

УДК 539.3

В.Н. Нечаев
V.N. Nechaev

ОАО «Российский научно-исследовательский и проектный институт титана и магния»,
г. Березники
JSC “Russian Research and Design Institute of Titanium and Magnesium”, Berezniki

А.И. Цаплин
A.I. Tsaplin

Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Perm National Research Polytechnic University

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

MODELING OF HEAT AND MASS TRANSFER OF A VISCOUS FLUID IN A RECTANGULAR REGION

Описано решение сопряженной задачи тепловой конвекции, возникающей при определенном перепаде температур в замкнутой камере прямоугольного сечения, заполненной водой. Приводится сравнение результатов численного эксперимента с данными, полученными на реальной лабораторной установке. Построены графики сходимости итерационного процесса и показана сходимость численного решения к точному. Выполнены параметрические расчеты со сгущением сетки по оценке величины погрешности. Показана адекватность разработанной математической модели.

Ключевые слова: математическая модель, губчатый титан, расчетная область, продольно-поперечная прогонка, тепловая конвекция, сгущение сетки, оценка точности счета.

The decision of the conjugate problem of heat convection, occurring at a specific temperature difference in a closed chamber of a rectangular cross section filled with water is described. Comparison of the numerical experiment results with the picture obtained on laboratory setup is given. Presented graphs to the Convergence of iteration process and shown a convergence of numerical solutions to the exact. Parametric calculations with mesh decimation on the error evaluation are made. An adequacy of the developed mathematical model is shown.

Keywords: mathematical model, titanium sponge, estimated area, longitudinal and cross running, thermal convection, mesh decimation, estimation of the accuracy account.

Исследование гидродинамических явлений вязкой среды, возникающих в условиях свободной тепловой конвекции, представляет интерес для понимания различных процессов получения материалов в черной и цветной металлургии. Ранее авторами были опубликованы результаты моделирования теплового состояния реактора для получения губчатого титана в бесконвективном приближении [1]. Однако, как показано в работе [2], в экспериментах на оптической установке, учет свободной тепловой конвекции в жидкой фазе, моделируемой прямоугольной областью, оказывает значительное влияние на неравновесную тепловую обстановку. В этой же работе, а также в монографии [3] предложены более сложные тесты с намораживанием воды в прямоугольной области с адиабатическими изотермическими границами в условиях инверсии ее плотности. Возникает задача разработки математической модели теплового состояния реактора, учитывающей конвективный теплоперенос, и проверки адекватности этой модели и метода ее численной реализации экспериментальным данным.

Постановка задачи и реализация метода решения. В работе [2] экспериментально оптическими методами определялось неравновесное тепловое состояние в канале прямоугольного сечения с непроницаемыми стенками, полностью заполненном водой. Размеры канала: ширина – 0,045 м, высота – 0,073 м. Верхняя и нижняя граница принимались адиабатными, правая и левая стенки – изотермическими с температурами соответственно 16,2 и 14,1 °С.

Свойства воды в заданном интервале температур описываются температурными зависимостями, представленными в табл. 1. Коэффициент кинематической вязкости задается постоянным: $\nu = 1,429 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

Таблица 1

Соотношения для описания свойств воды

Наименование параметра	Разрешающее соотношение	Единицы измерения
Коэффициент теплопроводности	$\lambda = 0,569 + 0,0016 \cdot t$	Вт/(м·К)
Теплоемкость	$c = 4,212 - 0,0011 \cdot t$	кДж/(кг·К)
Плотность	$\rho = \rho_0(1 + 6,3 \cdot 10^{-3} \cdot t - 7,491 \cdot 10^{-4} \cdot t^2)$, где ρ_0 – плотность воды при 0 °С, $\rho_0 = 999,841 \text{ кг/м}^3$	кг/м ³
Коэффициент объемного расширения	$\beta = (0,15 \cdot t - 0,63) \cdot 10^{-4}$	К ⁻¹

В перечисленных уравнениях значения температуры t подставляются в градусах Цельсия.

Расчетная схема к модели тепломассопереноса в канале прямоугольного сечения приведена на рис. 1.

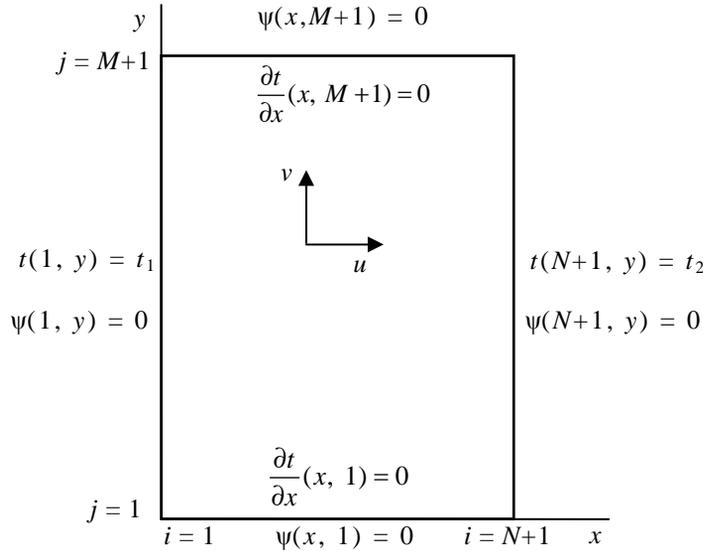


Рис. 1. Расчетная схема

В обозначениях работ [3, 4] формулировка задачи тепловой конвекции в прямоугольных координатах (x, y) сводится к системе трех дифференциальных уравнений: переноса тепловой энергии, завихренности и Пуассона, которые имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \tau} + u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} &= a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} &= v \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + g\beta \frac{\partial t}{\partial x}, \\ \nabla^2 \psi &= -\omega, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v,$$

где t – температура; ω – завихренность; ψ – функция тока; τ – время; a – коэффициент температуропроводности, м²/с, $a = \lambda_0 / (\rho c)$; u, v – компоненты ско-

рости в проекциях на оси x и y соответственно, м/с; g – ускорение свободного падения, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Система уравнений (1) решалась численным методом на регулярной сетке с числом разбиений N и M в направлении координат соответственно x и y при задании следующих начальных и граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} t(\tau = 0) = t_0, \quad \omega(\tau = 0) = \psi(\tau = 0) = 0, \\ t(1, y) = t_1 = 16,2 \text{ }^\circ\text{C}, \\ t(N+1, y) = t_2 = 14,1 \text{ }^\circ\text{C}, \\ \frac{\partial t}{\partial x}(x, 1) = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x}(x, M+1) = 0, \\ \psi(1, y) = \psi(x, M+1) = \psi(N+1, y) = \psi(x, 1) = 0, \end{aligned} \right\}$$

где t_0 – температура в начальный момент времени.

Перечислим основные методы, применявшиеся при разработке математической модели и программы ее реализации. Уравнения переноса тепловой энергии и завихренности решались методом продольно-поперечной прогонки, уравнение Пуассона – методом последовательной линейной верхней релаксации. В дискретных аналогах уравнений для расчета приграничных значений завихренности использовалась добавка к подъемной силе. При аппроксимации конвективных членов в уравнениях переноса использована схема с разностями против потока, известная еще как схема с донорными ячейками или схема Роуча. На непроницаемых границах выполнялось подправление условий прилипания с применением двухконтурной методики В.Л. Грязнова и В.И. Полежаева.

В ходе счета шаг по временной сетке выбирался исходя из условия Куранта:

$$h_\tau < h_x/v_{\max},$$

где h_x – шаг пространственной сетки, м; v_{\max} – максимальное значение, выбранное из массива компонент скорости.

Обсуждение результатов вычислительного эксперимента. Разработана математическая модель и компьютерная программа, позволяющие анализировать неравновесные теплофизические процессы, возникающие в условиях свободной конвекции вязкой среды без изменения ее агрегатного состояния. В вычислительном эксперименте задавались граничные условия и свойства воды. Счет проводился до выхода процесса на установление с наперед заданной точностью, решение тестировалось со сгущением сетки оценкой стремления численного решения к точному. Вычислительный эксперимент проводился на сетках, перечисленных в табл. 2.

Таблица 2

Расчётные сетки, используемые для тестирования математической модели

N	20	30	40	50	60	70
M^*	32	49	65	81	97	114
Число узлов ($N+1$) \times ($M+1$)	693	1550	2706	4182	5978	8165

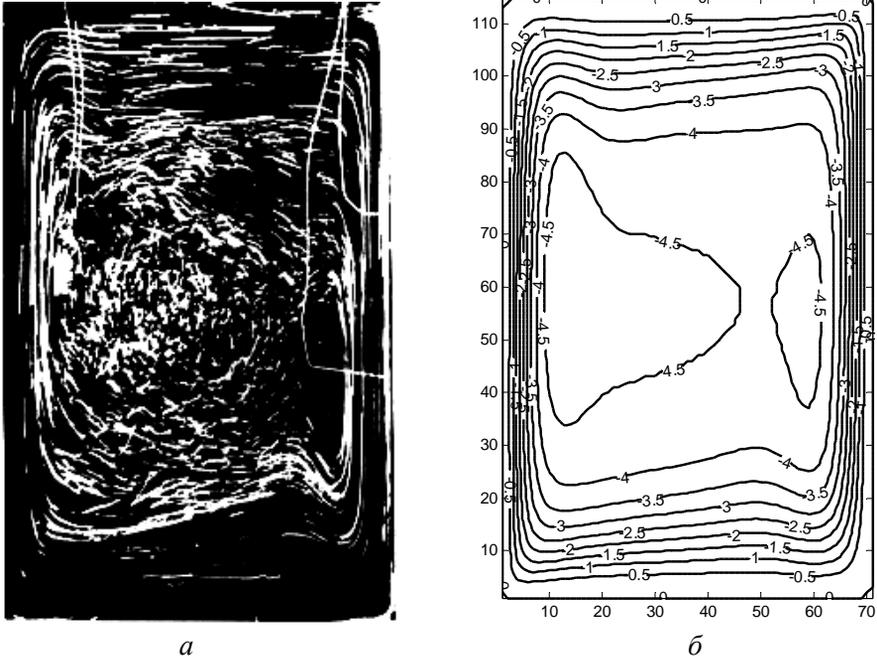
* Число разбиений M по вертикальной оси выбиралось исходя из условия, что ячейка сетки имеет форму квадрата.

На рис. 2 представлены результаты сравнения расчетных и экспериментальных данных. В условиях свободной конвекции вода течет по замкнутому контуру вдоль стенок канала (рис. 2, *a*). Более нагретые струи воды выносятся в верхнюю часть камеры, откуда, постепенно охлаждаясь, опускаются вдоль правой стенки. Вблизи границ наблюдается значительная плотность линий тока. В районе левого верхнего и правого нижнего углов канала отчетливо видны характерные изогнутости течения воды. Линии тока математической модели (рис. 2, *б*), повторяют особенности течения реальной жидкости: несимметричность течения в угловых зонах, два вихря в средней части расчетной области, пограничные слои у стенок канала.

На рис. 2, *в* показаны расчетные изотермы, в результате конвекции происходит значительное их искривление. Вблизи вертикальных границ образуются перегибы, повторяющие направление течения воды. В средней части расчетной области изотермы располагаются практически горизонтально со стратификацией температуры по высоте.

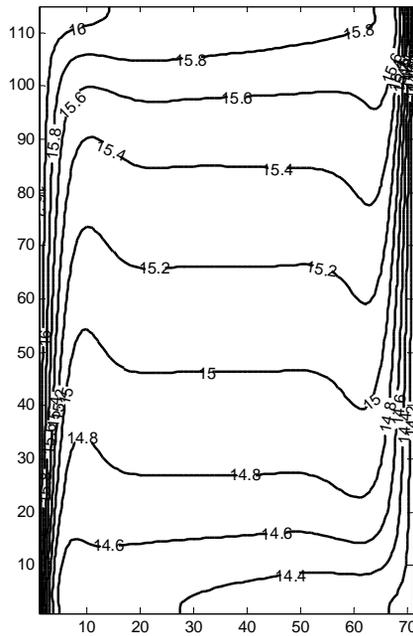
Счет на сетке 70×114 . На основании сравнения расчетных и реальных линий тока воды можно сделать вывод об адекватности математической модели, которая позволяет детально описать наблюдаемые неравновесные процессы конвективного теплообмена в расчетной области прямоугольного сечения.

На рис. 3 приведен график установления процесса счета на сетке 70×114 , где отображена динамика изменения максимальных значений функции тока (ψ_{\max}), скорости (v_{\max}) и относительной погрешности по завихренности (ϵ_{ω}).



a

б



в

Рис. 2. Тепловая конвекция жидкости в прямоугольной области: *a* – экспериментальные траектории движения воды; *б* – расчетные траектории движения воды, $\psi \cdot 10^5$, $\text{м}^2/\text{с}$; *в* – расчетные изотермы, t , $^{\circ}\text{C}$

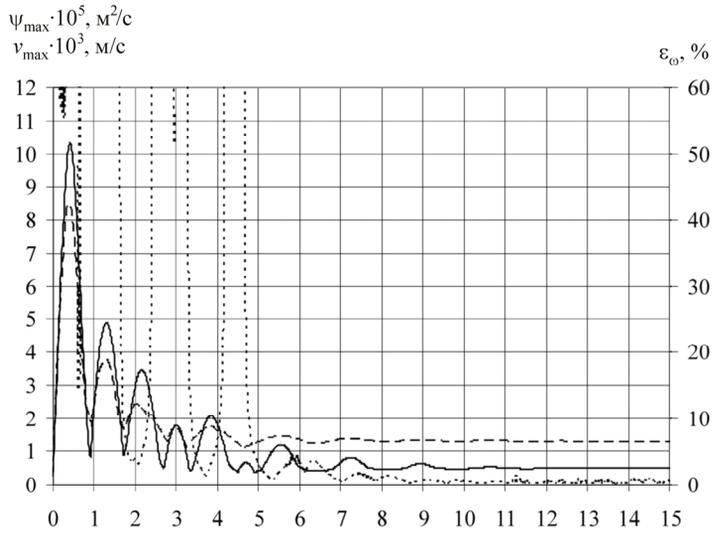


Рис. 3. График установления итерационного процесса на сетке с числом разбиений 70×114 : — ψ_{\max} ; - - - v_{\max} ; ····· ϵ_{ω}

На первых временных слоях процесс установления характеризуется скачкообразным изменением параметров, величина ϵ_{ω} принимает значения более 100 %. Количество внутренних итераций по функции тока при этом более 200. По мере того как решение выходит на установление, осцилляции по завихренности затухают и после 12-го слоя по времени ϵ_{ω} не превышает 1 %. Число внутренних итераций после выхода на установление также снижается до 4–5 на каждом слое по времени. Максимальное число внешних итераций наблюдается в начальный период счета, на первых трех слоях по времени. Дальнейшее изменение величин ψ_{\max} и v_{\max} стремится к минимуму, небольшие колебания наблюдаются только по ϵ_{ω} .

Шаг сетки по времени следует выбирать исходя из условия Куранта с учетом коэффициента запаса 0,5. Для сетки 70×114 величина h_{τ} находилась в диапазоне 0,25–0,31 с, при этом достигается удовлетворительная сходимость решения и устойчивость счета. На более крупных сетках коэффициент запаса можно увеличивать до 0,7–0,8.

Для оценки погрешности численного решения проводились сравнительные расчеты на 6 различных сетках. Оценивалось стремление численного решения к точному при сгущении сетки. После выхода решения на установление максимальные значения, полученные на мелкой сетке, по завихренности, скорости, функции тока и температуре фиксировались, а затем сравнивались с их аналогами на более крупной сетке. При этом рассчитывалась величина погрешности:

$$R = \left| 1 - \frac{S_{n1}}{S_{n2}} \right|_{\max} 100 \%,$$

где S_{n1} и S_{n2} – максимальное значение функции (ω, ψ, v, t) на сетках с числом узлов $n1 < n2$.

На рис. 4 представлен график изменения величины погрешности при сгущении сетки. Наблюдается устойчивая тенденция снижения погрешности по всем искомым параметрам. Представленный график характеризует стремление полученных математическим моделированием численных решений к точному при постепенном сгущении сетки. На максимально подробной сетке с числом разбиений 70×114 (по сравнению с сеткой 60×97) достигнута величина погрешности по завихренности 3,9 %. По остальным переменным R составляет менее 2 % и в частности для максимальной скорости равна 1,6 %.

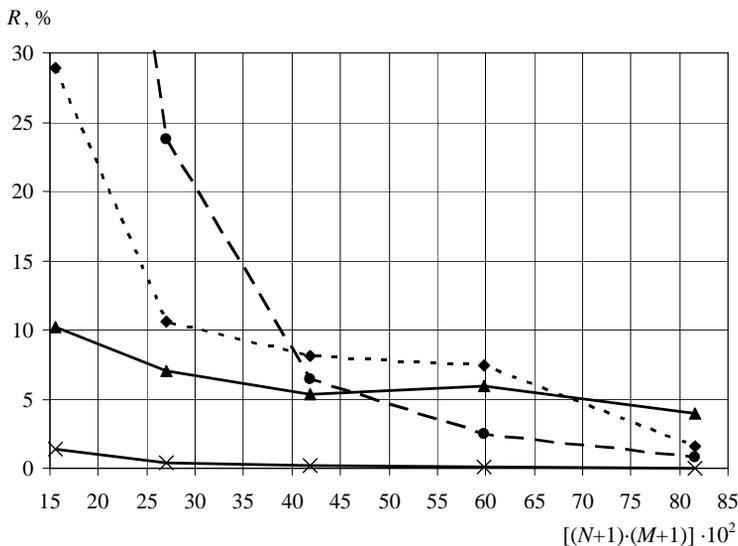


Рис. 4. Динамика уменьшения величины погрешности R со сгущением сетки: - \blacklozenge - v_{\max} ; - \bullet - ψ_{\max} ; - \blacktriangle - ϵ_{ω} , - \times - ϵ_t

Таким образом, показана адекватность разработанной математической модели и метода ее реализации для описания неравновесного процесса теплопереноса вязкой жидкости. Параметрические расчеты для прямоугольной области показали уменьшение погрешности расчетов при сгущении регулярной сетки. Погрешность расчетов на сетке с числом разбиений $N \times M = 70 \times 114$ не превышает 3,9 %. Построены графики сходимости итерационного процесса и стремления численного решения к точному. Разработанная математическая модель оказывается полезной для описания процессов теплопереноса в аппарате для получения губчатого титана.

Список литературы

1. Нечаев В.Н., Цаплин А.И. Математическое моделирование процесса нагрева реактора восстановления в магнетермическом получении губчатого титана // Вестник Перм. гос. техн. ун-та. Прикладная математика и механика. – 2011. – № 9. – С. 176–181.

2. Селянинов Ю.А. Разработка технологических режимов перемешивания жидкой фазы непрерывных стальных слитков с целью повышения однородности структуры металла: дис. ... канд. техн. наук. – Горький, 1985. – 165 с.

3. Цаплин А.И. Теплофизика внешних воздействий при кристаллизации стальных слитков на машинах непрерывного литья. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1995. – 238 с.

4. Цаплин А.И. Теплофизика в металлургии: учеб. пособие. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. – 230 с.

Получено 12.09.2013

Нечаев Владимир Николаевич – аспирант, заведующий лабораторией термии титана и магния, ОАО «Российский научно-исследовательский и проектный институт титана и магния» (618421, г. Березники, Пермский край, пр. Ленина, 101, e-mail: nechvladimir@yandex.ru).

Цаплин Алексей Иванович – доктор технических наук, профессор, Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: tai@pstu.ru).

Nechaev Vladimir Nikolaevich – Graduate Student, Head of the laboratory of the Terme of titanium and magnesium (618421, Berezniki, Perm region, Lenina av., 101, e-mail: nechvladimir@yandex.ru).

Tsaplin Aleksey Ivanovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, Komsomolsky av., 29, e-mail: tai@pstu.ru).