

УДК 531/534: [57+61]

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ МЕХАНИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МЯГКИХ ТКАНЕЙ

А.Н. Натали, А. Форестиеро, Э.Л. Карниель

Centre of Mechanics of Biological Materials, University of Padova, Via Marzolo 9, I-35131, Padova, Italy,
e-mail:arturo.natali@unipd.it

Центр механики биологических материалов, Университет Падуи, Италия

Аннотация. Одной из главных проблем, возникающих при формулировании определяющих соотношений для мягких биологических тканей, является идентификация параметров, входящих в модель. Определяющие соотношения мягких тканей должны учитывать отклик биологического материала, который обуславливается анизотропией, нелинейностью материала, слабой сжимаемостью, большими деформациями и перемещениями. В данной работе представлена методика для идентификации параметров определяющих соотношений, которая заключается в сравнении результатов, полученных по модели, с экспериментальными данными для данной ткани. Названный подход учитывает историю нагружения, которая получена из механических испытаний, а затем по объединенной стохастической/детерминистической схеме находятся параметры модели, при которых отклонение теоретической и экспериментальной кривых минимально. Представлены аналитические модели для описания поведения тканей пищевода и периодонта. Показано, что данный подход позволяет адекватно описать различное механическое поведение биологических мягких тканей, отличающихся по структуре и выполняемым функциям. Проведено сравнение экспериментальных данных и результатов, полученных по моделям.

Ключевые слова: мягкие биологические ткани, формулирование определяющих соотношений, параметры определяющих соотношений, нелинейный анализ.

ВВЕДЕНИЕ

Мягкие биологические ткани характеризуются сложной иерархической структурой [27, 29]. Типичными компонентами мягких тканей являются клетки и внешнечелочный матрикс, чье содержание и конфигурация зависят от типологии ткани. Матрикс состоит из волокон (например, коллаген и эластин в соединительных тканях) и основного вещества, которое представляет собой вязкий гель с электролитным водным раствором [26], где плавают отрицательно заряженные протеогликаны. При описании механического поведения мягких тканей необходимо знать их макро- и микроструктуру. В этом случае данные, полученные из механических экспериментов, являются основой для понимания явлений, которые происходят при нагружении. Следует отметить, что интерпретация экспериментальных данных зачастую является сложной процедурой.

Вследствие слоистого строения мягких тканей их механические свойства зависят от механического поведения компонентов, входящих в их структуру, и взаимодействия между компонентами. С точки зрения механики мягкие ткани могут рассматриваться как композиты, армированные волокнами, с анизотропными

© Натали А.Н., Форестиеро А., Карниель Э.Л., 2009

Натали Артуро, профессор, Центр механики биологических материалов, Падуя

Форестиеро Антонелла, аспирант, Центр механики биологических материалов, Падуя

Карниель Эмануэль, научный сотрудник, Центр механики биологических материалов, Падуя

свойствами, а аморфное основное вещество как изотропный материал [6, 17, 21]. Волокнистая структура характеризуется относительной жесткостью на растяжение и вносит значительный вклад в прочность при растяжении [29]. С другой стороны, жесткость при сжатии определяется поведением основного вещества, которое демонстрирует слабо сжимаемое поведение [25] и ограниченную способность к перегруппировке, а также электростатическим отталкиванием протеогликанов [19].

На основе результатов, представленных в литературе, показано, что гиперупругие модели хорошо описывают поведение мягких биологических тканей [6, 10, 15, 19, 20]. В данной работе представлена анизотропная гиперупругая модель, учитывающая анизотропию, слабую сжимаемость, нелинейный упругий отклик материала, большие перемещения и деформации [10, 12, 21].

Процедура идентификации параметров, основанная на обратном анализе, заключается в получении истории нагружения (в координатах σ – ϵ) из эксперимента и нахождении параметров модели, при которых обеспечивается наименьшее отклонение аналитических и экспериментальных кривых [14], путём минимизации скалярной функции. В большинстве случаев данная функция является мультимодальной. Детерминистические методы решения задачи оптимизации демонстрируют свою ограниченность при наличии множества локальных минимумов. Стохастические алгоритмы (например, метод «отжига» [4, 11]) для минимизации мультимодальной функции являются предпочтительными для использования. Данный алгоритм позволяет найти адекватное решение даже при наличии локальных минимумов, однако даже в этом случае оптимальность точки решения не гарантирована. В данной работе предлагается смешанный метод, основанный на стохастическом (метод «отжига») и детерминистическом (метод Нелдера–Мида) методах, которые применяются последовательно. Сначала с помощью стохастического метода находятся области нахождения локальных или глобального минимума, а затем для нахождения истинного минимума в каждой области используется детерминистический метод. Глобальный минимум – это тот минимум, при котором значение функции, соответствующее определенному набору параметров модели, самое меньшее. Координаты глобального минимума соответствуют параметрам модели, описывающей поведение биологической ткани. Данная процедура была верифицирована с помощью классических тестовых функций Розенброка (*Rosenbrock*) [1, 7].

Для описания механического поведения различных мягких биологических тканей, таких как периодонтальная связка и ткани пищевода, использовались особые модели, в рамках которых были найдены параметры, входящие в эти соотношения. Модель периодонтальной связки учитывает трансверсальную изотропию материала [2], а модель тканей пищевода – ортотропную и анизотропную симметрию [9].

РАЗРАБОТКА ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО СООТНОШЕНИЯ

В результате механических испытаний на мягких тканях [25, 31, 32] было выявлено их нелинейное поведение при больших деформациях и перемещениях. Наличие фиброзных компонентов с особой пространственной ориентацией обуславливает анизотропный механический отклик. Кроме того, слабо сжимаемое поведение биологического объекта объясняется наличием значительного количества жидких компонентов. Характеристики, описанные выше, могут быть описаны с помощью анизотропных гиперупругих моделей [6, 10, 12, 20, 22], в которых вводится функция энергии деформации. Энергия деформации W может быть разложена на две составляющие W_m (вклад основного вещества) и W_f (вклад фиброзных компонентов) [6, 30]:

$$W(\mathbf{C}) = W_m(\mathbf{C}) + W_f(\mathbf{C}, \mathbf{M}_i), \quad (1)$$

где \mathbf{C} – правый тензор деформации Коши–Грина, \mathbf{M}_i – тензоры структуры, зависящие от конфигурации волокон [15]. Вследствие слабо сжимаемого поведения изотропное слагаемое W_m можно разделить на шаровую (U_m) и изошаровую (\tilde{W}_m) части [23]:

$$W_m(\mathbf{C}) = \tilde{W}_m(C_1, \alpha_1, \tilde{\mathbf{C}}) + U_m(K_v, r, \mathbf{C}), \quad (2)$$

где $\tilde{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbf{C}$ – изошаровая часть правого тензора деформации Коши–Грина. Параметр C_1 отвечает за начальную сдвиговую жесткость ткани, α_1 – параметр, определяющий нелинейность материала по отношению к взаимосвязи между начальным модулем сдвига G и деформацией [24], параметры K_v и r характеризуют изменение объема ткани. Дополнительные сведения можно найти в приложении А.

При формулировании параметра W_f следует учитывать его особую зависимость от строения и распределения фиброзных компонентов. В некоторых мягких биологических тканях фиброзные компоненты расположены в основном вдоль двух главных направлений \mathbf{a}_0 и \mathbf{b}_0 :

$$W_f(\mathbf{C}, \mathbf{M}_i) = W_f(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0 \otimes \mathbf{b}_0), \quad (3)$$

$$W_f(\mathbf{C}, \mathbf{M}_i) = W_a(C_4, \alpha_4, \lambda_a) + W_b(C_6, \alpha_6, \lambda_b) + W_{ab}(C_{89}, \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0), \quad (4)$$

где λ_a и λ_b – натяжение ткани вдоль направлений волокон \mathbf{a}_0 и \mathbf{b}_0 соответственно. Параметры C_4 и C_6 характеризуют начальную осевую жесткость волокон; параметры α_4 и α_6 зависят от начальной изменяющейся конфигурации [21]; C_{89} описывает взаимодействие между двумя видами волокон. Данное обстоятельство обсуждается в книге Спенсера [30].

Предложенная модель должна учитывать распределение волокон, которое отличает одну ткань от другой. Различные мягкие биологические ткани (например, периодонтальная связка) состоят из коллагеновых волокон, ориентированных преимущественно вдоль одного направления, значит, свойство трансверсальной изотропной симметрии материала [24] должно быть учтено в модели. В тканях пищевода мышечные волокна осевого и кольцевого слоёв расположены ортогонально друг другу, поэтому должны выполняться условия ортотропной симметрии материала [30]. С другой стороны, два вида коллагеновых волокон в подслизистой оболочке расположены крест-накрест под углом θ , который варьируется в пределах от 30 до 60° [5, 32] к кольцевому слою. Следовательно, необходимо учесть полную анизотропию материала.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

Данные, полученные в ходе экспериментальных исследований на растяжение и сжатие для нахождения параметров модели, описывающей поведение периодонтальной связки, были взяты из работы [25]. Исследовались 14 образцов (включающих в себя зуб, периодонтальную связку и часть альвеолярного отростка), которые были вырезаны из клыка верхней челюсти взрослой кошки. Из каждого сечения были вырезаны 4 образца длиной 2 мм и шириной 0,7 мм. Для проведения испытаний использовалась миниатюрная разрывная машина. Четырнадцать образцов были разделены на две группы для проведения испытаний на растяжение или сжатие в направлении превалирующей ориентации волокон с разными скоростями деформации. Данные, полученные в координатах «нагрузка–перемещение» были пересчитаны в координаты «номинальное напряжение–деформация» с использованием данных о толщине и площади поперечного сечения образца периодонтальной связки.

Результаты испытаний на растяжение тканей пищевода были получены Янгом (Yang) [32] на образцах, полученных у свиней в возрасте 3–4 месяцев и весом 60–70 кг. Слой «подслизистая–слизистая оболочка» был сепарирован от мышечного слоя. Были изготовлены образцы с формой собачьей кости (длина рабочей части – 25 мм, ширина – 5 мм) с главной осью, направленной вдоль осевого или радиального направления. Из слоя «подслизистая–слизистая оболочка» были изготовлены два образца толщиной 2 мм, первый с ориентацией главной оси вдоль осевого направления, второй – вдоль радиального. Из внешней мышцы пищевода были изготовлены два образца толщиной 3 мм с ориентацией главной оси вдоль осевого и радиального направлений, соответственно. Все образцы прошли испытания на растяжение со скоростью деформации 50 мм/мин. В результате были получены зависимости номинальное напряжение–деформация.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ

Для гиперупругой модели общая связь между напряжением и деформацией записывается в виде $\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \partial W / \partial \mathbf{C}$, где \mathbf{P} – первый тензор Пиолы–Кирхгофа, выбираемый в качестве меры номинальных напряжений, а \mathbf{F} – градиент деформаций. По отношению к предыдущей модели первый тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа записывается как

$$\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}}_m + \tilde{\mathbf{P}}_m + \mathbf{P}_f = 2\mathbf{F} \frac{\partial \tilde{W}_m}{\partial \mathbf{C}} + 2\mathbf{F} \frac{\partial U_m}{\partial \mathbf{C}} + 2\mathbf{F} \frac{\partial W_f}{\partial \mathbf{C}}. \quad (5)$$

Первый тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа зависит от инвариантов $\tilde{I}_1, I_3, I_4, I_6, I_8, I_9$, которые, в свою очередь, зависят от главных деформаций $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Дополнительные аспекты приведены в приложении А. Компоненты тензора деформации, которые нельзя определить экспериментально, можно вычислить с помощью аналитических методов с учётом граничных условий при испытаниях [23].

Согласно [22] функция для определения отклонения аналитической и экспериментальной кривых записывается в виде

$$f(\mathbf{a}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[1 - \frac{P_{ii}^{mod}(\mathbf{a}, \lambda_i^{exp})}{P_{ii}^{exp}} \right]^2}, \quad (6)$$

где \mathbf{a} – набор параметров определяющего соотношения, n – количество опытов, λ_i^{exp} – экспериментальные входные данные i -го опыта, P_{ii}^{exp} – экспериментальные выходные данные i -го опыта, P_{ii}^{mod} – результаты, полученные по модели, соответствующие параметрам \mathbf{a} и экспериментальным данным λ_i^{exp} . Кроме того, процедура оптимизации должна учитывать особые ограничения, которые накладываются на область параметров. Ограничения необходимы для обеспечения выполнения требований по устойчивости материала [16], таких как стремление функции гиперупругой деформации возрастать вместе с увеличением деформаций. Ограничения проще всего записать в виде штрафных функций:

$$f(\mathbf{a}) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[1 - \frac{P_{ii}^{mod}(\mathbf{a}, \lambda_i^{exp})}{P_{ii}^{exp}} \right]^2} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Theta_i(\mathbf{a}, \lambda_i^{exp}, P_{ii}^{exp}, P_{ii}^{mod}), \quad (7)$$

где Θ_i – штрафные функции, которые добавляются к функции для ограничения значений параметров, входящих в модель [3].

Параметры определяющих соотношений находятся при решении задачи минимизации мультимодальной функции, которая является таковой вследствие нелинейности рассматриваемой модели. Стохастический алгоритм (метод «отжига») [4, 11] позволяет найти приблизительно минимум функции многих переменных, однако гарантировать, что минимум глобальный, нельзя. С другой стороны, детерминистический метод Нелдера–Мида [1, 13] позволяет найти точное значение минимума, но при оптимизации можно попасть в локальный минимум. Другими словами, метод зависит от «хорошего» начального приближения. В работе предложен новый алгоритм поиска минимума, основанный на комбинации методов, рассмотренных выше, исходя из их возможностей. При проведении процедуры находятся все минимумы, оценивается зона поиска глобального минимума и затем находится его точное месторасположение. Рассмотрим все этапы подробнее. Вычисления начинаются при начальном наборе параметров модели, который записывается в вектор α_0 . По стохастическому методу перебором находят новые точки α' , подозрительные на минимум, в окрестности текущей точки α_i . Новая точка α' выбирается или отбрасывается согласно критерию Метрополиса [18]. Затем осуществляется переход к точке α_{i+1} . «Лучшей» точкой считается та точка, соответствующая набору параметров модели, при которой функция $f(\alpha)$ достигает наименьшего значения, и обозначается α_{opt}^* . Далее значение α_{opt}^* используется в качестве начального приближения метода Нелдера–Мида, с помощью которого находится новая точка α_{opt}^{**} , которая сравнивается с предыдущей α_{opt}^* . «Лучшая точка» записывается как α_{opt} , и на этом процедура поиска заканчивается. Далее выводится набор параметров, который соответствует найденной точке.

Для оценки эффективности и устойчивости описанной процедуры была решена классическая тестовая задача минимизации функции Розенброка, которая широко используется для анализа различных алгоритмов оптимизации [1, 7].

Результаты сравнения метода отжига и комбинированного метода приведены в приложении Б.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Как было указано выше, процедура тестировалась на функции Розенброка. Представленный комбинированный метод показал хорошие результаты: в отличие от метода «отжига» он позволяет получить точное значение глобального минимума функции и требует меньше временных затрат на расчёты. Эффективность и устойчивость процедуры описана в приложении Б.

В табл. 1–3 приведены параметры гиперупругих моделей, описывающих поведение периодонтальной связки, внешней мышцы пищевода и подслизистого слоя. На рис. 1–3 показано сравнение результатов экспериментальных исследований (полые точки) и расчётов по моделям (линии) с найденными параметрами. На рис. 1 показаны результаты для ткани периодонта. Модель позволяет описать механическое поведение периодонтальной связки как в опытах на растяжение (рис. 1, а), так и на сжатие (рис. 1, б). На рис. 2, 3 показано сравнение результатов для тканей пищевода. Отмечено также хорошее совпадение результатов при различных направлениях нагружения. В случае исследования подслизистого слоя угол между коллагеновыми волокнами и радиальным направлением составил 57° , что входит в пределы значений, приведённых в литературе [32].

Исходя из вышесказанного можно сделать вывод, что представленная процедура оптимизации позволяет найти набор параметров определяющих соотношений, адекватно описывающих поведение различных мягких биологических тканей.

Таблица 1

Параметры модели, описывающей поведение периодонтальной связки

K_v , МПа	r	C_1 , МПа	α_1	C_4 , МПа	α_4
8,47	8,89	$4,93 \cdot 10^{-4}$	1,84	$1,43 \cdot 10^{-2}$	3,8

Таблица 2

Параметры модели, описывающей поведение внешней мышцы пищевода

K_v , МПа	r	C_1 , МПа	α_1	C_4 , МПа	α_4	C_6 , МПа	α_6
3,77	1,08	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$6,23 \cdot 10^{-1}$	$1,12 \cdot 10^{-2}$	1,33	$1,45 \cdot 10^{-2}$	$2,0 \cdot 10^{-1}$

Таблица 3

Параметры модели, описывающей поведение слоя «подслизистая–слизистая»

K_v , МПа	r	C_1 , МПа	α_1	C_4 , МПа	α_4	C_6 , МПа	α_6	C_{89} , МПа	θ (°)
6,29	-9,73	$1,59 \cdot 10^{-2}$	$8,93 \cdot 10^{-1}$	$5,22 \cdot 10^{-2}$	1,19	$5,22 \cdot 10^{-2}$	1,19	0,247	49,23

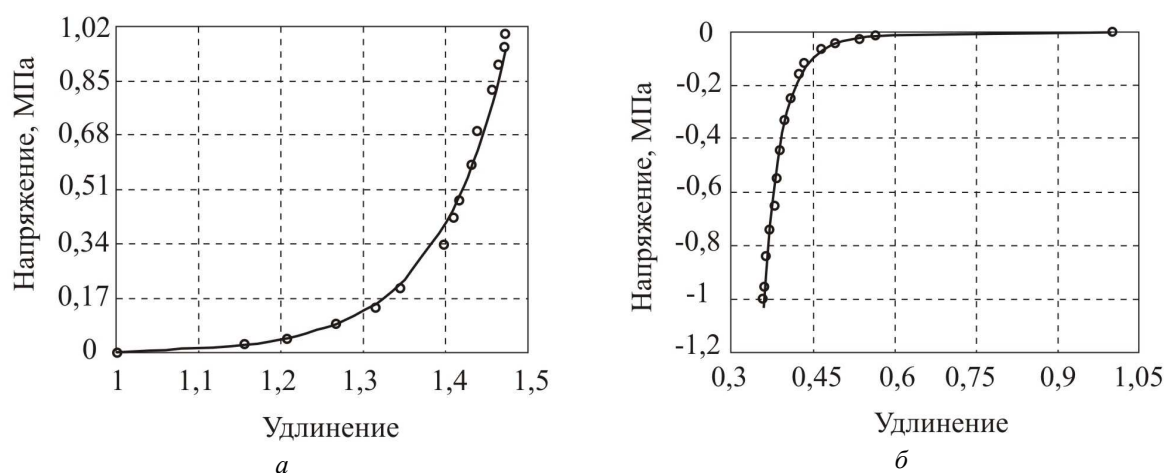


Рис. 1. Сравнение экспериментальных данных (○) и результатов модели (—) для образцов ткани периодонта: *a* – эксперимент на растяжение, *б* – эксперимент на сжатие

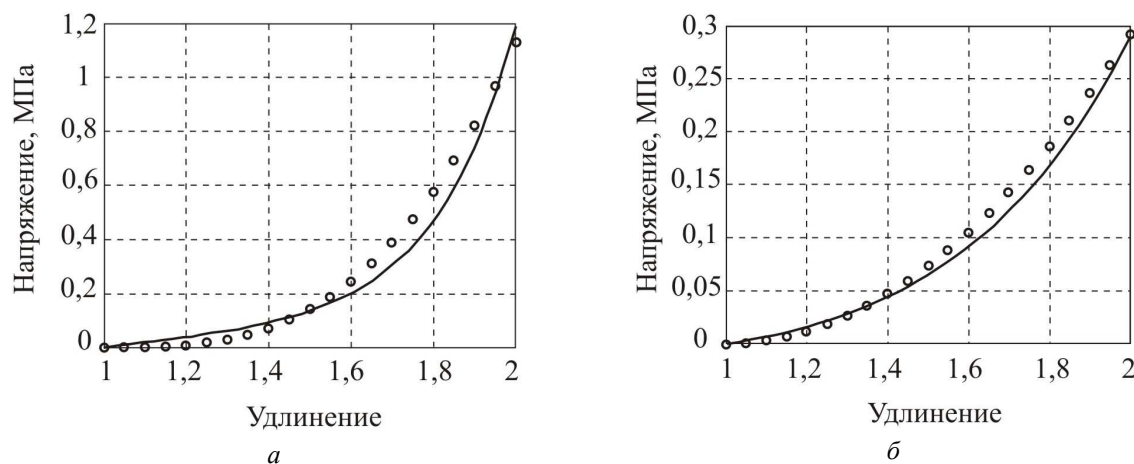


Рис. 2. Сравнение осреднённых экспериментальных данных на растяжение (○) и результатов модели (—) для образцов внешней мышцы пищевода при растяжении: *a* – в осевом направлении, *б* – в окружном направлении

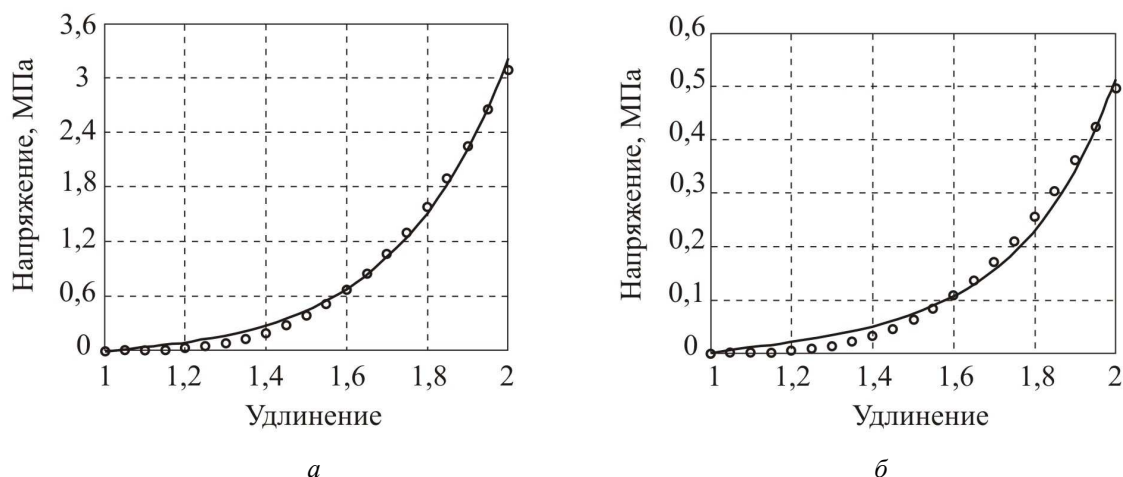


Рис. 3. Сравнение осреднённых экспериментальных данных на растяжение (○) и результатов модели (—) для образцов слоя «подслизистая–слизистая» при растяжении: *а* – в осевом направлении, *б* – в окружном направлении

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведён анализ механического поведения мягких биологических тканей, в частности идентификация параметров гиперупругой модели, которая строго учитывает структуру тканей. Показано, что процедура оптимизации является надёжной и эффективной при исследовании сложного механического поведения тканей, что включает в себя анизотропию свойств, слабую сжимаемость, нелинейный упругий отклик и геометрическую нелинейность. Экспериментальные данные необходимы не только для сравнения с конечными результатами расчётов, но и для идентификации параметров моделей. В приложениях А и Б приведены некоторые выкладки для описания как полной процедуры оптимизации, так и некоторых её вычислительных аспектов. Проведённые расчёты показывают, что комбинированный метод находит точное значение глобального минимума мультимодальной функции большого набора параметров в отличие от тех алгоритмов, которые использовались ранее. Для надёжности предложенной процедуры необходимы дополнительные экспериментальные исследования, поскольку существует прямая связь между данными испытаний и устойчивостью алгоритма для идентификации параметров. Результаты экспериментов позволят найти более точные параметры моделей, описывающих поведение мягких биологических тканей в различных условиях нагружения. Круг сложных биомеханических эффектов, которые демонстрируют мягкие ткани, можно расширить, рассмотрев временной отклик ткани или повреждаемость, так как данные величины характеризуют дегенеративные изменения, проявляющиеся с возрастом. Для биомеханического моделирования обширного количества клинических проблем необходимо внедрить разработанные определяющие соотношения в численные программные пакеты. Анализ поведения мягких тканей с различной типологией и аппроксимация экспериментальных данных результатами, полученными по моделям, позволяют рассмотреть широкий класс биологических тканей для количественного описания их механического отклика в различных условиях. Данный аспект будет полезен для разработки медицинских приложений на основе механики мягких тканей.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Анизотропная гиперупругая модель

Формулировка гиперупругой модели заключается в определении функции энергии деформации W . Вследствие композитного строения ткани функция W может быть разложена на две составляющие W_m (вклад основного вещества) и W_f (вклад фиброзных компонентов):

$$W(\mathbf{C}) = W_m(\mathbf{C}) + W_f(\mathbf{C}, \mathbf{M}_i), \quad (\text{A.1})$$

где \mathbf{C} – правый тензор деформации Коши–Грина, \mathbf{M}_i – тензоры структуры, зависящие от конфигурации волокон. Обычно энергия деформации записывается как функция главных инвариантов I_i . Вследствие слабо сжимаемого поведения изотропное слагаемое W_m можно разделить на шаровую (U_m) и изошаровую (\tilde{W}_m) части:

$$W_m(\mathbf{C}) = \tilde{W}_m(\tilde{I}_1) + U_m(I_3), \quad (\text{A.2})$$

$$\tilde{W}_m(\tilde{I}_1) = \left[\frac{C_1}{\alpha_1} \right] \left\{ e^{[\alpha_1(\tilde{I}_1-3)]} - 1 \right\}, \quad (\text{A.3})$$

$$U_m(I_3) = \left[\frac{K_v}{2+r(r+1)} \right] \left[(\sqrt{I_3} - 1)^2 + \frac{1}{\sqrt{(I_3)^r}} + r\sqrt{I_3} - (r+1) \right], \quad (\text{A.4})$$

где $\tilde{I}_1 = \text{tr}(\tilde{\mathbf{C}})$ – первый главный инвариант изошаровой части правого тezора деформации Коши–Грина $\tilde{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbf{C}$; третий инвариант (I_3) связан с якобианом тензора деформации J , как $I_3 = J^2$. Параметры K_v и r характеризуют изменение объёма ткани и определяют касательный модуль объёмного расширения:

$$K^T = \frac{K_v}{2+r(r+1)} \left[2+r(r+1) \frac{1}{\sqrt{(I_3)^{r+2}}} \right]. \quad (\text{A.5})$$

При формулировании параметра W_f следует учитывать его особую зависимость от строения и распределения фиброзных компонентов. В большинстве мягких биологических тканях фиброзные компоненты расположены вдоль двух главных направлений \mathbf{a}_0 и \mathbf{b}_0 :

$$W_f(\mathbf{C}, \mathbf{M}_i) = W_f(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0 \otimes \mathbf{b}_0) = W_f(I_4, I_6, I_8, I_9), \quad (\text{A.6})$$

$$W_f(I_4, I_6, I_8, I_9) = W_a(I_4) + W_b(I_6) + W_{ab}(I_8, I_9), \quad (\text{A.7})$$

$$W_a(I_4) = \left[\frac{C_4}{(\alpha_4)^2} \right] \left\{ e^{[\alpha_4(I_4-1)]} - \alpha_4(I_4 - 1) - 1 \right\}, \quad (\text{A.8})$$

$$W_b(I_6) = \left[\frac{C_6}{(\alpha_6)^2} \right] \left\{ e^{[\alpha_6(I_6-1)]} - \alpha_6(I_6 - 1) - 1 \right\}, \quad (\text{A.9})$$

$$W_{ab}(I_8, I_9) = C_{89}(I_8 - I_9)^2, \quad (\text{A.10})$$

где $I_4 = \mathbf{C} : (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) = \lambda_a^2$ и $I_6 = \mathbf{C} : (\mathbf{b}_0 \otimes \mathbf{b}_0) = \lambda_b^2$ определяют растяжение ткани вдоль направлений волокон \mathbf{a}_0 и \mathbf{b}_0 соответственно. Восьмой $I_8 = (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0)[\mathbf{C} : (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{b}_0)]$ и девятый инварианты $I_9 = (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0)^2$ описывают взаимодействие между двумя видами волокон.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Тестовая функция Розенброка

Функция Розенброка обычно используется для тестирования оптимизационных алгоритмов. Функция Розенброка для двух параметров имеет вид

$$f(\mathbf{\alpha}) = (1 - \alpha_1)^2 + 100 (\alpha_2 - \alpha_1^2)^2. \quad (\text{Б.1})$$

В случае n параметров функция записывается как

$$f(\mathbf{\alpha}) = \sum_{i=2}^{n-1} \left[(1 - \alpha_i)^2 + 100 (\alpha_{i+1} - \alpha_i^2)^2 \right], \quad (\text{Б.2})$$

где $\mathbf{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ – вектор n переменных, который в нашей задаче имеет смысл набора параметров определяющих соотношений. Задача формулируется как задача оптимизации с ограничениями, такими как $-2 \leq \alpha_i \leq 2$. Функция Розенброка [1, 4, 7] достигает глобального минимума при $\mathbf{\alpha}_{\text{опт}} = [1, 1, \dots, 1]$; значение функции, соответствующее минимуму, равно нулю.

Результаты сравнения предложенного комбинированного метода оптимизации (метод «отжига» и метод Нелдера–Мида) и метода «отжига» для функции Розенброка двух и четырех переменных приведены в табл. 4 и 5. Для оценки влияния начального приближения $\mathbf{\alpha}_0$ на процедуру оптимизации тесты проводились из случайно выбранных точек: $[-1,99; 1,96]$ и $[1,52; 1,57]$ для двух параметров; $[-1,99; 1,96; -1,98; 1,97]$ $[1,52; 1,57; 1,52; 1,57]$ для четырех параметров. При проведении испытаний было доказано, что сходимость методов несущественно зависит от начального приближения $\mathbf{\alpha}_0$. Подтверждение данного вывода можно найти в теории метода [1, 4].

Тесты показывают, что предложенный метод находит точное значение глобального минимума и требует меньших временных затрат на расчёты по сравнению с методом «отжига». Однако во многом это зависит от генератора случайных чисел в стохастической части процедуры, как показано в работе [4].

Таблица 4

Сравнение метода отжига и комбинированного методов с двумя параметрами

Метод	Начальное приближение	Координаты точки минимума	Значение функции в точке минимума	Время, затраченное на вычисления (%)
«Отжиг»	$[-1,99; 1,96]$	$[1,0062; 1,0111]$	$2,11 \cdot 10^{-4}$	100
	$[1,52; 1,57]$	$[1,001; 1,001]$	$8,55 \cdot 10^{-5}$	58
Комбинированный	$[-1,99; 1,96]$	$[1,00; 1,00]$	0	12
	$[1,52; 1,57]$	$[1,00; 1,00]$	0	11

Таблица 5

Сравнение метода отжига и комбинированного методов с четырьмя параметрами

Метод	Начальное приближение	Координаты точки минимума	Значение функции в точке минимума	Время, затраченное на вычисления (%)
«Отжиг»	$[-1,99, 1,96, -1,98, 1,97]$	$[0,975; 0,943; 0,901; 0,828]$	0,057	100
	$[1,52, 1,57, 1,50, 1,55]$	$[1,015; 1,031; 1,07; 1,14]$	0,015	98
Комбинированный	$[-1,99, 1,96, -1,98, 1,97]$	$[1,00; 1,00; 1,00; 1,00]$	$9,2 \cdot 10^{-28}$	94
	$[1,52, 1,57, 1,50, 1,55]$	$[1,00; 1,00; 1,00; 1,00]$	0	96

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Begambre, O.* A hybrid particle swarm optimization – simplex algorithm (PSOS) for structural damage identification / O. Begambre, J.E. Laier // *Advanced Engineering Software*. – 2009 (*in press*).
2. *Berkovitz, B.K.B.* The periodontal ligament in health and disease / B.K.B. Berkovitz, B.J. Moxham, H.N. Newmann. – London: Mosby–Wolfe, 1995.
3. *Boukari, D.* Survey of penalty, exact-penalty and multiplier methods from 1968 to 1993 / D. Boukari, A.V. Fiacco // *Optimization*. – 1995. – Vol. 32. – P. 301–334.
4. *Corana, A.* Minimizing multimodal functions of continuous variables with the “simulated annealing” algorithm / A. Corana, M. Marchesi, C. Martini and S. Ridella // *ACM T. Math. Software*. – 1987. – Vol. 13. – P. 262–280.
5. *Gabella, G.* The cross-ply arrangement of collagen fibres in the submucosa of the mammalian small intestine / G. Gabella // *Cell Tissue Res*. – 1987. – Vol. 248. – P. 491–497.
6. *Guo, Z.Y.* A composites-based hyperelastic constitutive model for soft tissue with application to the human annulus fibrosus / Z.Y. Guo, X.Q. Peng, B. Moran // *J. Mech. Phys. Solids*. – 2006. – Vol. 54. – P. 1952–1971.
7. *Hillstrom, K.E.* A simulation test approach to the evaluation of nonlinear optimization algorithms / K.E. Hillstrom // *T. Math. Software*. – 1977. – Vol. 3. – P. 305–315.
8. *Holzappel, G.A.* *Nonlinear Solid Mechanics: a continuum approach for engineering* / G.A. Holzappel. – New York: Wiley, 2000.
9. *Junqueira, L.C.* *Basic histology* / L.C. Junqueira, J. Carneiro, J.A. Long. – London: Prentice-Hall International, 2000.
10. *Karami, G.* A micromechanical hyperelastic modeling of brain white matter under large deformation / G. Karami, N. Grundman, N. Abolfathi, A. Naik, M. Ziejewski // *J. Mech. Biomed. Mater*. – 2009. – Vol. 2. – P. 243–254.
11. *Kirkpatrick, S.* Optimization by simulated annealing / S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, Jr., M.P. Vecchi // *Science*. – 1983. – Vol. 220. – P. 671–679.
12. *Kroon, M.* A new constitutive model for multi-layered collagenous tissues / M. Kroon, A.G. Holzappel // *J. Biomech*. – 2008. – Vol. 41. – P. 2766–2771.
13. *Lagarias, J.C.* Convergence properties of the Nelder Mead simplex method in low dimensions / J.C. Lagarias, J.A. Reeds, M. H. Wright, P. E. Wright // *Siam J. Optim*. – 1998. – Vol. 9. – P. 112–147.
14. *Lei, F.* Inverse analysis of constitutive models: Biological soft tissues / F. Lei, A.Z. Szeri // *J. Biomech*. – 2006. – P. 2343–2358.
15. *Limbert, G.* On the constitutive modeling of biological soft connective tissues: a general theoretical framework and explicit forms of the tensors of elasticity for strongly anisotropic continuum fiber-reinforced composites at finite strain / G. Limbert, M. Taylor // *Int. J. Solids Struct*. – 2002. – Vol. 39. – P. 2343–2358.
16. *Marsden, J.E.* *Mathematical Foundations of Elasticity* / J.E. Marsden, T.J.R. Hughes. – New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983.
17. *Maurel, W.* *Biomechanical Models for Soft Tissue Simulation* / W. Maurel, Y. Wu, N. Magnenat Talman, D. Thalman. – Berlin: Springer, 1998.
18. *Metropolis, N.* Equation of state calculations by fast computing machines / N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, E. Teller // *J. Chem. Phys*. – 1953. – Vol. 21. – P. 1087–1090.
19. *Minns, R.J.* The role of the fibrous components and ground substance in the mechanical properties of biological tissues: a preliminary investigation / R.J. Minns, P.D. Soden, D.S. Jackson // *J. Biomech*. – 1973. – Vol. 6. – P. 153–165.
20. *Natali, A.N.* Numerical analysis of tooth mobility: formulation of a non linear constitutive law for the periodontal ligament / A.N. Natali, P.G. Pavan, C. Scarpa // *Dental Materials*. – 2004. – Vol. 20. – P.623–629.
21. *Natali, A.N.* Anisotropic elasto-damage constitutive model for the biomechanical analysis of tendons / A.N. Natali, P.G. Pavan, E.L. Carniel, M.E. Lucisano, G. Tagliavoro // *Med. Eng. Phys*. – 2005. – Vol. 27. – P. 209–214.
22. *Natali, A.N.* Hyperelastic models for the analysis of soft tissue mechanics: definition of constitutive parameters / A.N. Natali, E.L. Carniel, P.G. Pavan, P. Dario, I. Izzo // *IEEE/RAS-EMBS International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics*. – Pisa, Italy. – 2006.
23. *Natali, A.N.* Experimental-numerical analysis of minipig's multi-rooted teeth / A.N. Natali, E.L. Carniel, P.G. Pavan, C. Bourauel, A. Ziegler, L. Keilig // *J. Biomech*. – 2007. – Vol. 40. – P. 1701–1708.
24. *Natali, A.N.* A visco-hyperelastic-damage constitutive model for the analysis of the biomechanical response of the periodontal ligament / A.N. Natali, E.L. Carniel, P.G. Pavan, F.G. Sander, C. Dorow, M. Gaiger // *ASME J. Biomech. Eng*. – 2008. – Vol. 130. – P. 15–28.
25. *Nishihira, M.* *Mechanics of periodontal ligament* / M. Nishihira, K. Yamamoto, Y. Sato, H. Ishikawa, A.N. Natali // *Dental biomechanics*, edited by A.N. Natali. – London: Taylor & Francis, 2003.

26. *Ottani, V.* Collagen structure and functional implications / V. Ottani, M. Raspanti, A. Ruggeri // *Micron*. – 2001. – Vol. 32. – P. 251–260.
27. *Ottani, V.* Hierarchical structures in fibrillar collagens / V. Ottani, D. Martini, M. Franchi, A. Ruggeri, M. Raspanti // *Micron*. – 2002. – Vol. 33. – P. 587–596.
28. *Provenzano, P.* Collagen fibril morphology and organization: implication for force transmission in ligament and tendon / P. Provenzano, R. Vanderby // *Matrix Biol.* – 2006. – Vol. 25. – P. 71–84.
29. *Silver, F.H.* Collagen self-assembly and the development of tendon mechanical properties / F.H. Silver, J.W. Freeman, G.P. Seehra // *J. Biomech.* – 2003. – Vol. 36. – P. 1529–1553.
30. *Spencer, A.J.M.* Continuum theory of the mechanics of fiber-reinforced composites / A.J.M. Spencer. – New York: Springer–Verlag, 1984.
31. *Yang, W.* 3D mechanical properties of the layered esophagus: experiment and constitutive model / W. Yang, T.C. Fung, K.S. Chian, C.K. Chong // *J. Biomech. Eng.* – 2006. – Vol. 128. – P. 899–908.
32. *Yang, W.* Directional, regional, and layer variations of mechanical properties of esophageal tissue and its interpretation using a structure-based constitutive model / W. Yang, T.C. Fung, K.S. Chian, C.K. Chong // *J. Biomech. Eng.* – 2006. – Vol. 128. – P. 409–418.

PARAMETERS IDENTIFICATION IN CONSTITUTIVE MODELS FOR SOFT TISSUE MECHANICS

A.N. Natali, A. Forestiero, E.L. Carniel (Padova, Italy)

An important challenge occurring at the formulation of constitutive models for soft biological tissues is an evaluation of the constitutive parameters. Constitutive models of the soft tissue should take into account a response of biological material, which is characterised by anisotropy, material non-linearity, almost-incompressibility, and large strains and displacements. The present work presents a procedure to estimate the constitutive parameters by fitting predicted model results with specific experimental data. The approach assumes the stress–strain history obtained from experimental data and after that a special algorithm based on coupled stochastic and a deterministic techniques attempts to estimate the parameter values, which provide minimal discrepancy between theoretical and experimental curves. In given paper, analytical models describing behaviour of the periodontal ligament and esophageal tissues are presented. This approach was shown to enable proper mechanical description of various responses by biological soft tissues differing by structure and functions. Result validation is performed by comparison of the experimental data and model results.

Key words: soft biological tissue, constitutive formulation, constitutive parameters, non-linear analysis.

Получено 20 октября 2009