Российский журнал биомеханики, том 6, № 3: 13-32, 2002

Российский Журнал Биомеханики
www.biomech.ac.ru

УДК 531/534:57+612.7

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЖИВЫХ ТКАНЯХ. ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

© 2002 г. Ю.И. Няшин, В.Ю. Кирюхин

Пермский государственный технический университет, 614600, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр. 29а, e-mail: nyashin@theormech.pstu.ac.ru

Аннотация. Авторы данной работы выдвигают тезис о единообразности математического описания температурных, остаточных и ростовых напряжений, имеющих место в различных процессах в живой ткани. Обоснованием такого предположения служит формализация в виде общей математической модели. Модель предполагает существование упругих деформаций, а также неупругих: ростовых, температурных и других деформаций. Предлагаются две постановки задачи: в перемещениях и в напряжениях.

В работе проведен теоретический анализ постановки задачи определения напряженно-деформированного состояния, позволивший выделить ряд основных свойств решения поставленной задачи, в частности, единственность классического и обобщенного решений.

К основным результатам данной работы следует отнести формулировки и доказательства теорем. В первой теореме определяются необходимые и достаточные условия создания в теле заранее заданных биологических напряжений, причем результат не требует решения самой задачи об определении напряжений в теле.

Второй важный результат позволил связать неупругие (ростовые) деформации, не создающие напряжений в теле, и силы. Оказалось, что в самой общей постановке и в дифференциальной в частности такие деформации равны некоторым силовым деформациям, созданным распределением объемных и поверхностных сил. Этот результат позволяет говорить о совместности деформации в задачах, где нет достаточного уровня производных.

Ключевые слова: остаточные и температурные напряжения, ростовые и температурные деформации, биологические напряжения, моделирование, управление.

Введение

Решение значительного числа практических и теоретических проблем биомеханики (моделирование перестройки, роста и морфогенеза, проведение операций по замене органов и прогнозирование протекания постлечебного периода) связано с учетом, математическим описанием и вычислением напряжений в живых тканях и их искусственных заменителях.

Из обзоров литературы, где приводится множество экспериментальных фактов, их анализа и теоретических исследований напрашивается вывод о том, что в живой ткани можно говорить об остаточных, температурных, ростовых и силовых напряжениях. Причем исследователям требуется в каждом случае практически уникальным образом определять рассматриваемую величину. Рассмотрим некоторые известные из литературы данные.

Остаточные напряжения

Остаточные напряжения в механике классически понимаются как напряжения, создаваемые в теле после снятия внешних нагрузок. Наличие остаточных напряжений в живых мягких тканях также не вызывает сомнений [1]. Так, хорошо известно, что кусочек кожи, вырезанный в форме круга, принимает эллиптическую форму [2]. Таким образом, ясно, что в коже необходимо учитывать остаточные напряжения. В работе [2], к примеру, решается вопрос о вычислении материальных констант, которые на уровне эффективных характеристик учитывают существование остаточных напряжений.

Основополагающими работами по изучению остаточных напряжений в живых тканях считаются работы Ю. Фанга [3], сумевшего экспериментально обосновать существование остаточных напряжений и описать основные тенденции их распространения в живых тканях. Краткий обзор становления проблемы остаточных напряжений в биомеханике также можно найти в работе Л. Табера [3].

Следует отметить, что с тех пор большинство результатов по остаточным напряжениям в биомеханике связано с мягкими тканями (кардиоваскулярная система в целом и артерии в частности) [3, 4].

Одна из гипотез, подогревающих интерес исследователей, говорит о необходимости существования остаточных напряжений в живой ткани. Так, авторы работы [5] применили статическую теорию больших упругих деформаций, первоначально выдвинутую К. Чуонгом и Ю. Фангом [6], для ортотропного материала осциллирующей стенки артерии. Проведенный авторами анализ динамики показал, что учет остаточных напряжений приводит к уменьшению больших окружных напряжений на внутренней стенке на 62% и градиента напряжений вдоль стенки артерии на 94% в сравнении с напряжениями, полученными без учета остаточных напряжений. Аналогичные результаты, подтверждающие с механической точки зрения необходимость остаточных напряжений, можно также найти в работах [7, 8]. В работе [7], в частности, указывается на то, что остаточные напряжения приводят к выравниванию напряжений в стенке артерии. Д. Гонзалес-Карраско и др. [8] обосновывают необходимость остаточных напряжений для сохранения целостности биоматериалов в процессе деформирования и для повышения выносливости и усталостной устойчивости.

Одной из актуальных проблем до сих пор остается вопрос об измерении реальных напряжений (и остаточных в частности) в твердой и мягкой ткани, поскольку не ясно, как можно однозначно ввести естественную конфигурацию, обладающую нулевыми остаточными и силовыми напряжениями. Этот вопрос затрагивается не только потому, что связан с правильным вычислением остаточных напряжений. Другая серьезная причина связана с тем, что существование остаточных напряжений и их уровень в живой ткани оказывают влияние на ее рост, являясь одним из стимулирующих факторов [3, 9, 10, 11]. Данной теме в литературе уделено особое внимание. В работе [12] делается попытка экспериментально определить распределение остаточных деформаций в стенке артерии и ненапряженного состояния. Такой же вопрос с чисто механической точки зрения активно обсуждается в литературе: к примеру, работы А. Ходжер [13, 14]. Также в работе А. Рачева [9] выдвигается гипотеза, что артерия перестраивает свою ненапряженную конфигурацию таким образом, чтобы распределение деформаций и напряжений в артериальной стенке и гипертензивных условиях было бы таким же, как и при нормальной нагрузке.

Другими словами, считается, что источником остаточных напряжений, существующих в ненагруженной конфигурации, является рост, вызванный напряжениями.

На примере анализа остаточных напряжений в зубной эмали в работе [15] показано, что теплофизические свойства материала и скорость охлаждения являются основными факторами, определяющими остаточные напряжения. В работе рассмотрены температурозависимые свойства материала: модуль упругости, коэффициент вязкости и коэффициент теплового расширения.

Детальный анализ этих и других результатов можно провести отдельно в работе, посвященной корректному определению и вычислению остаточных напряжений.

Температурные напряжения

Помимо остаточных напряжений в живых тканях выделяют и рассматривают температурные напряжения. Обширный обзор по тепловым явлениям в живых тканях дан в работе Й. Телеги [16]. В данной работе указывается, в частности, что в живой ткани могут возникать повреждения из-за напряжений, вызванных охлаждением ткани (температурные напряжения).

Эксперименты показали [18], что появление напряжений в цементе, фиксирующем протез, связаны с его температурой во время затвердевания, и что во время охлаждения напряжения возникают во многом благодаря температурным деформациям в противоположность массовому сжатию.

Температурные проблемы возникают во время и после операции замещения сустава и могут быть разделены на три категории [16]:

- вопросы латентного нагрева заменителей-имплантатов во время поляризации цемента (если он используется при операции);
- проблемы нагрева, вызванного трением во время нормального функционирования протеза;
- вопросы интенсивного нагрева во время распиливания и сверления при ортопедической операции.

Таким образом, к температурным напряжениям относятся не только напряжения, вызванные непосредственным изменением температурного поля и появлением несовместных температурных деформаций [18], но и процессами усадки компонентов искусственных протезов [16], их фазовыми превращениями, поскольку эти изменения могут быть представлены как несиловое объемное расширение или сжатие, характерное для температуры.

Ростовые напряжения

Понятие ростовых напряжений впервые встречается и обосновывается в российской литературе в работах А. Штейна и С. Регирера [19]. Под ростовыми напряжениями понимаются напряжения, возникающие в теле в процессе (в результате) адаптационного роста живой ткани. Авторы подошли к вопросу образования нового материала живой ткани, а вместе с ним и самоуравновешенных ростовых напряжений, с клеточного уровня ткани. Аналогичные результаты зарубежных авторов приводятся в обзоре Л. Табера [3].

Математическое обоснование ростовых напряжений представлено в работе [20]. В этом теоретическом исследовании появление напряжений в растущем объеме объясняется как результат несовместного роста отдельных его частей. Сохранение целостности приводит к необходимости создания ростовых напряжений. Поэтому основное внимание, по мнению авторов, следует уделить вопросам совместности роста и решению проблемы отсчетной конфигурации, о чем уже упоминалось выше.

Такой подход к теоретическому пониманию ростовых напряжений позволяет отнести их к остаточным напряжения, что и делается в работе [20].

Вопросы управления

Как и большинство других задач в области биомеханики, работы, связанные с моделированием и вычислением напряжений в живых тканях, в перспективе ориентированы на постановку и решение задач управления. Последние в биомеханике представляют огромный пласт перспективных проблем.

К одним из самых активно обсуждаемых относится проблема проектирования эндопротезов тазобедренного сустава. В работе [21] ставится проблема оптимальных свойств протеза. Проблема заключается в выборе конструкции протеза и определения его свойств, обеспечивающих долговечность его работы за счет равномерного распределения напряжений по области контакта протеза с костью.

Проблемы усадки цементирующих растворов, проведение криохирургических операций и многие другие могут быть интерпретированы как задачи управления напряжениями: достижение предписанных напряжений в объеме живой ткани или ее заменителей с помощью доступных средств и параметров влияния. Ортопедические формы лечения различных патологий нацелены, в конечном счете, на управление деформациями посредством управления напряжениями [22]. Для этого используются самые разнообразные формы определяющих соотношений, построенных феноменологически или на основе структурных представлений [23, 24].

Биологические напряжения

Указанное многообразие задач приводит к изобилию моделей и способов решения задач вычисления и управления напряжениями. В отличие от этого авторы данной работы выдвигают предположение о единообразной природе и механике напряжений, возникающих в живых тканях в процессе их роста, теплового и механического взаимодействия с окружающими телами. Такой подход позволит, во-первых, избежать излишнего разнообразия понятий для описания однородных явлений в живых тканях, во-вторых, – выработать общую теорию для напряжений, что, в свою очередь, дает возможность вовлечь в анализ большее число факторов, не прибегая к усложнению теории. Авторы предлагают объединить понятия остаточных, тепловых, усадочных и ростовых напряжений в одно понятие биологических напряжений.

В работе приводятся методы моделирования биологических напряжений, основанные на теории термоупругопластического деформирования тела. Результат моделирования напряжений используется для теоретического решения проблемы управления напряжениями в живой ткани. Решение задачи управления напряжениями в построенной модели основывается на функциональном анализе величин и свойств напряжений и деформаций. Как и в работах [20, 24], основная идея управления заключается в создании совместного поля деформаций. Соответствующие утверждения представлены в виде теорем. Такой общий подход позволил объединить в общий алгоритм управление биологическими напряжениями любой природы.

Постановка краевой задачи определения биологических напряжений

Проблемы теоретического исследования различных аспектов биологических напряжений в данной работе основываются на результатах анализа напряжений и деформаций, который проводился учеными разных стран (С. Тимошенко [25], В. Новацкий [26], А. Коваленко [27], Б. Боли и Д. Уэйнер [28], Я. Подстригач [29], Я. Бурак [30], А. Поздеев [31] и др.) в течение ряда лет. В частности, близким к указанным проблемам биомеханики оказался вопрос о температурном нагреве, который не вызывает температурных напряжений. Недавно в работе Т. Мура [32] такая температурная деформация была названа импотентной. Ученые Венского технического университета (Э. Мелан, Х. Паркус, Ф. Циглер, Х. Иршик, Ф. Раммерсторфер и др.) [33-36] внесли существенный вклад в теорию математического моделирования и оптимального управления для температурных напряжений, деформаций и перемещений. Недавно было разработано новое приближение к этим задачам, основанное на методе В. Майзеля [37], см. работы Ф. Циглера и Х. Иршика [38, 39]. Было введено понятие нильпотентного нагрева как нагрева, не вызывающего деформации (в этом случае сумма температурных и силовых деформаций должна быть равна нулю). Все указанные работы основаны на дифференциальной постановке краевой задачи термоупругости и соответствующем классическом решении задачи.

Иной подход к исследованию напряжений, основанный на понятиях функционального анализа в гильбертовых пространствах и обобщенном решении задачи, был разработан учеными г. Перми (А. Поздеев, Ю. Няшин, П. Трусов) [31], который основан. Этот подход был использован для моделирования и управления остаточными напряжениями в задачах термоупругопластичности. Был решен ряд задач управления остаточными напряжениями в технологических процессах обработки металлов давлением (горячая прокатка двутавровых балок, холодное волочение проволоки и др.). Эти результаты собраны и приведены в работе [31]. В данной работе этот подход будет использован для решения задачи об исследовании и управлении биологическими напряжениями и ростовыми деформациями.

Пусть исследуемое тело занимает ограниченную область Ω трехмерного евклидова пространства E^3. Замыкание области обозначим через $\overline{\Omega}$, границу (которая считается достаточно гладкой) – через Γ ($\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$). При постановке краевой задачи термоупругости учтем следующее.

1) Уравнение статического равновесия внутри области

$$\mathrm{Div}\tilde{\sigma} + \vec{Q} = 0, \quad \vec{x} \in \Omega, \tag{1}$$

где $\tilde{\sigma}$ – симметричный тензор напряжений, $\vec{Q}$ – вектор объемной силы, $\vec{Q} \in (C(\Omega))^3$. В формуле (1) и далее величины $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\varepsilon}$, $\vec{u}$ считаются функциями координат, представленными радиусом-вектором $\vec{x} \in \overline{\Omega}$.

2) Деформации будем считать малыми и аддитивными, т.е. тензор малой деформации $\tilde{\varepsilon}$ представляется в виде суммы тензоров упругой $\tilde{\varepsilon}^e$ и ростовой $\tilde{\varepsilon}^g$ деформации

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^e + \tilde{\varepsilon}^g, \quad \vec{x} \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

где под $\tilde{\varepsilon}^g$ следует понимать деформацию роста ткани, вызванного напряжениями или иными факторами. Однако тензор $\tilde{\varepsilon}^g$ может быть заменен на температурную, пластическую деформацию, деформацию ползучести, деформацию от фазовых превращений и деформацию, созданную при перестройке в живой ткани. В работе Т. Мура [32] эти деформации называются собственными деформациями (*eigenstrain*). В дальнейшем в работе мы будем использовать понятие собственных деформаций $\tilde{\varepsilon}^n$, обобщая или суммируя возможные типы деформаций указанной природы.

3) Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\tilde{C}} \cdot \cdot \tilde{\varepsilon}^e, \quad \vec{x} \in \overline{\Omega}, \tag{3}$$

где $\tilde{\tilde{C}}$ – четырехвалентный тензор модулей упругости, $C_{ijkl} \in C^1(\overline{\Omega})$.

4) Соотношения деформация-перемещения записываются в рамках линеаризованной теории

$$\tilde{\varepsilon}(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{u}\vec{\nabla}), \quad \vec{x} \in \overline{\Omega}, \tag{4}$$

где $\vec{u}$ – вектор перемещения, $\vec{u} \in (C^2(\overline{\Omega}))^3$.

Заметим, что компоненты тензора деформации удовлетворяют условиям совместности деформаций, которые эквивалентны обращению в нуль компонент тензора второго ранга $rot(rot\tilde{\varepsilon})$ [40] (при условии существования вторых производных по координатам от компонент деформации):

$$rot(rot\tilde{\varepsilon}) = 0, \quad \vec{x} \in \overline{\Omega}. \tag{5}$$

5) Будем считать, что граница области Γ делится на две взаимно непересекающиеся части $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_\sigma$. На части границы Γ_u заданы кинематические граничные условия, на части Γ_σ задан вектор напряжений $\vec{P} \in (C(\Gamma_\sigma))^3$:

$$\vec{u} = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_u, \tag{6}$$

$$\vec{n} \cdot \tilde{\sigma} = \vec{P}, \quad \vec{x} \in \Gamma_\sigma. \tag{7}$$

6) Будем считать, что ростовые деформации $\tilde{\varepsilon}^g$ могут быть выражены в виде функциональной зависимости

$$\tilde{\varepsilon}^g = \tilde{f}\left(t, \vec{x}, \tilde{\sigma}\right). \tag{8}$$

Температурные деформации $\tilde{\varepsilon}^T \in (C^1(\overline{\Omega}))^6$:

$$\tilde{\varepsilon}^T = \int_{T_0}^{T} \tilde{\alpha}_T(T)\,dT\ , \quad \vec{x} \in \overline{\Omega},$$

где $\tilde{\alpha}_T(T)$ – тензор коэффициентов линейного теплового расширения как функция температуры T; T_0 – температура, при которой тело находится в естественном (ненапряженном и недеформированном) состоянии.

Для упрощения выкладок будем далее пользоваться декартовыми ортогональными координатами. Запятая перед индексом означает производную по координате, соответствующей этому индексу.

Классическое решение задачи

По аналогии с постановкой о решении задачи термоупругопластичности классическим решением задачи определения биологических напряжений назовем двухвалентный симметричный тензор $\tilde{\sigma}$, такой, что выполняются нижеследующие соотношения (9-12), см. формулы (1), (2), (3), (4), (6), (7), причем $\vec{u} \in (C^2(\overline{\Omega}))^3$ и $\vec{u} = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_u$:

$$\sigma_{ij,j} + Q_i = 0, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad i = 1,2,3, \tag{9}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(\frac{u_{l,k} + u_{k,l}}{2} - \varepsilon_{kl}^n\right) = C_{ijkl}u_{k,l} + S_{ij}, \tag{10}$$

$$\sigma_{ij}n_j = P_i, \quad \vec{x} \in \Gamma_\sigma, \quad i = 1,2,3, \tag{11}$$

где введено обозначение

$$S_{ij} = -C_{ijkl}\varepsilon^n_{kl}, \quad i, j = 1,2,3. \tag{12}$$

Компоненты тензора $\tilde{S}$ считаются известными функциями координат, $\tilde{S} \in (C^1(\overline{\Omega}))^6$.

Используя (10), приходим к краевой задаче определения компонент перемещений u_i, $i = 1,2,3$, $u_i \in C^2(\overline{\Omega})$:

$$-\left(C_{ijkl}\, u_{k,l}\right)_{,l} = S_{ij,\,j} + Q_i, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \tag{13}$$

$$C_{ijkl}\, u_{k,l} n_j = -S_{ij} n_j + P_i, \quad \vec{x} \in \Gamma_\sigma, \quad i = 1,2,3, \tag{14}$$

$$u_i = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_u, \quad i = 1, 2, 3. \tag{15}$$

Заметим, что уравнения (13), (14) согласуются в следующем смысле. Запишем уравнение (14) также для поверхности Γ_u. Тогда будем иметь:

$$-\int_\Omega (C_{ijkl}\, u_{k,l})_{,\,j}\, dV = \int_\Omega S_{ij,\,j}\, dV + \int_\Omega Q_i\, dV,$$

$$-\int_\Gamma C_{ijkl}\, u_{k,l}\, n_j\, dS = \int_\Gamma S_{ij} n_j\, dS + \int_\Omega Q_i\, dV, \tag{13?}$$

$$\int_\Gamma C_{ijkl}\, u_{k,l}\, n_j\, dS = -\int_\Gamma S_{ij} n_j\, dS + \int_\Gamma P_i\, dS. \tag{14?}$$

Отсюда получим

$$\int_\Omega Q_i\, dV + \int_\Gamma P_i\, dS = 0, \quad i = 1,2,3, \tag{16}$$

что отражает условия равновесия системы.

Рассмотрим вопрос о единственности классического решения задачи. Пусть $\vec{u}'$, $\vec{u}''$ – два решения задачи (13)-(15). Обозначим $\vec{v} = \vec{u}' - \vec{u}''$. Тогда для $\vec{v}$ выполняются равенства:

$$(C_{ijkl}\, v_{k,l})_{,\,j} = 0, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \tag{17}$$

$$C_{ijkl}\, v_{k,l}\, n_j = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_\sigma, \quad i = 1,2,3, \tag{18}$$

$$v_i = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_u, \quad i = 1,2,3. \tag{19}$$

Обозначим $\rho_{ij}(\vec{v}) = C_{ijkl}\, v_{k,l}$. Тогда из (17) и (18) получим:

$$\rho_{ij,\,j}(\vec{v}) = 0, \quad \vec{x} \in \Omega, \ i = 1,2,3; \quad \rho_{ij}(\vec{v}) n_j = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_\sigma, \quad i = 1,2,3. \tag{20}$$

Далее имеем:

$$0 = -\int_\Omega \rho_{ij,\,j}(\vec{v}) v_i\, dV = \int_\Omega \rho_{ij}(\vec{v}) v_{i,\,j}\, dV - \int_\Gamma \rho_{ij}(\vec{v}) v_i\, n_j\, dS = \int_\Omega C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}(\vec{v}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dV. \tag{21}$$

Отсюда ввиду положительной определенности матрицы C_{ijkl} имеем: $\varepsilon_{ij}(\vec{v}) = 0, \quad i, j = 1,2,3.$

Применяя теорему Коши-Гельмгольца для малых смещений, получим отсюда, что $\vec{v}$ – вектор малого жесткого смещения, то есть $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} \times \vec{x}$, где $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$ – радиус-вектор точки, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – постоянные векторы. Другими словами, два решения задачи (13), (14) могут отличаться лишь на жесткое смещение. Если же условия на границе Γ_u запрещают такое движение, то $\vec{a} = \vec{b} = 0$.

Наоборот, если $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} \times \vec{x}$, то $\varepsilon_{ij}(\vec{v}) = 0$. Значит, если $\vec{u}$ – решение задачи (13)-(15), а $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} \times \vec{x}$, то $\vec{u} + \vec{v}$ – решение уравнений (13), (14), а при невозможности жесткого движения $\vec{a} = \vec{b} = 0$.

Покажем далее единственность решения задачи (9)-(12). Пусть $\tilde{\sigma}'$, $\tilde{\sigma}''$ – два решения этой задачи. Тогда

$$\sigma'_{ij} = \rho_{ij}(\vec{u}') + S_{ij}, \quad \sigma''_{ij} = \rho_{ij}(\vec{u}'') + S_{ij}.$$

Так как $\vec{u}'$, $\vec{u}''$ – решения соответствующей задачи (13)-(15), то $\vec{u}' - \vec{u}''$ есть вектор малого жесткого смещения. Тогда $\sigma'_{ij} - \sigma''_{ij} = \rho_{ij}(\vec{u}' - \vec{u}'') = C_{ijkl}\ \varepsilon_{kl}(\vec{u}' - \vec{u}'') = 0$. Значит, $\sigma'_{ij} = \sigma''_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$.

Рассмотрим далее условия отсутствия биологичеких напряжений.

Пусть изучаемое тело испытывает стимулированный рост (а также, возможно, подвергнуто температурному нагреву) при отсутствии внешних поверхностных и объемных сил ($\vec{Q} = 0, \vec{P} = 0$), но при наличии неподвижных опор ($\Gamma_u \neq 0$).

Теорема 1. Для того чтобы в точках тела не возникали биологические напряжения ($\sigma_{ij}(\vec{x}) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \ \vec{x} \in \overline{\Omega}$), необходимо и достаточно, чтобы тензор собственной деформации $\tilde{\varepsilon}^n$ был совместным и соответствующие ему перемещения обращались в нуль на границе Γ_u.

Доказательство необходимости. Пусть $\sigma_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$ Так как $\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon^n_{kl}) = 0$, то $\varepsilon_{kl} - \varepsilon^n_{kl} = 0$ (учитывая положительную определенность матрицы C_{ijkl}). Отсюда $\varepsilon_{kl} = \varepsilon^n_{kl}$, что и доказывает утверждение о совместности деформации ε^n_{kl}.

Доказательство достаточности. Пусть деформация ε^n_{kl} совместна и соответствующие ей перемещения равны нулю на границе Γ_u. Тогда существует вектор $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, так что $\varepsilon^n_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k,l} + v_{l,k})$. Тогда $\sigma_{ij} = C_{ijkl}(u_{k,l} - v_{k,l})$. Положим, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{z}$, откуда $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\, z_{k,l}$. Так как компоненты тензора σ_{ij} удовлетворяют уравнениям (9)-(11), то получим:

$$(C_{ijkl}\, z_{k,l})_{,j} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \vec{x} \in \Omega, \tag{22}$$

$$C_{ijkl}\, z_{k,l}\, n_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \vec{x} \in \Gamma_\sigma, \tag{23}$$

$$z_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \vec{x} \in \Gamma_u. \tag{24}$$

Получили задачу, аналогичную (17)-(19), откуда следует из (21), что $\vec{z} = \vec{a} + \vec{b} \times \vec{x}$, так что $\vec{u} = \vec{v} + \vec{a} + \vec{b} \times \vec{x}$. Значит, $\tilde{\varepsilon}(\vec{u}) = \tilde{\varepsilon}(\vec{v})$ и $\tilde{\sigma} = \tilde{C} \cdot\cdot\, \tilde{\varepsilon}(\vec{z}) = \tilde{C} \cdot\cdot [\tilde{\varepsilon}(\vec{u}) - \tilde{\varepsilon}(\vec{v})] = 0$.

Обобщенное решение задачи

Назовем обобщенным решением задачи (9)-(12) тензор $\tilde{\sigma}$, который представим в виде

$$\tilde{\sigma} = \tilde{C} \cdot\cdot (\tilde{\varepsilon}(\vec{u}) - \tilde{\varepsilon}^n), \tag{25}$$

где $\vec{u} \in (W_2^1(\Omega))^3, \quad \vec{u} = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_u$, и имеет место соотношение

$$\int\limits_{\Omega} \tilde{\sigma} \cdot\cdot \tilde{\varepsilon}(\vec{w}) dV - \int\limits_{\Gamma_\sigma} \vec{P} \cdot \vec{w} dS - \int\limits_{\Omega} \vec{Q} \cdot \vec{w} dV = 0, \tag{26}$$

$$\forall \vec{w} \in (W_2^1(\Omega))^3, \quad \vec{w} = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_u .$$

Здесь $(W_2^1(\Omega))^3$ есть соболевское функциональное пространство функций с обобщенной производной, причем сами функции и их производные суммируемы в квадрате. Деформации $\tilde{\varepsilon}(\vec{u})$ и $\tilde{\varepsilon}(\vec{w})$ определяются линеаризованными геометрическими соотношениями (4), где производные понимаются в смысле распределений (или, другими словами, как обобщенные производные). Заметим, что значения функций на границе понимаются с помощью оператора следа, $\vec{P} \in (L^2(\Gamma_\sigma))^3, \quad \vec{Q} \in (L^2(\Omega))^3$.

При записи обобщенного решения можно сделать следующее преобразование:

$$\int\limits_{\Omega} \tilde{\sigma} \cdot\cdot \tilde{\varepsilon}(\vec{w}) dV = a(\vec{u}, \vec{w}) - \int\limits_{\Omega} g_i\, w_i\, dV - \int\limits_{\Gamma_\sigma} G_i\, w_i\, dS, \tag{27}$$

где

$$a(\vec{u}, \vec{w}) = \int\limits_{\Omega} C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{w}) dV, \tag{28}$$

$$g_i = S_{ij,j}, \quad \vec{x} \in \Omega, \quad G_i = -S_{ij}\, n_j, \quad \vec{x} \in \Gamma_\sigma, \quad i = 1,2,3. \tag{29}$$

В самом деле:

$$\int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}(\vec{w}) dV = \int\limits_{\Omega} C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{w}) dV + \int\limits_{\Omega} S_{ij}\, \varepsilon_{ij}(\vec{w}) dV =$$

$$a(\vec{u}, \vec{w}) + \int\limits_{\Omega} S_{ij}\, w_{i,j}\, dV = a(\vec{u}, \vec{w}) -$$

$$- \int\limits_{\Omega} S_{ij,j}\, w_i\, dV + \int\limits_{\Gamma_\sigma} S_{ij}\, n_j\, w_i\, dS = a(\vec{u}, \vec{w}) - \int\limits_{\Omega} g_i\, w_i\, dV - \int\limits_{\Gamma_\sigma} G_i\, w_i\, dS. \tag{30}$$

Здесь интегрирование по частям проведено согласно работе [40]. Подставляя (30) в (26), получим

$$a(\vec{u}, \vec{w}) - \int\limits_{\Omega} \vec{g} \cdot \vec{w} dV - \int\limits_{\Gamma_\sigma} \vec{G} \cdot \vec{w} dS - \int\limits_{\Gamma_\sigma} \vec{P} \cdot \vec{w} dS - \int\limits_{\Omega} \vec{Q} \cdot \vec{w} dV = 0. \tag{31}$$

Введем далее обозначения:

$$\vec{g} + \vec{Q} = \vec{g}^*, \quad \vec{G} + \vec{P} = \vec{G}^*, \tag{32}$$

тогда соотношение (26) окончательно примет вид:

$$a(\vec{u},\vec{w})-\int_{\Omega}\vec{g}^{*}\cdot\vec{w}dV-\int_{\Gamma_\sigma}\vec{G}^{*}\cdot\vec{w}dS=0, \tag{33}$$

$$\forall\vec{w}\in(W_2^1(\Omega))^3,\quad \vec{w}=0,\quad \vec{x}\in\Gamma_u.$$

Связь классического и обобщенного решений

Классическое решение является обобщенным. Действительно,

$$\int_{\Omega}\tilde{\sigma}\cdot\cdot\tilde{\varepsilon}(\vec{w})\,dV=\int_{\Omega}\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}(\vec{w})\,dV=\int_{\Omega}\sigma_{ij}\,w_{i,j}\,dV=\int_{\Gamma_\sigma}w_i\,\sigma_{ij}\,n_j\,dS-\int_{\Omega}w_i\,\sigma_{ij,j}\,dV=$$

$$=\int_{\Gamma_\sigma}\vec{P}\cdot\vec{w}\,dS+\int_{\Omega}\vec{Q}\cdot\vec{w}\,dV,$$

$$\forall\vec{w}\in(W_2^1(\Omega))^3,\quad \vec{w}=0,\quad \vec{x}\in\Gamma_u,$$

что совпадает с (26).

Покажем далее, что если обобщенное решение $\tilde{\sigma}$ таково, что $\vec{u}\in(C^2(\Omega))^3$, где $\vec{u}$ – функция из (25), то $\tilde{\sigma}$ является классическим решением задачи (9)-(12). Для этого необходимо доказать выполнение равенств (9) и (11).

Имеем $\forall\vec{w}\in(W_2^1(\Omega))^3$

$$\int_{\Omega}\tilde{\sigma}\cdot\cdot\tilde{\varepsilon}(\vec{w})\,dV=\int_{\Omega}\sigma_{ij}\;w_{i,j}\,dV=\int_{\Gamma_\sigma}\gamma\,w_i\;\sigma_{ij}\,n_j\,dS-\int_{\Omega}w_i\,\sigma_{ij,j}\,dV, \tag{34}$$

где $\gamma\,w_i$ – след функции w_i на поверхности Γ_σ.

Возьмем в качестве $\vec{w}$ в (26) финитную непрерывно дифференцируемую функцию. Тогда с учетом (34) получим

$$\int_{\Omega}(\sigma_{ij,j}+Q_i)\,w_i\,dV=0. \tag{35}$$

Так как множество таких функций $\vec{w}$ плотно в $(L_2(\Omega))^3$, то из этого равенства вытекает, что имеет место (9) (в силу непрерывности производных $\sigma_{ij,j}$ равенство (9) выполняется всюду в Ω). Далее имеем

$$\int_{\Gamma_\sigma}\gamma\,w_i\,(\sigma_{ij}\,n_j-P_i)\,dS=0. \tag{36}$$

Известно [40], что любая функция из $C^1(\Gamma_\sigma)$ является следом некоторой функции $w_i\in C^1(\overline{\Omega})$. Поэтому (так как $C^1(\Gamma_\sigma)$ плотно в $L_2(\Gamma_\sigma)$) из (36) следует граничное условие (11).

Для доказательства существования функции $\vec{u}\in(W_2^1(\Omega))^3$, удовлетворяющей условию (33), применим теорему 3.5 из работы [41, глава III, § 3].

Там рассмотрена задача 3.1 (далее двойная нумерация формул соответствует работе [41]):

$$Au=f,\quad \vec{x}\in\Omega, \tag{3.1}$$

$$u_i=U_i,\quad \vec{x}\in\Gamma_u, \tag{3.2}$$

$$\sigma_{ij}\,n_j=P_i,\quad \vec{x}\in\Gamma_\sigma, \tag{3.3}$$

где $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma, \quad \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \text{O}, \qquad (Au)_i = -(C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}\, (\vec{u}))_{,\, j}\,, \qquad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}\, (\vec{u}).$

Предполагается, что $\vec{f} \in (L^2(\Omega))^3, \quad \vec{F} \in (L^2(\Gamma_\sigma))^3.$

Если $\Gamma_u \neq \text{O}$, то обобщенным решением задачи 3.1 называется такая функция $\vec{u} \in (W_2^1(\Omega))^3$, что имеет место соотношение:

$$a(\vec{u}, \vec{w}) = \int\limits_{\Omega} g_i\, w_i\, dV + \int\limits_{\Gamma_\sigma} G_i\; w_i\, dS, \tag{37}$$

$$\forall \vec{w} \in (W_2^1(\Omega))^3, \;\; \vec{w} = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma_u.$$

В работе [41] доказана теорема 3.5:

Пусть Ω – открытое ограниченное множество с регулярной границей, тогда уравнение (37) имеет единственное решение.

Данная теорема показывает, что для решаемой задачи обобщенное решение существует и единственно.

Решение задачи управления

Пусть теперь тензор $\tilde{\sigma}$ известен, причем выполняются условия (9) и (11). Требуется определить деформации ε_{ij}^n и перемещения так, чтобы выполнялось соотношение (10). Зададим вектор перемещения $\vec{u}$ произвольно и вычислим

$$\varepsilon_{kl}^n = \frac{1}{2}\,(u_{k,l} + u_{l,k}) - C_{ijkl}^{-1}\, \sigma_{ij}\,, \tag{38}$$

что соответствует (10).

Чтобы в задаче о билогических напряжениях однозначно определить вектор перемещения $\vec{u}$, достаточно задать значения $\vec{u}$ в трех точках, не лежащих на одной прямой [42, с. 33-34].

Для дальнейшего изложения нам потребуется ввести некоторые понятия функционального анализа.

Рассмотрим множество H симметричных тензоров второго ранга. Пусть компоненты тензоров являются вещественными функциями пространственных координат и принадлежат функциональному пространству L^2, тогда совокупность компонент тензора $\tilde{A}$ принадлежит пространству $(L^2)^6$: $\tilde{A} \in (L^2)^6$. Это означает, что $\forall \tilde{A}$ интеграл Лебега $\int\limits_{\Omega} \sum\limits_{i,\, j=1}^{3} (A_{ij})^2\, dV$ существует и конечен.

Введем в H скалярное произведение

$$(\tilde{A}, \tilde{B}) = \int\limits_{\Omega} A_{ij}\, C_{ijkl}^{-1}\; B_{kl}\; dV, \tag{39}$$

где C_{ijkl}^{-1}, как и ранее, – коэффициенты матрицы податливости.

Докажем, что выражение (39) удовлетворяет аксиомам скалярного произведения: симметричности, линейности и положительности.

1) Симметричность:

$$(\tilde{B}, \tilde{A}) = \int\limits_{\Omega} B_{ij}\; C_{ijkl}^{-1}\; A_{kl}\; dV = \int\limits_{\Omega} B_{kl}\; C_{klij}^{-1}\; A_{ij}\; dV = \int\limits_{\Omega} A_{ij}\; C_{ijkl}^{-1}\; B_{kl}\; dV = (\tilde{A}, \tilde{B}).$$

2) Линейность:

$$(\lambda_1 \tilde{A}_1 + \lambda_2 \tilde{A}_2, \tilde{B}) = \int_\Omega (\lambda_1 A_{1ij} + \lambda_2 A_{2ij}) C^{-1}_{ijkl} B_{kl}\, dV =$$
$$= \lambda_1 \int_\Omega A_{1ij} C^{-1}_{ijkl} B_{kl}\, dV + \lambda_2 \int_\Omega A_{2ij} C^{-1}_{ijkl} B_{kl}\, dV =$$
$$= \lambda_1 (\tilde{A}_1, \tilde{B}) + \lambda_2 (\tilde{A}_2, \tilde{B}).$$

3) Положительность:
$(\tilde{A}, \tilde{A}) = \int_\Omega A_{ij} C^{-1}_{ijkl} A_{kl}\, dV \ge 0$ и $(\tilde{A}, \tilde{A}) = 0$ только при $A_{ij} = 0$ почти всюду. Это сразу вытекает из положительной определенности матрицы податливости C^{-1}_{ijkl}.

Далее можно ввести норму в H, порожденную скалярным произведением:

$$\| \tilde{A} \| = \sqrt{(A_{ij}, A_{ij})}. \tag{40}$$

Непосредственное вычисление показывает, что нормы в H и $(L^2)^6$ эквивалентны, а так как пространство $(L^2)^6$ полное, то отсюда следует, что рассматриваемое функциональное пространство H также полное, а потому пространство H гильбертово.

Выделим подпространство H_u согласно нижеследующему определению.

Определение. Симметричный тензор $\tilde{f} \in H$ принадлежит подпространству H_u, если выполняется условие: $\exists \vec{u}(\vec{r}) \in (W_2^1(\Omega))^3$: $\vec{u}(\vec{r}) = 0,\ \vec{r} \in \Gamma_u$, так что имеет место

$$\tilde{f}(\vec{r}) = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{u}\vec{\nabla}), \tag{41}$$

где производные понимаются в обобщенном смысле, а значение вектора $\vec{u}$ на границе Γ_u понимается в смысле оператора следа.

Физический смысл подпространства H_u состоит в том, что сюда входят совместные тензоры деформации, причем перемещения, соответствующие этим деформациям, обращаются в нуль на неподвижных опорах. Легко убедится, что подпространство H_u является линейным, так как операции сложения элементов и умножения на скаляр не выводят за его пределы.

Введение подпространства H_u позволяет заменить условия совместности деформаций условием попадания элемента пространства H в подпространство H_u, а также ввести далее меры несовместности тензора деформации (заметим, что тензор полной деформации всегда совместен, в то время как его составляющие могут быть несовместны). Кроме того, важно иметь в виду, что классические уравнения совместности деформаций Сен-Венана требуют существования вторых производных по координатам от компонент тензора деформации. В нашем рассмотрении это условие не накладывается.

Теорема о необходимых и достаточных условиях получения заданного поля биологических напряжений

***Теорема* 2.** Пусть $\tilde{\sigma}^*(\vec{x})$ – симметричный тензор второго ранга, который удовлетворяет соотношению (26) при заданных силах $\vec{P}$ и $\vec{Q}$. Введем тензор $\tilde{f}$ согласно соотношению

$$\tilde{f} = \tilde{\varepsilon}^n + \tilde{\tilde{C}}^{-1} \cdot\cdot \tilde{\sigma}^* . \quad (42)$$

Если $\tilde{f} \in H_u$, то это является необходимым и достаточным условием того, что напряжения $\tilde{\sigma}(\vec{x}) = \tilde{\sigma}^*(\vec{x})$ имеют место в данной области $\overline{\Omega} \in E^3$.

Доказательство необходимости. Пусть $\tilde{\sigma}(\vec{x}) = \tilde{\sigma}^*(\vec{x})$, $\vec{x} \in \overline{\Omega}$. Учитывая положительную определенность тензора $\tilde{\tilde{C}}$, получим из (25) соотношение

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\vec{u} + \vec{u}\,\vec{\nabla}) = \tilde{\varepsilon}^n + \tilde{\tilde{C}}^{-1} \cdot\cdot \tilde{\sigma}^* = \tilde{f} , \quad (43)$$

поэтому тензор деформации $\tilde{\varepsilon}$ равен $\tilde{f}$ и имеет место соотношение $\tilde{f} \in H_u$.

Доказательство достаточности. Пусть $\tilde{f} = \tilde{\varepsilon}^n + \tilde{\tilde{C}}^{-1} \cdot\cdot \tilde{\sigma}^* \in H_u$, где $\tilde{\sigma}^*$ удовлетворяет (26). Тогда, учитывая единственность решения задачи (25-26), получим, что $\tilde{\sigma}(\vec{x}) = \tilde{\sigma}^*(\vec{x})$ почти всюду.

Следствия из теоремы 2

В работе будут сформулированы и доказаны утверждения о биологических напряжениях. При этом следует сказать, что несмотря на явно указанную природу температурных деформаций (причина – температура) аналогия между ростовыми и температурными деформациями позволяет говорить о справедливости результатов и для ростовых процессов.

Первое следствие касается условия для собственных деформаций, не вызывающих биологических напряжений. Этот вопрос обсуждался многими авторами в применении к температурным деформациям. Необходимые условия отсутствия биологических напряжений получаются просто. Достаточные условия обычно рассматриваются или для свободного твердого тела, или для некоторых частных случаев (например, случай плоского температурного поля). Наше рассмотрение позволяет сразу получить общие условия для неоднородного анизотропного тела, имеющего произвольные условия закрепления.

<u>*Следствие* 1.</u> Условие $\tilde{\varepsilon}^n \in H_u$ является необходимым и достаточным для равенства нулю биологических напряжений: $\tilde{\sigma}^*(\tilde{r}) = 0, \vec{r} \in \overline{\Omega}$.

Доказательство. Следствие непосредственно вытекает из теоремы 2. Полагая, что $\tilde{\sigma}^* = 0$, получим из (42) $\tilde{f} = \tilde{\varepsilon}^n$. Таким образом, условие $\tilde{f} = \tilde{\varepsilon}^n \in H_u$ является необходимым и достаточным условием для равенства нулю биологических напряжений почти всюду в области $\overline{\Omega}$.

<u>*Следствие* 2.</u> Пусть компоненты тензора температурных деформаций имеют вторые производные относительно декартовых координат, т.е. $\tilde{\varepsilon}^T \in (C^2(\overline{\Omega}))^6$. Тогда единственное распределение температуры

$$T(x, y, z, t) = a_1(t)\,x + a_2(t)\,y + a_3(t)\,z + a_4(t) \quad (44)$$

не вызывает температурных напряжений (биологических напряжений) в однородном изотропном теле, не имеющем опор. Для несвободного твердого тела это условие является лишь необходимым.

Доказательство. Пусть температурные напряжения во всех точках тела равны нулю, $\tilde{\sigma}^*(\tilde{r}) = 0$, $\vec{r} \in \overline{\Omega}$. Тогда температурные деформации должны удовлетворять условию $\tilde{\varepsilon}^T \in H_u$. При условии существования вторых производных от компонент тензора деформации по координатам, $\tilde{\varepsilon}^T \in (C^2(\overline{\Omega}))^6$, получим условия совместности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^T}{\partial y^2} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}^T}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}^T}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}^T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}^T}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}^T}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}^T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^T}{\partial z^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}^T}{\partial z \partial x},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^T}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}^T}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}^T}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}^T}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}^T}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{zx}^T}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}^T}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}^T}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{zz}^T}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}^T}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}^T}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}^T}{\partial y}\right). \tag{45}$$

Для изотропного тела компоненты тензора деформации имеют вид:

$$\varepsilon_{xx}^T = \varepsilon_{yy}^T = \varepsilon_{zz}^T = \alpha T, \quad \varepsilon_{xy}^T = \varepsilon_{yz}^T = \varepsilon_{zx}^T = 0, \tag{46}$$

где α – секущий коэффициент линейного температурного расширения. Подстановка (46) в (45) приводит к выражениям:

$$\frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2(\alpha T)}{\partial x \partial y} = 0. \tag{47}$$

Уравнения (47) имеют единственное решение:

$$\alpha T(x,y,z,t) = b_1(t)x + b_2(t)y + b_3(t)z + b_4(t), \tag{48}$$

где $b_1(t), b_2(t), b_3(t), b_4(t)$ – произвольные функции времени.

Для однородного тела будем считать, что $\alpha = const$, тогда получим:

$$T(x,y,z,t) = a_1(t)x + a_2(t)y + a_3(t)z + a_4(t), \tag{49}$$

где $a_i(t) = b_i(t)/\alpha, \quad i = 1, 2, 3, 4.$

Запишем далее уравнение теплопроводности для однородного тела:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T + \frac{W}{c\rho}, \tag{50}$$

где a – коэффициент температуропроводности, c – удельная теплоемкость, ρ – плотность, W – удельный тепловой источник. Подстановка (49) в (50) дает:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{W}{c\rho}. \tag{51}$$

Далее возможны два случая.

1) Тепловой источник отсутствует, $W = 0$. Тогда из (51) получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0. \tag{52}$$

Это означает, что коэффициенты $a_1(t), a_2(t), a_3(t), a_4(t)$ являются константами, поэтому температурное поле стационарно.

2) Тепловой источник является линейной функцией координат. Тогда коэффициенты $a_1(t), a_2(t), a_3(t), a_4(t)$ являются некоторыми функциями времени. В общем случае вид этих функций произволен.

Следствие 3. Уравнения совместности собственных деформаций являются необходимыми и достаточными условиями для равенства нулю биологических напряжений в статически определимой системе. Для статически неопределимой системы они являются лишь необходимыми условиями.

Доказательство. Согласно следствию 1 биологические напряжения равны нулю, если собственные деформации совместны и соответствующие им перемещения равны нулю на всех опорах или, другими словами, в точках поверхности Γ_u. Перемещения, определяемые полем деформации, находятся не единственно, но отличаются на перемещение твердого тела как жесткого целого. Следовательно, поле перемещений содержит константы, определяемые перемещением твердого тела как целого. Число этих констант равно числу степеней свободы тела (3 – при плоском движении, 6 – при пространственном движении) и равно числу нулевых перемещений в опорах в статически определимой системе. Таким образом, в статически определимой системе все константы могут быть определены из условия обращения в нуль перемещений в опорах. Для статически неопределимой системы некоторые перемещения могут быть отличными от нуля.

Например, пусть мы имеем плоскую двухшарнирную статически неопределимую балку (рис. 1).

Рис. 1.

Здесь имеется четыре перемещения в опорах $(u_{Ax}, u_{Ay}, u_{Bx}, u_{By})$ – в опорах A и B и только три константы, определяющие поле перемещений системы как жесткого целого. Следовательно, возможно найти константы интегрирования поля деформаций, при которых три перемещения в опорах будут равны нулю, а четвертое перемещение уже определяется заданным полем деформаций. Например, при однородном нагреве такой балки собственные деформации удовлетворяют уравнениям совместности деформаций, но, очевидно, возникнут биологические напряжения из-за того, что не все перемещения в опорах равны нулю.

Следующее следствие также может быть использовано при анализе и управлении биологическими напряжениями и собственными деформациями.

Следствие 4. Добавление деформации, удовлетворяющей условию $\tilde{\varepsilon}_{add} \in H_u$, не изменяет биологических напряжений, созданных в теле: $\tilde{\sigma}(\vec{x}) = \tilde{\sigma}^*(\vec{x}),\ \vec{x} \in \overline{\Omega}$.

Доказательство. Пусть добавочная деформация $\tilde{\varepsilon}_{add}$ добавляется к тензору $\tilde{f} \in H_u$. Ввиду линейности пространства H_u имеет место равенство $\tilde{\varepsilon}_{add} + \tilde{f} \in H_u$. Следовательно, напряжение $\tilde{\sigma}(\vec{x})$ равно $\tilde{\sigma}^*(\vec{x})$ почти всюду.

Вновь укажем, что под $\tilde{\varepsilon}^n$ и $\tilde{\varepsilon}_{add}$ можно понимать любые неупругие деформации.

Теорема 2 и ее следствия могут быть использованы для постановки и решения задач управления напряжениями и деформациями в растущем теле.

Теорема 3. Тензор деформации $\tilde{\varepsilon}(\vec{x})$ принадлежит подпространству H_u тогда и только тогда, когда существуют объемные силы $\vec{Q} \in (L^2(\Omega))^3, \vec{x} \in \Omega$ и поверхностные силы $\vec{P} \in (L^2(\Gamma_\sigma))^3, \vec{x} \in \Gamma_\sigma$, которые производят в упругом теле деформации $\tilde{\varepsilon}(\vec{r}), \vec{x} \in \overline{\Omega}$.

Доказательство достаточности. Пусть существуют некоторые силы $\vec{Q} \in (L^2(\Omega))^3, \vec{x} \in \Omega$ и $\vec{P} \in (L^2(\Gamma_\sigma))^3, \vec{x} \in \Gamma_\sigma$. Тогда деформации $\tilde{\varepsilon}$, им соответствующие, определяются из решения задачи (25), (26), которая имеет единственное решение. Таким путем будут найдены совместные деформации при условии $\vec{u} = 0, \vec{r} \in \Gamma_u$. В итоге получим, что $\tilde{\varepsilon} \in H_u$.

Доказательство необходимости. Учтем следующую теорему [43, том IV, с. 319]:

Теорема: Функция $v \in L^p(\Omega), 1 \le p \le \infty$ есть обобщенная производная для функции $u \in L^p(\Omega), v = D^\alpha u$, если существует последовательность бесконечно дифференцируемых функций u_n и v_n, $v_n = D^\alpha u$, так что имеют место соотношения

$$\| u_n - u \|_{L^p} \to 0,$$
$$\| v_n - v \|_{L^p} \to 0$$

для любой внутренней точки подобласти Ω' ($\overline{\Omega'} \subset \Omega$).

С учетом этого строим приближения к заданному полю деформаций и соответствующих им перемещений:

$$\left(\varepsilon_{ij}\right)_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial (u_i)_n}{\partial x_j} + \frac{\partial (u_j)_n}{\partial x_i}\right).$$

Отсюда находим напряжения, а также объемные и поверхностные силы, создающие такие напряжения в линейно упругом теле,

$$\left(\sigma_{ij}\right)_n = C_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl}\right)_n, \ \left(Q_i\right)_n = -\left(\sigma_{ij,j}\right)_n, \left(P_i\right)_n = \left(\sigma_{ij}\right)_n n_j$$

(здесь запятая перед индексом соответствует обычной производной).

Переходим к пределу при $n \to \infty$

$$\| (u_i)_n - u_i \|_{L^2} \to 0,$$
$$\left\| \frac{\partial (u_i)_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2} \to 0, \ i, j = 1, 2, 3,$$

где $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ означает обобщенную производную. Тогда $\left(\sigma_{ij}\right)_n \to \sigma_{ij}$, $\left(P_i\right)_n \to P_i$.

Далее запишем обобщенное решение для n-го приближения.

$$\int\limits_\Omega \tilde{\sigma}_n \cdot\cdot\, \tilde{\varepsilon}(\vec{w})\, dV - \int\limits_{\Gamma_\sigma} \vec{P}_n \cdot \vec{w}\, dS - \int\limits_\Omega \vec{Q}_n \cdot \vec{w}\, dV = 0, \tag{53}$$

где $\vec{w} \in (W_1^2(\Omega))^3$, $\vec{u} = 0, \vec{x} \in \Gamma_u$. Перейдем в соотношении (53) к пределу при $n \to \infty$ (здесь для ясности стоит знак суммирования, который ранее опускался)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\sum_{i,j}\left(\sigma_{ij}\right)_n \varepsilon_{ij}(\vec{w})\,dV =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j}(\left(\sigma_{ij}\right)_n, \varepsilon_{ij}(\vec{w}))_{L^2} = \sum_{i,j}(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}(\vec{w}))_{L^2} = \int_{\Omega}\tilde{\sigma}\cdot\cdot\tilde{\varepsilon}(\vec{w})\,dV\,. \qquad (54)$$

Здесь использована непрерывность скалярного произведения.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_\sigma}\vec{P}_n\cdot\vec{w}\,dS = \lim_{n\to\infty}\sum_i(\left(P_i\right)_n, w_i)_{L^2(\Gamma_\sigma)} =$$

$$=\sum_i(\lim_{n\to\infty}\left(P_i\right)_n, w_i)_{L^2(\Gamma_\sigma)} = (\vec{P},\vec{w})_{L^2(\Gamma_\sigma)} = \int_{\Gamma_\sigma}\vec{P}\cdot\vec{w}\,dS\,. \qquad (55)$$

Здесь учтено, что согласно работе [41], отображение $w \Rightarrow \gamma w$ (след) есть линейное непрерывное отображение, $W_2^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$, причем пространство следов гильбертово. Поэтому при $w \to w_0$ имеем, что $\gamma w \to \gamma\, w_0$.

Наконец, рассмотрим интеграл

$$J = \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\vec{Q}_n\cdot\vec{w}\,dV\,.$$

Или: $J = \lim\limits_{n\to\infty}(\vec{Q}_n,\vec{w})_{(L^2)^3} = \int\limits_{\Omega}\tilde{\sigma}\cdot\cdot\tilde{\varepsilon}(\vec{w})\,dV - \int\limits_{\Gamma_\sigma}\vec{P}\cdot\vec{w}\,dS\,.$

Если $\vec{w}\to 0$ по норме $(W_2^1)^3$, то это же будет верно в норме $(L^2)^3$ и $(\vec{Q}_n,\vec{w})_{(L^2)^3}\to 0$. Значит, J является линейным и непрерывным функционалом относительно $\vec{w}$.

Применим далее теорему Хана-Банаха [44]:

Теорема. Пусть в вещественном нормированном пространстве X задан линейный ограниченный функционал J с областью определения $D(J)\subset X$. Тогда существует всюду определенный в X линейный ограниченный функционал $\bar{J}$, так что $\|\bar{J}\| = \|J\|$ и $<a,\bar{J}>=<a,J>$ для любых $a\in D(J)$.

В нашем случае функционал J задан на $(W_2^1)^3\subset(L^2)^3$. Согласно теореме Хана-Банаха можно распространить функционал на $(L^2)^3$.

Далее к функционалу $\bar{J}$, заданному на $(L^2(\Omega))^3$, применим теорему Рисса, см. [44], об общем виде линейных функционалов в гильбертовом пространстве.

Теорема. Пусть H – гильбертово пространство (комплексное или вещественное). Для любого линейного ограниченного функционала J, заданного всюду на H, существует единственный элемент $b\in H$ такой, что для всех $a\in H$ имеет место равенство:

$$\langle a,J\rangle = (a,b).$$

При этом $\|J\|=\|b\|$.

Применив теорему Рисса, получим, что

$$J(\vec{w}) = (\vec{w},\vec{Q})_{(L^2)^3} = \int_{\Omega}\vec{Q}\cdot\vec{w}\,dV.$$

В итоге получим:

$$\int_{\Omega} \tilde{\sigma} \cdot\cdot \tilde{\varepsilon}(\vec{w}) dV - \int_{\Gamma_\sigma} \vec{P} \cdot \vec{w} dS - \int_{\Omega} \vec{Q} \cdot \vec{w} dV = 0 .$$

Таким образом, доказано существование сил $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, вызывающих заданные деформации $\tilde{\varepsilon} \in H_u$.

Результаты

Авторы данной работы выдвигают тезис о единообразности математического описания температурных, остаточных и ростовых напряжений, имеющих место при различных процессах в живой ткани. Обоснованием такого предположения служит формализация в виде общей математической модели. Модель предполагает существование упругих деформаций, а также и неупругих: ростовых, температурных, деформаций усадки. Предлагаются две постановки задачи: в перемещениях и в напряжениях. Последняя предполагает более низкий порядок производных, что делает доступным ее численный анализ.

В работе проведен теоретический анализ постановки задачи определения напряженно-деформированного состояния, позволивший выделить ряд основных свойств решения поставленной задачи, в частности, единственность классического и обобщенного решений.

К основным результатам данной работы следует отнести формулировки и доказательства теорем. В первой теореме определяются необходимые и достаточные условия создания в теле заранее заданных биологических напряжений. Причем результат не требует решения самой задачи об определении напряжений в теле.

Второй важный результат позволил связать неупругие (ростовые) деформации, не создающие напряжений в теле, и силы. Оказалось, что в самой общей постановке и в дифференциальной в частности такие напряжения равны некоторым силовым деформациям, созданным распределением объемных и поверхностных сил. Такой результат относится к фундаментальным, поскольку использование силовой аналогии позволяет говорить о совместности деформации в задачах, где нет достаточного уровня производных для проверки условий совместности.

Данная работа, по мнению авторов, является опорной, содержит теоретическую базу для решения ряда новых и актуальных задач биомеханики, связанных с вычислением и управлением напряжениями и деформациями в живой ткани.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS-ESA (грант № 99-10-00815) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант «Урал» № 02-01-96416).

Авторы благодарны профессору Францу Циглеру (Венский технический университет) за полезные обсуждения.

Литература

1. *Takamizawa K., Matsuda T.* Kinematics for Bodies Undergoing Residual Stress and its Applications to the Left Ventricle // Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics. 1990. V. 57. № 3. P. 321-329.
2. *Chaudhry H.R., Bukiet B., Findley T., Ritter A.B.* Evaluation of Residual Stress in Rabbit Skin and the Relevant Material Constants // Journal of Theoretical Biology.198. V. 192. P. 191-195.
3. *Taber L.A.* Biomechanics of Growth, Remodeling, and Morphogenesis // Applied Mechanics Reviews. 1995. V. 48. № 8. P. 487-545.
4. *Taber L.A., Eggers D.W.* Theoretical Study of Stress-Modulated Growth in the Aorta // Journal of Theoretical Biology. 1996. V. 180. P. 343-357.

5. *Chaudhry H.R., Bukiet B., Davis A., Ritter A.B., Findley T.* Residual Stresses in Oscillating Thoracic Arteries Reduce Circumferential Stresses and Stress Gradients // Journal of Biomechanics. 1997. V. 30. № 1. P. 57-62.
6. *Chuong C.J., Fung Y.C.* On residual stresses in arteries // Journal of Biomechanical Engineering. 1986. V. 108. P. 189-192.
7. *Delfino A., Stergiopulos N., Moore J.E., Meister J.J.* Residual Strain Effects on the Stress Field in a Thick Wall Finite Element Model of the Human Carotid Bifurcation // Journal of Biomechanics. 1997. V. 30. № 8. P. 777-786.
8. *Gonzales-Carrasco J.L., Escudero M.L., Chao J., Garcia-Alonso M.C.* Thermal Oxidation Tretments in the Development of New Coated Biomaterials: Application to the MA 956 Superalloy // Materials and Manufacturing Processes. 1998. V. 13. № 3. P. 431-443.
9. *Rachev A.* Theoretical Study of the Effect of Stress-Dependent Remodeling on Arterial Geometry Under Hypertensive Conditions // Journal of Biomechanics. 1997. V. 30. № 8. P. 819-827.
10. *Rodriguez E.K., Hoger A., McCulloch A.D.* Stress-Dependent Finite Growth in Soft Elastic Tissues // Journal of Biomechanics. 1994. V. 27. № 4. P. 455-467.
11. *Tanaka M., Adachi T.* Preliminary Study on Mechanical Bone Remodeling Permitting Residual Stress // JSME International Journal. 1994. V. 37. № 1. P. 87-95.
12. *Greenwald S.E., Moore J.E., Rachev A., Kane T.P.C., Meister J.J.* Experimental Investigation of the Distribution of Residual Strains in the Artery Wall // Transactions of the ASME. Journal of Biomechanical Engineering. 1997. V. 119. P. 438-444.
13. *Hoger A.* Virtual Configurations and Constitutive Equations for Residually Stressed Bodies with Material Symmetry // Journal of Elasticity. 1997. V. 48. P. 125-144.
14. *Hoger A.* Residual Stress in an Elastic Body: a Theory for Small Strains and Arbitrary Rotations // Journal of Elasticity. 1993. V. 31. P. 1-24.
15. *Asaoka K., Kuwayama N., Tesk J.A.* Influence of Tempering Method on Residual Stress in Dental Porcelain // Journal of Dental Research. 1992. V. 71. № 9. P. 1623-1627.
16. *Stańczyk M., Telega J.J.* Thermal Problems in Biomechanics: From Soft Tissues to Orthopaedics // Russian Journal of Biomechanics. 2001. V. 5. № 4. P. 30-75.
17. *Ahmed A.M., Park W., Burke D.L., Miller J.A.* Transient and Residual Stresses and Displacements in Self-Curing Bone Cement - Part I: Characterization of Relevant Volumetric Behavior of Bone Cement // Transactions of the ASME. Journal of Biomechanical Engineering. 1982. V. 104. № 2. P. 21-37.
18. *Kiryukhin V.Y., Nyashin Y.I., Ziegler F.* Prescribed thermal stress in anisotropic and inhomogeneous elastic structures: a novel approach. Proc. 4th Int. Congress on Thermal Stresses. (Y. Tanigawa, R.B. Hetnarski and N. Noda, eds.). Osaka. P. 2001. P. 577-580.
19. *Штейн А.А.* Приложение методов механики сплошной среды к моделированию роста биологических тканей // Современные проблемы биомеханики. 2000. Т. 10. С. 148-173.
20. *Skalak R., Zargaryan S., Jain R.K., Netti P.A., Hoger A.* Compatibility and the Genesis of Residual Stress by Volumetric Growth // Journal of Mathematical Biology. 1996. V. 34. P. 889-914.
21. *Akulich Y.V., Denisov A.S., Nyashin Y.I., Podgaets R.M., Scryabin V.L., Sotin A.V., Akulich A.Y.* Studies on the Biomechanics of Proximal Femur // Russian Journal of Biomechanics. 2001. V. 5. № 2. P. 39-48.
22. *Masich A.G., Nyashin Y.I.* Mathematical Modelling of Orthopedic Reconstruction of Children's Congenital Maxillary Anomaly // Russian Journal of Biomechanics. 1999. V. 2. № 1. P. 101-109.
23. *Регирер С.А., Штейн А.А., Логвенков С.А.* Свойства и функции костных клеток: биомеханические аспекты // Современные проблемы биомеханики. 2000. V. 10. P. 174-224.
24. *Skalak R., Farrow D.A., Hoger A.* Kinematics of Surface Growth // Journal of Mathematical Biology. 1997. V. 35. P. 869-907.
25. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука. 1979.
26. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир. 1975.
27. *Коваленко А.Д.* Термоупругость. Киев: Вища школа. 1975.
28. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория термоупругих напряжений. М.: Мир, 1964.
29. *Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин. Киев: Наукова Думка. 1979.
30. *Бурак Я.И., Гачкевич А.Р.* Об одной форме уравнений термоупругости в напряжениях // Математические методы и физико-механические поля. 1977. Т. 2. Р. 73-75. 1977.
31. *Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В.* Остаточные напряжения, теория и приложения. М.: Наука. 1972.
32. *Mura T.* Micromechanics of Defects in Solids. 2nd ed. Dordrecht: Kluwer Academic Publ. 1991.
33. *Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызванные стационарными температурными полями. М.: Физматгиз. 1958.
34. *Parkus H.* Thermoelasticity. Vienna, New York: Springer Verlag. 1976.

35. *Irschik H., Ziegler F.* Eigenstrain without stress and static shape control of structures // AIAA Journal. 2001. V. 39. P. 1985-1999.
36. *Irshik H.* A review on static and dynamic shape control of structures by piezoelectric actuation // Engineering Structures. 2002. V. 24. № 3. P. 5-11.
37. *Майзель В.М.* Температурная задача теории упругости. Киев: Издательство АН УССР, 1951.
38. *Ziegler F., Irschik H.* Thermal Stress Analysis Based on Maysel's Formula, in Thermal Stress II, edited by Hetnarski R.B. Amsterdam: Elsevier. 1987.
39. *Irschik H., Pichler U.* Dynamic shape control of solids and structures by thermal expansion strains. // Journal of Thermal Stresses. 2001. V. 24. P. 565-576.
40. *Михайлов В.Л.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
41. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
42. *Литвинов В.Г.* Движение нелинейно-вязкой жидкости. М.: Наука, 1982.
43. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М.: Наука, 1974.
44. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. Москва, Наука, 1980.

BIOLOGICAL STRESSES IN LIVING TISSUES. THE MODELLING AND CONTROL PROBLEMS

Y.I. Nyashin, V.Y. Kiryukhin (Perm, Russia)

The authors of the present paper set up a hypothesis for uniform mathematical approach of thermal, residual and growth stresses that take place in many different processes in the living tissues. The ground of the hypothesis is the common mathematical formalization. The model includes the elastic and inelastic (growth, thermal, shrinkage) strains. Two variants of formalization are proposed: the problem of the displacement and the problem of the stress. The theoretical analysis of the problems of the stress and strain state is developed. The specific properties of the solution are distinguished.

The main results of the work are the formalization and proof of the fundamental theorems. In the first one the necessary and sufficient conditions of the prescribed stress obtaining are expressed. It is important that the result does not require the solution of the problem of stress and strain state determining.

The second theorem allows to relate the impotent nonelastic (growth) strain to the possible volume force and the surface traction. It turned out, that in the most common formalization, in the differential formalization particularly, such strains are equivalent to the elastic strain, produced by calculated forces. This result allows to express the compatibility condition if there is no necessary order of derivatives.

Key words: residual and thermal stresses, growth and thermal strains, biological stress, modelling, control.

Получено 1 сентября 2002 года