

УДК 536.33

Д.С. Голдобин^{1,2}, П.В. Краузин²¹Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия²Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

НАСЫЩЕНИЕ ЗАТОПЛЕННЫХ ПОЧВ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСЬЮ ГАЗОВ

Теоретически исследуется проблема формирования двухкомпонентного газового горизонта в насыщенном жидкостью пористом массиве, занимающем полупространство. Рассматривается случай равномерного распределения источников газов в пористом массиве при изотермических условиях. Исследованы приповерхностные переходные слои, состав пузырьков которых может отличаться от состава на глубине.

Ключевые слова: пористая среда, пузырьковые горизонты, двухкомпонентный газ, гидродинамическая дисперсия, закон Генри.

D.S. Goldobin^{1,2}, P.V. Krauzin²¹Perm State National Research University, Perm, Russian Federation²Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

SATURATION OF AQUIFERS WITH TWO-COMPONENT GAS MIXTURE

We study the problem of the formation of two-component gas bubbly horizon in a liquid-saturated porous medium occupying half-space. We consider spatially uniform rate of the gas generation under isothermal conditions. Near-surface transient layers, bubble composition of which may deviate from that at the depth, are treated.

Keywords: porous medium, bubbly horizons, two-component gas, hydrodynamic dispersion, Henry's law.

Введение

Макроскопические диффузионные процессы в пузырьковых средах примечательны тем, что, во-первых, в пространстве всюду представлен источник/сток вещества, а, во-вторых, концентрация раствора равна растворимости газа и не является свободным параметром. Две

эти особенности способны приводить к нетривиальным эффектам, таким как формирование пузырьковых горизонтов в присутствии неоднородностей температуры и давления, порождающих неоднородности поля растворимости [1].

Особый интерес представляет влияние волн растворимости на транспортные процессы в пузырьковых средах. Примером системы, где такое можно наблюдать, являются затопленные почвы, в которых прохождение годовой температурной волны вызывает волну растворимости, приводящую к формированию приповерхностной области насыщения поровой жидкости атмосферными газами [2]. Примечательно, что тот же эффект будет иметь место не только в природных, но и технологических системах, где есть колебания температуры поверхности пористого массива (фильтра, реактора и т.п.). На данный момент задача решена в приближении однокомпонентного газа – в случае насыщения почвы воздух полагается состоящим из азота. Учет многокомпонентности газа усложняет задачу. Кроме того, различия в коэффициенте молекулярной диффузии и растворимости различных компонентов воздуха (или иного газа) могут вызывать процессы перераспределения газа, и ответ на вопрос даже о качественном долевым составе газового горизонта оказывается неочевидным.

Данная работа посвящена проблеме процессов транспорта различных компонентов газа в насыщенном жидкостью пористом массиве, в частности случаю генерирования двух компонентов газа в массиве при изотермических условиях.

Рассматривается случай насыщенного смесью газов раствора, в пористом массиве которого всюду имеются пузырьки газовой фазы. Если характерный размер пор $l < \sqrt{\sigma/\rho g}$ (σ и ρ – коэффициент поверхностного натяжения и плотность жидкости, заполняющей массив, соответственно; g – ускорение свободного падения), то газовые пузырьки оказываются обездвижены в пористой матрице силами поверхностного натяжения. Вместе с тем крупные уединенные пузырьки при движении всегда неустойчивы к расщеплению [3]. Таким образом, транспорт газа в системе оказывается связан с его раствором в жидкости – механического переноса самих пузырьков нет.

1. Транспорт в насыщенном растворе двухкомпонентного газа

При наличии гидродинамической дисперсии ($D \sim 10^{-7}$ м²/с) [4–6], не зависящей от природы газов, молекулярным транспортом газов ($D \sim 10^{-9}$ м²/с) через раствор можно пренебречь. Величины потоков газов будут определяться профилями концентраций газов, растворенных в жидкости – $X_s^{(i)}$:

$$J^{(i)} = -D \frac{dX_s^{(i)}}{dz}. \quad (1)$$

Здесь и далее индекс $i = 1, 2$ нумерует компоненты газовой смеси; вертикальная координата z отсчитывается от поверхности вглубь массива. Концентрации $X_s^{(i)}$, в свою очередь, определяются законом Генри [7]:

$$X_s^{(i)} = \frac{P^{(i)}}{K_H^{(i)}}, \quad (2)$$

где $K_H^{(i)}$ – константы Генри ($K_H \sim 10^4 P_{\text{атм}}$); $P^{(i)}$ – парциальные давления газов. Если $X_b^{(i)}$ – молярные доли газов, находящихся в пузырьковой фазе, то

$$P^{(i)} = \frac{X_b^{(i)}}{X_b^{(1)} + X_b^{(2)}} P. \quad (3)$$

Здесь P – гидростатическое поле давления, т.е. $P = P_{\text{атм}} + \rho gz$. Закон Генри справедлив для идеальных газов, что соответствует описанию пузырьковой фазы на глубинах до ≈ 40 м. Обозначив $Q^{(i)}$ источники газов, запишем уравнения диффузии:

$$\frac{\partial X_b^{(i)}}{\partial t} = -\frac{dJ^{(i)}}{dz} + Q^{(i)}. \quad (4)$$

В дальнейшем будем интересоваться установившимся ростом газовой фазы в порах и, соответственно, рассматривать решения (4) вида $X_b^{(i)} = v^{(i)} t$. Вводя безразмерную координату $\xi = \rho gz / P_{\text{атм}}$ и подставляя (1)–(3) в (4), получим

$$v^{(i)} = \alpha^{(i)} \frac{d^2}{d\xi^2} \left((1 + \xi) \frac{v^{(i)}}{v^{(1)} + v^{(2)}} \right) + Q^{(i)}, \quad (5)$$

где $\alpha^{(i)} = \frac{D(\rho g)^2}{P_{\text{атм}} K_H^{(i)}}$.

Пусть $y = v^{(1)}/(v^{(1)} + v^{(2)})$ – относительная скорость формирования пузырьковой фазы первого газа. Делая подстановку в равенство $yv^{(2)} = (1 - y)v^{(1)}$ выражений для $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ (5), приходим к уравнению

$$\frac{d^2}{d\xi^2} ((1 + \xi)y) = \frac{Q^{(1)}}{\alpha^{(1)}} \cdot \frac{y(q+1)-1}{y(k-1)+1}, \quad (6)$$

где $q = Q^{(2)}/Q^{(1)}$; $k = K_H^{(1)}/K_H^{(2)}$. Индексом 1 будем обозначать менее растворимый компонент смеси, тогда $k > 1$.

Имея решения уравнения (6), можно возвращаться к исходным функциям $v^{(i)}$, используя формулы

$$v^{(1)} = Q^{(1)} \left(\frac{y(q+1)-1}{y(k-1)+1} + 1 \right), \quad (7)$$

$$v^{(2)} = v^{(1)} \frac{1-y}{y}.$$

Дифференциальное уравнение (6) не имеет решения в элементарных функциях. Для дальнейшего анализа рассмотрим предельные случаи.

2. Отсутствие гидростатического давления ($\xi \ll 1$)

Физически такой постановке задачи отвечает случай малой глубины пузырькового горизонта ($\xi \ll 1$). Такая ситуация может реализовываться и в технологических задачах с произвольной ориентацией поверхности пористого массива в пространстве.

Удобно перейти к координате $\zeta = \xi \sqrt{\alpha^{(1)}/Q^{(1)}}$. Преобразованное уравнение (6) после однократного интегрирования примет вид

$$\frac{dy}{d\zeta} = \pm \sqrt{2} \sqrt{C + \frac{q+1}{k-1} y - \frac{k+q}{(k-1)^2} \ln(1 + (k-1)y)}, \quad (8)$$

где C – константа интегрирования.

Фазовый «портрет» уравнения (8) изображен на рис. 1.

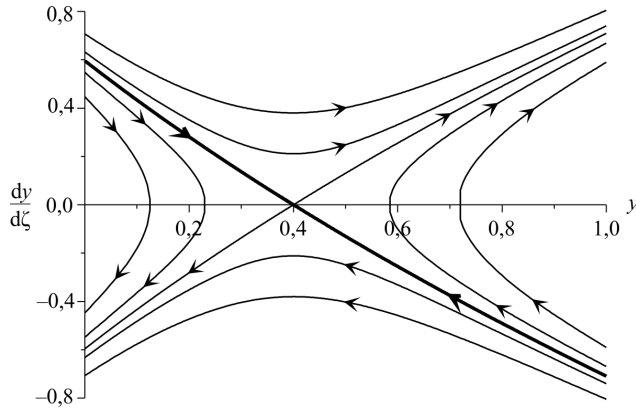


Рис. 1. Фазовый «портрет» для значений $q = 1,5, k = 2$

Поскольку физически допустимым является интервал $0 \leq y \leq 1$, а движению по фазовым траекториям параметризует переменная $\zeta \sim z$, то физическому решению в полупространстве $\zeta \in [0, +\infty)$ соответствуют лишь сепаратрисы (выделены жирной линией), входящие в седловую точку на фазовой плоскости. Остальные фазовые траектории выходят за пределы области допустимых значений y . Положение седловой точки может быть найдено из условия

$$\frac{d^2 y}{d\zeta^2} = \frac{dy}{d\zeta} = 0, \quad (9)$$

откуда $y_s = 1/(1 + q)$. Подстановка y_s в (8) позволит определить C для сепаратрисы, уравнение которой будет иметь вид

$$\frac{dy}{d\zeta} = \pm \sqrt{\frac{2}{k-1}} \sqrt{\frac{y}{y_s} - 1 - \left(1 + \frac{1}{y_s(k-1)}\right) \ln \left(\frac{1+y(k-1)}{1+y_s(k-1)}\right)}. \quad (10)$$

Выражение (10) заметно упрощается для случая $k \approx 1$:

$$\frac{dy}{d\zeta} = \pm \frac{y - y_s}{\sqrt{y_s}}. \quad (11)$$

Отбрасывая расходящееся решение (11), получим искомую зависимость

$$y = y_s + (y_0 - y_s) \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{y_s}}\right), \quad (12)$$

где $y_0 = y(0)$.

Для значений $k > 1$ уравнение (10) требует численного анализа. Варьируя параметры q и k , получим различные решения $y(\zeta)$, отвечающие различным y_0 . На рис. 2 можно видеть, что k отвечает за скорость приближения y к своему равновесному значению на глубине, а q , как показано выше, определяет это равновесное значение y_s .

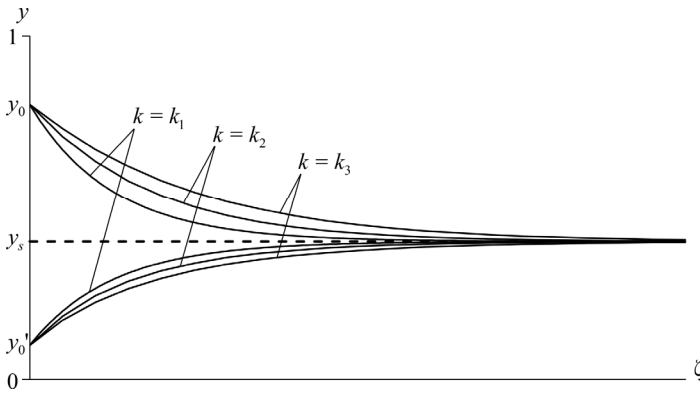


Рис. 2. Относительная скорость генерации пузырьковой фазы,
 $k_3 > k_2 > k_1 = 1$

Аналогичным образом ведут себя и $v^{(1)}$, $v^{(2)}$: начиная с некоторого значения на поверхности при возрастании ζ , стремятся, как следует из формулы (7), к своим предельным значениям $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ соответственно.

3. Большие пространственные масштабы процесса ($\xi \gg 1$)

Данная постановка задачи оказывается актуальна, когда процесс генерирования газов происходит в области существенно толще 10 м. В этом случае можно полагать линейную зависимость давления от глубины, пренебрегая отличием его от нуля на поверхности, что уменьшает число управляющих параметров в задаче. Математически этому случаю соответствует предел больших ξ .

В этом случае уравнение (6) будет иметь вид

$$\frac{d^2}{d\eta^2}(\eta y) = \frac{y/y_s - 1}{y(k-1) + 1}, \quad (13)$$

где $\eta = \xi \alpha^{(1)} / Q^{(1)}$.

Стоит отметить, что уравнение (13) также можно получить и без ограничения на величину ξ , проводя замену $\xi \rightarrow \xi - 1$, что означает перенос начала координат в точку $\xi = 1$, или $\eta = \alpha^{(1)}/Q^{(1)}$. Поэтому решение (13) относится и к полной постановке задачи, задающей уравнение (6).

Случай $k \approx 1$ допускает аналитическое решение (13), удовлетворяющее условию ограниченности y при $\eta \rightarrow \infty$.

$$y = y_s + \frac{y_1 - y_s}{\sqrt{\eta}} \cdot \frac{K_1(2\sqrt{\eta/y_s})}{K_1(2/\sqrt{y_s})}, \quad (14)$$

где K_1 – модифицированная функция Бесселя второго рода, $y_1 = y(1)$.

Заключение

В работе теоретически исследована проблема формирования пузырькового газового горизонта в насыщенном жидкостью пористом массиве, занимающем полупространство. Рассматриваются изотермические условия и случай преобладания гидродинамической дисперсии над молекулярной диффузией [4–6]; учитывается возможный гидростатический градиент давления. Полагается постоянная и однородная в пространстве скорость генерирования обоих компонентов газа.

Примечательно, что, хотя в глубине массива отношение массовых долей компонентов газа равно отношению скоростей генерации их массы, в приповерхностном слое возможно отклонение состава формирующегося пузырькового горизонта от такового на глубине. В работе получены профили долевого состава формирующихся пузырьков. Примечательно, что толщина приповерхностного переходного слоя тем больше, чем сильнее отличаются растворимости газов в жидкости (минимальная толщина наблюдается при одинаковой растворимости).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (13-01-96030 р_урал_а) и гранта Президента Российской Федерации (МК-6932.2012.1).

Библиографический список

1. Goldobin D.S., Brilliantov N.V. Diffusive counter dispersion of mass in bubbly media // *Phys. Rev. E.* – 2011. – Vol. 84. – 056328.
2. Голдобин Д.С., Краузин П.В. Влияние годовой волны температуры на диффузионный транспорт атмосферного азота в затопленных почвах // *Вестник Перм. ун-та. Серия Физика.* – 2012. – Вып. 4 (22) – С. 44–47.
3. Instability of a drop moving in a Brinkman porous medium / D.V. Lyubimov, S. Shklyaev, T.P. Lyubimova, O. Zikanov // *Phys. Fluids.* – 2009. – Vol. 7. – P. 337–344.
4. Development and Testing of a Kinetic Model for Oxygen Transport in Porous Media in the Presence of Trapped Gas / J.H. Donaldson [et al.] // *Ground Water* – 1997. – Vol. 35. – P. 270.
5. Donaldson J.H., Istok J.D., O'Reilly K.T. Dissolved Gas Transport in the Presence of a Trapped Gas Phase: Experimental Evaluation of a Two-Dimensional Kinetic Model // *Ground Water* – 1998. – Vol. 36. – P. 133.
6. Barenblatt G.I., Yentov V.M., Ryzhik V.M. *Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks.* – Springer, 2010. – 412 p.
7. Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N. *Transport phenomena.* 2nd ed. – N.Y.: Wiley, 2007. – 897 p.

References

1. Goldobin D.S., Brilliantov N.V. Diffusive counter dispersion of mass in bubbly media. *Phys. Rev. E.*, 2011, vol. 84, 056328.
2. Goldobin D.S., Krauzin P.V. Vlijanie godovoj volny temperaturey na diffuzionnyj transport atmosfernogo azota v zatoplennyh pochvah [Influence of annual temperature wave on diffusive transport of atmospheric nitrogen in wetlands]. *Bulletin of the Perm University. Physics*, 2012, iss. 4 (22), pp. 44-47.
3. Lyubimov D.V., Shklyaev S., Lyubimova T.P., Zikanov O. Instability of a drop moving in a Brinkman porous medium. *Phys. Fluids*, 2009, vol. 7, pp. 337-344.
4. Donaldson J.H. [et al.] Development and Testing of a Kinetic Model for Oxygen Transport in Porous Media in the Presence of Trapped Gas. *Ground Water*, 1997, vol. 35, p. 270.

5. Donaldson J.H., Istok J.D., O'Reilly K.T. Dissolved Gas Transport in the Presence of a Trapped Gas Phase: Experimental Evaluation of a Two-Dimensional Kinetic Model. *Ground Water*, 1998, vol. 36, pp. 133.

6. Barenblatt G.I., Yentov V.M., Ryzhik V.M. Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks. Springer, 2010. 412 p.

7. Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N. Transport phenomena. 2nd ed. N.Y.: Wiley, 2007. 897 p.

Об авторах

Голдобин Денис Сергеевич (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник группы «Динамика геологических систем» Института механики сплошных сред УрО РАН (614013, Пермь, ул. Акад. Королева, 1, e-mail: goldobin@icmm.ru); старший преподаватель кафедры теоретической физики Пермского государственного национального исследовательского университета (614990, Пермь, ул. Букирева, 15).

Краузин Павел Васильевич (Пермь, Россия) – аспирант Института механики сплошных сред УрО РАН (614013, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1, e-mail: krauzin@gmail.com).

About the authors

Goldobin Denis Sergeevich (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physical and Mathematical Sciences; Senior Researcher "Dynamics of Geological Systems" of the Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of Russian Academy of Sciences (1, Academic Korolev st., 614013, Perm, Russian Federation, e-mail: goldobin@icmm.ru), Senior Lecturer at the Department of Theoretical Physics of Perm State National Research University (15, Bukireva st., 614990, Perm, Russian Federation).

Krauzin Pavel Vasilyevich (Perm, Russian Federation) – Doctoral Student, Institute of Continuous Media Mechanics Ural Branch of Russian Academy of Sciences (1, Academic Korolev st., 614013, Perm, Russian Federation, e-mail: krauzin@gmail.com).

Получено 17.03.2013