47.
30. Reddy J.M. An introduction to nonlinear finite element analysis. Oxford, 2004. 482 p.
31. Segal Ir.A. Finite element methods for the incompressible Navier-Stokes equations. Delft: University of Technology, 2012. 80 p.
32. Reddy J.M., Brezzi F., Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer-Verlag, 1991.
33. Vavilin V.A., et al. Ob al'ternativnom sposobe opredeleniya predela uprugosti gornykh porod v usloviyakh, adekvatnykh plastovym [About alternative elastic limit estimation method for rocks in reservoir-like conditions]. *Georesursy*, 2008, no. 5, pp. 44-48.

Об авторах

Анферов Сергей Дмитриевич (Пермь, Россия) – инженер-исследователь лаборатории механики термопластов Института механики сплошных сред УрО РАН (614013, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1, e-mail: anferov@icmm.ru).

Скульский Олег Иванович (Пермь, Россия) – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории механики термо-

пластов Института механики сплошных сред УрО РАН (614013, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1, e-mail: skul@icmm.ru).

Славнов Евгений Владимирович (Пермь, Россия) – доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией механики термопластов Института механики сплошных сред УрО РАН (614013, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1, e-mail: slavnov@icmm.ru).

About the authors

Sergey D. Anferov (Perm, Russian Federation) – Research Engineer of Laboratory of Thermoplastics Mechanics, Institute of Continuous Media Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (1, Akademik Korolev str., 614013, Perm, Russian Federation, e-mail: anferov@icmm.ru).

Oleg I. Skul'skiy (Perm, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Leading Researcher of Laboratory of Thermoplastics Mechanics, Institute of Continuous Media Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (1, Akademik Korolev str., 614013, Perm, Russian Federation, e-mail: skul@icmm.ru).

Evgeny V. Slavnov (Perm, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Head of Laboratory of Thermoplastics Mechanics, Institute of Continuous Media Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (1, Akademik Korolev str., 614013, Perm, Russian Federation, e-mail: slavnov@icmm.ru).

Получено 14.01.2014

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Анферов С.Д., Скульский О.И., Славнов Е.В. Математическое моделирование процесса прямого отжима масличной культуры // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2013. – № 1. – С. 31–56.

Please cite this article in English as:

Anferov S.D., Skul'skiy O.I., Slavnov E.V. Mathematical modelling of vegetable oil plunger extraction. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2013. No. 1. P. 31-56.