

П.В. Максимов

Пермский государственный технический университет

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К ПОСТРОЕНИЮ МОДЕЛЕЙ ВЫНУЖДЕННОГО ДВИЖЕНИЯ МИКРОАКСЕЛЕРОМЕТРА *

Рассмотрен кремниевый микромеханический маятниковый акселерометр. На основе уравнения Лагранжа 2-го рода получены уравнения движения чувствительного элемента, имеющего смещение центра тяжести по трем осям, под действием линейных и угловых ускорений. Приведен закон движения маятника ММА с учетом влияния электростатических сил, действующих на чувствительный элемент акселерометра в процессе его движения. Представлена связанная электромеханическая математическая модель датчика, рассмотренного в виде трехмерного деформируемого твердого тела.

Ключевые слова: микромеханика, MEMS (микроэлектромеханическая система), микроакселерометр, вынужденное движение, связанные задачи, теория упругости, электростатика.

Рассматривается кремниевый емкостной маятниковый микромеханический акселерометр (ММА) [1], предназначенный для определения проекции вектора линейного ускорения на ось чувствительности прибора, либо соответствующей компоненты вектора углового ускорения. Схема акселерометра приведена на рис. 1.

Внутренняя пластина датчика крепится к основанию прибора по границе Γ_1 . Во время работы датчика на внешнюю пластину ММА (маятник), являющуюся чувствительным элементом, действует ускорение вдоль оси Oz , направленной перпендикулярно плоскости датчика. Под действием ускорения маятник отклоняется от положения первоначального равновесия, поворачиваясь на упругих перемычках относительно оси Ox , показанной на рис. 1, чему способствует искусственно смещенный вдоль оси Oy центр тяжести маятника. Возможно также измерение углового ускорения по оси Ox . Акселерометр работает в режиме прямого преобразования. В датчике применяется емкостной способ измерения. На маятнике расположены токопроводящие области, являющиеся подвижными обкладками конденсаторов переменной емкости. На основании прибора находятся противоположно расположенные

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №09-08-99121-р_офи).

неподвижные обкладки. По изменению емкости указанных конденсаторов судят о степени отклонения чувствительного элемента и, как следствие, о величине действующего ускорения.

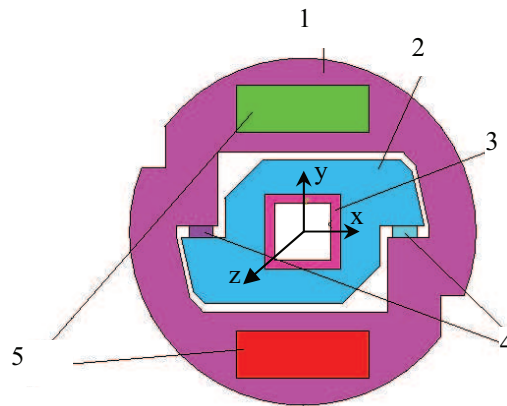


Рис. 1. Схема микромеханического акселерометра: 1 – чувствительный элемент ММА (внешняя пластинка); 2 – внутренняя пластинка; 3 – область жёсткого закрепления (граница Γ_1); 4 – упругие перемычки; 5 – электропроводящие области (обкладки конденсатора, границы Γ_2 и Γ_3).

В работе рассмотрены некоторые подходы к исследованию вынужденного движения описанной динамической системы. Первый подход основан на аналитическом выводе уравнений движения. Второму подходу свойственна некоторая общность, объект исследования рассматривается как трехмерное деформируемое твердое тело, записываются соответствующие соотношения МДТТ, решение полученной системы дифференциальных уравнений ищется с применением численных методов.

1. ММА как совокупность абсолютно твердых тел

Анализ возможных перемещений внешней пластинки ММА показывает, что в системе могут наблюдаться три типа движения: поворот маятника относительно оси Ox , показанной на рис. 1, поворот маятника относительно оси Oy и перемещение чувствительного элемента вдоль оси Oz , при котором маятник остается всегда параллельным плоскости Oxy . Поворот маятника вокруг оси Oz и перемещения его вдоль осей Ox и Oy в работе не рассматриваются в силу большой жесткости конструкции по данным направлениям, обеспеченной геометрией датчика, в частности формой и размерами упругих перемычек, соединяющих маятник и внутреннюю пластину.

Будем считать, что внутренняя и внешняя пластины ММА являются абсолютно жесткими недеформируемыми телами, соединенными упругими связями с известными параметрами. Представим сложное поступательно-вращательное движение чувствительного элемента акселерометра как поступательное движение маятника и его вращение вокруг центра тяжести.

Для получения уравнений движения воспользуемся уравнением Лагранжа 2-го рода. Рассмотрим несколько систем координат. Зададим систему координат $Oxyz$ с началом в точке геометрического центра ММА, связанную с внутренней пластиной акселерометра (основанием прибора). Направление осей системы координат $Oxyz$ показано на рис. 1. Свяжем с недеформируемым маятником систему координат $O_1x_1y_1z_1$. Начало координат O_1 расположим в геометрическом центре маятника. В начальный момент направления осей $Oxyz$ и $O_1x_1y_1z_1$. Допустим, что центр масс маятника не совпадает с его геометрическим центром O_1 . Положение центра масс маятника в системе координат $O_1x_1y_1z_1$ определяется радиус-вектором

$$\vec{r}_c = \{x_c, y_c, z_c\}^T,$$

где x_c, y_c, z_c – смещения центра масс маятника вдоль соответствующих осей.

Определим положение центра масс маятника в системе координат $Oxyz$ с учетом сложного поступательно-вращательного движения чувствительного элемента ММА. Введем систему координат $O_2x_2y_2z_2$, полученную путем поворота системы $O_1x_1y_1z_1$ на угол α относительно оси O_1x_1 . Подобный переход может быть описан при помощи матрицы поворота **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Система координат $O_3x_3y_3z_3$ получена из $O_2x_2y_2z_2$ в процессе поворота последней на угол β относительно оси O_2y_2 , что описывается матрицей поворота **B**:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы можем получить связь между координатами точек в системах координат $Oxyz$ и $O_1x_1y_1z_1$. Дополнительно учтем, что чувствительный элемент ММА может совершать плоскопараллельные движения вдоль оси Oz , что описывается вектором переноса \vec{U}_c :

$$\vec{U}_c = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{Bmatrix}.$$

Пусть

$$\vec{R}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}^T$$

– это радиус-вектор, описывающий положение центра масс маятника в системе координат $Oxyz$, связанной с основанием датчика. Данный радиус-вектор можно представить в виде

$$\vec{R}_0 = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} = \vec{U}_c + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{r}_c = \begin{Bmatrix} x_c \cos \beta + y_c \sin \alpha \sin \beta + z_c \cos \alpha \sin \beta \\ y_c \cos \alpha - z_c \sin \alpha \\ z - x_c \sin \beta + y_c \sin \alpha \cos \beta + z_c \cos \alpha \cos \beta \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

Запишем уравнение Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

при этом в качестве обобщенных координат выберем введенные ранее степени свободы по углам поворота и перемещение вдоль оси Oz :

$$q_1 = \alpha, \quad q_2 = \beta, \quad q_3 = z.$$

Запишем кинетическую энергию системы T , подразумевая, что маятник совершает вращательное движение относительно двух осей, а координаты его центра тяжести задаются соотношениями (1):

$$T = \frac{1}{2} (J_{x_0} \dot{\alpha}^2 + J_{y_0} \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} m (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2),$$

где m – масса маятника ММА;

J_{x_0}, J_{y_0} – момент инерции маятника относительно соответствующих осей;

$\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ – компоненты вектора скорости центра тяжести в системе координат $Oxyz$, задаваемые в виде

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -x_c \dot{\beta} \sin \beta + y_c \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \beta + y_c \dot{\beta} \sin \alpha \cos \beta + z_c \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta - z_c \dot{\alpha} \sin \alpha \sin \beta \\ -y_c \dot{\alpha} \sin \alpha - z_c \dot{\alpha} \cos \alpha \\ \dot{z} - x_c \dot{\beta} \cos \beta + y_c \dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta - y_c \dot{\beta} \sin \alpha \sin \beta - z_c \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \beta - z_c \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Определение частных производных от кинетической энергии T по обобщенным координатам и их производным и последующая подстановка полученных соотношений в уравнение (2) позволяет получить уравнения вынужденного движения маятника акселерометра в виде

$$\begin{cases} (J_x + my_c^2 + mz_c^2) \ddot{\alpha} + my_c (\ddot{z} - x_c \ddot{\beta}) = Q_\alpha, \\ (J_y + mx_c^2 + mz_c^2) \ddot{\beta} - mx_c (\ddot{z} + y_c \ddot{\alpha}) = Q_\beta, \\ m\ddot{z} + my_c \ddot{\alpha} - mx_c \ddot{\beta} = Q_z, \end{cases} \quad (4)$$

где Q_α , Q_β , Q_z – обобщенные силы.

Заметим, что в уравнениях (4) в силу малости перемещений z и углов поворота α и β оставлены только слагаемые не выше первого порядка малости. При этом функции синуса заменены на эквивалентные бесконечно малые:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &\approx \alpha, \quad \sin \beta \approx \beta, \\ \cos \alpha &\approx 1, \quad \cos \beta \approx 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Подробнее рассмотрим обобщенные силы, представленные в системе (4), для чего определим силовые факторы, действующие на чувствительный элемент ММА в процессе работы датчика.

Возникающие в местах крепления маятника к упругим перемычкам реакции, вызванные упругим деформированием подвесов, могут быть определены путем дифференцирования функции Π , описывающей потенциальную энергию системы:

$$\Pi = \frac{1}{2} (G_\alpha \alpha^2 + G_\beta \beta^2 + G_z z^2),$$

где G_α , G_β , G_z – жесткости соединяющих маятник и основание перемычек, указанные для соответствующих степеней свободы. Заметим, что коэффициенты G_α и G_z характеризуют изгибные жесткости подвесов, в то время как при повороте на угол β происходит сложный изгиб подвесов с кручением. Конкретная связь введенных коэффициентов жесткости с геометрическими размерами подвесов и их физико-механическими

свойствами в данной работе не приводится, однако она всегда может быть определена путем решения задачи об изгибе балки методами сопротивления материалов [2] или какими-то иными способами.

Также введем функцию потерь, посредством которой опишем диссипативные характеристики динамической системы:

$$\Phi = \frac{1}{2} (v_\alpha \dot{\alpha}^2 + v_\beta \dot{\beta}^2 + v_z \dot{z}^2),$$

где v_α, v_β, v_z – коэффициенты вязкого трения для соответствующих степеней свободы системы.

При таком подходе обобщенные силы могут быть записаны как

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\alpha}} + M_\alpha, \\ Q_\beta &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \beta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\beta}} + M_\beta, \\ Q_z &= -\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}} + F_z, \end{aligned} \quad (6)$$

где M_α – момент внешних сил, действующих на чувствительный элемент ММА относительно оси Ox в системе координат $Oxyz$;

M_β – момент внешних сил, действующих на чувствительный элемент ММА относительно оси Oy в системе координат $Oxyz$;

F_z – компонента вектора внешних сил, действующая на чувствительный элемент ММА вдоль оси Oz в системе координат $Oxyz$;

Рассмотрим подробнее причины, вызывающие возникновение внешних силовых факторов, действующих на систему.

Система координат $Oxyz$, для которой приведена описывающая вынужденное движение чувствительного элемента система дифференциальных уравнений (4), не является инерциальной, так как она связана с внутренней пластиной датчика (основанием, корпусом) и поэтому может перемещаться в инерциальной системе координат произвольным образом совместно с телом, на которое установлен ММА. В связи с этим к силовым факторам необходимо добавить инерционные слагаемые, обусловленные переносным движением неинерциальной системы отчета.

Сила \mathbf{F}_a , действующая в инерциальной системе координат на материальную точку массой m , может быть представлена в виде

$$\vec{F}_a = m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_{\text{кор}}),$$

где \mathbf{a}_r – вектор относительного ускорения в неинерциальной системе координат;

\mathbf{a}_e – вектор переносного ускорения неинерциальной системы координат;

$\mathbf{a}_{\text{кор}}$ – ускорение Кориолиса.

Объект, ускорения которого измеряются при помощи ММА, может двигаться как поступательно с ускорением

$$\vec{a}_0 = \{a_x, a_y, a_z\},$$

так и совершать вращательное движение, описываемое вектором угловой скорости

$$\vec{\omega}_e = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$$

и вектором углового ускорения

$$\vec{\varepsilon}_e = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\}.$$

При подобном сложном движении тела и прикрепленного к нему акселерометра силовые факторы, действующие на маятник в системе координат $Oxyz$, можно представить в виде

$$m\vec{a}_r = \vec{F}_a - m\vec{a}_e - m\vec{a}_{\text{кор}} = \vec{F}_a - m(\vec{a}_0 + \vec{\varepsilon}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}) + 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r),$$

где \mathbf{V}_r – относительные скорости точек ММА в $Oxyz$, соотношения для которых могут быть получены тем же путем, что и при выводе соотношений (3).

Для получения векторов результирующих сил и момента, компоненты которых используются в соотношениях (6), требуется интегрирование введенных силовых факторов по объему ММА. Заметим, что переносные силы инерции, действующие в системе отчета $Oxyz$, зависят от движения изучаемого объекта, а также от способа установки на него ММА. С целью упрощения последующих математических выражений будем считать, что нам уже известны вызванные переносным движением неинерциальной системы отсчета результирующий вектор сил

$$\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$$

и результирующий вектор момента внешних сил

$$\vec{\mathbf{M}} = \{M_x, M_y, M_z\},$$

действующие на чувствительный элемент ММА. Заметим, что компоненты введенных векторов могут являться некоторыми функциями от времени.

Результирующий вектор \mathbf{F} приложен к смещенному относительно начала координат центру тяжести маятника (1), что приводит к возникновению дополнительного момента

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{M}}_0 &= \begin{Bmatrix} M_{0x} \\ M_{0y} \\ M_{0z} \end{Bmatrix} = \vec{\mathbf{R}}_0 \times \vec{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} y_0 F_z - z_0 F_y \\ z_0 F_x - x_0 F_z \\ x_0 F_y - y_0 F_x \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} (y_c - z_c \alpha) F_z - (z - x_c \beta + y_c \alpha + z_c) F_y \\ (z - x_c \beta + y_c \alpha + z_c) F_x - (x_c + z_c \beta) F_z \\ (x_c + z_c \beta) F_y - (y_c - z_c \alpha) F_x \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Отметим, что при записи компонентов вектора момента \mathbf{M}_0 не рассматривались бесконечно малые слагаемые выше первого порядка и использовались соотношения (5).

Таким образом, силовые факторы, присутствующие в соотношениях (6), можно записать как

$$M_\alpha = M_{0x} + M_x = (y_c - z_c \alpha) F_z - (z - x_c \beta + y_c \alpha + z_c) F_y + M_x,$$

$$M_\beta = M_{0y} + M_y = (z - x_c \beta + y_c \alpha + z_c) F_x - (x_c + z_c \beta) F_z + M_y.$$

Тогда система дифференциальных уравнений (4) может быть представлена в виде

$$\left\{ \begin{aligned} (J_x + my_c^2 + mz_c^2) \ddot{\alpha} + my_c (\ddot{z} - x_c \ddot{\beta}) &= \\ = -G_\alpha \alpha - v_\alpha \dot{\alpha} + (y_c - z_c \alpha) F_z - (z - x_c \beta + y_c \alpha + z_c) F_y + M_x, \\ (J_y + mx_c^2 + mz_c^2) \ddot{\beta} - mx_c (\ddot{z} + y_c \ddot{\alpha}) &= \\ = -G_\beta \beta - v_\beta \dot{\beta} + (z - x_c \beta + y_c \alpha + z_c) F_x - (x_c + z_c \beta) F_z + M_y, \\ m \ddot{z} + my_c \ddot{\alpha} - mx_c \ddot{\beta} &= -G_z z - v_z \dot{z} + F_z \end{aligned} \right.$$

или после рекомбинации слагаемых в виде неоднородной системы дифференциальных уравнений (7), описывающей вынужденное движение чувствительного элемента микроакселерометра в системе координат, связанной с основанием датчика,

$$\left\{ \begin{array}{l} (J_x + my_c^2 + mz_c^2)\ddot{\alpha} + v_\alpha \dot{\alpha} + (G_\alpha + z_c F_z + y_c F_y)\alpha + \\ + my_c (\ddot{z} - x_c \ddot{\beta}) - x_c F_y \beta + F_y z = y_c F_z - z_c F_y + M_x, \\ (J_y + mx_c^2 + mz_c^2)\ddot{\beta} + v_\beta \dot{\beta} + (G_\beta + x_c F_x + z_c F_z)\beta - \\ - mx_c (\ddot{z} + y_c \ddot{\alpha}) - y_c F_x \alpha - F_x z = z_c F_x - x_c F_z + M_y, \\ m\ddot{z} + v_z \dot{z} + G_z z + my_c \ddot{\alpha} - mx_c \ddot{\beta} = F_z. \end{array} \right. \quad (7)$$

2. Влияние электростатических сил на движение ММА

В рассматриваемом ММА присутствует система противоположно заряженных обкладок, между которыми возникают силы электростатического взаимодействия, вклад которых в конечные перемещения чувствительного элемента акселерометра может быть существенным [3]. Получим уравнение движения маятника ММА с учетом влияния сил кулоновского взаимодействия. Для этого введем некоторые упрощения. Будем считать, что в системе наблюдается только лишь поворот маятника относительно оси Ox на угол α , а поворот относительно Oy на угол β и плоскопараллельное движение чувствительного элемента вдоль оси Oz отсутствуют. Рассмотрим идеальный маятник, у которого центр тяжести смещен только лишь вдоль оси Oy на величину y_c . Пусть датчик измеряет линейное ускорение a_z , направленное вдоль оси Oz . В таком случае, от неоднородной системы уравнений (7) останется только лишь видоизмененное первое уравнение:

$$(J_x + my_c^2)\ddot{\alpha} + v_\alpha \dot{\alpha} + G_\alpha \alpha = my_c a_z + M_q, \quad (8)$$

где M_q – момент, вызванный присутствием электростатических сил между противоположно заряженными пластинами. Для оценки момента определим силы, возникающие между пластинами. В случае плоского конденсатора с параллельно расположенными пластинами сила F_q , возникающая между обкладками, может быть представлена в виде

$$F_q = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2d^2}, \quad (9)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость окружающей среды, ε_0 – электрическая постоянная, S – площадь пластин, d – расстояние между пластинами, U – разность потенциалов между обкладками. В нашем случае маятник совершает не плоскопараллельное движение, а вращательное. Тем не менее в ряде работ [2] соотношение (9) применяется и для описания взаимодействия пластин, расположенных под углом относительно друг друга, в таких случаях под расстоянием между пластинами понимается расстояние между центрами обкладок. То есть силы, возникающие между обкладками, можно представить в виде

$$F_{\pm q} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2(\Delta \pm L \sin \alpha)^2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2}{2(\Delta \pm L\alpha)^2},$$

где Δ – первоначальный зазор между пластинами, L – расстояние от начала координат до центров электропроводящих областей, размещенных на чувствительном элементе ММА (см. рис. 1), α – угол поворота маятника относительно оси Ox . Знак «+» в приведенных соотношениях используется при определении электростатической силы между отдалившимися друг от друга в результате поворота маятника обкладками, а знак «-» для описания взаимодействия между сближившимися пластинами.

Электростатический момент, вызванный силами Кулона, может быть определен с учетом упрощений (5) как

$$\begin{aligned} M &= (F_{-q} + F_{+q})L = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2 L}{2} \left(\frac{1}{(\Delta - L\alpha)^2} - \frac{1}{(\Delta + L\alpha)^2} \right) = \\ &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2 L}{2} \left(\frac{\Delta^2 + 2\Delta L\alpha + L^2\alpha^2 - \Delta^2 + 2\Delta L\alpha - L^2\alpha^2}{(\Delta - L\alpha)^2(\Delta + L\alpha)^2} \right) = \\ &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SU^2 L}{2} \left(\frac{4\Delta L\alpha}{\Delta^4} \right) = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 SU^2 L^2}{\Delta^3} \alpha. \end{aligned}$$

В таком случае уравнение (8) можно представить в виде

$$\left(J_x + my_c^2 \right) \ddot{\alpha} + v_\alpha \dot{\alpha} + \left(G_\alpha - \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 SU^2 L^2}{\Delta^3} \right) \alpha = my_c a_z. \quad (10)$$

Неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка (10) описывает вынужденное движение чувствительного элемента микроакселерометра под действием переносной силы инерции и электростатического момента, вызванного кулоновскими силами, возникающими между противоположно заряженными токопроводящими областями, расположенными на самом маятнике и на неподвижном основании датчика.

3. ММА как деформируемое твердое тело

Рассматриваемый в п. 1 подход, при котором ММА представляется в виде системы недеформируемых твердых тел, соединенных упругими связями, удобен для проведения аналитического анализа вынужденного движения конструкции. Тем не менее полученные определяющие соотношения (7) требуют применения численных методов решения систем дифференциальных уравнений. Недостатки рассмотренного подхода видятся в следующем. В большинстве случаев при описании деформирования упругих перемычек, соединяющих отдельные конструктивные элементы систем, последние рассматриваются в виде балок, работающих на изгиб или кручение. Жесткость (податливость) балок определяется зачастую при помощи методик теории сопротивления материалов, притом что из-за их размеров перемычки логичнее рассматривать как трехмерные тела. Кроме того, производство микромеханических систем основывается на определенных технологических операциях, вносящих в геометрию конструкции особенности и накладывающие на нее некоторые ограничения.

При производстве рассматриваемого в работе микромеханического акселерометра применяются операции травления, при этом травление идет вдоль определенных направлений, обусловленных плоскостями анизотропии кристаллов кремния. При производстве датчика получаются не идеальные прямоугольные балки, а некоторые переходные структуры, показанные на рис. 2.

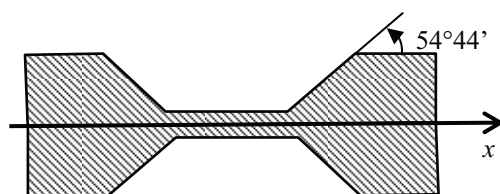


Рис. 2. Профиль упругой перемычки

Если представлять упругие подвесы в виде балок, работающих на изгиб и кручение, то следует рассматривать их как балки переменного сечения, что практически не делается в работах, посвященных этой тематике. Зачастую авторы ограничиваются указаниями, что приведенные соотношения носят оценочный характер и требуют уточнения в случае рассмотрения реальной конструкции.

Помимо описанных недостатков в моделировании особенностей деформирования элементов датчиков представляется весьма упрощенной и неточной приведенная в п. 2 методика учета электростатических взаимодействий.

Применим иной подход к решению задачи о вынужденном движении чувствительного элемента акселерометра. Рассмотрим микроакселерометр как трехмерное деформируемое твердое тело.

Математическая постановка задачи состоит из двух частей, связанных через граничные условия. В первой части проводится описание упругого деформирования внутренней пластины, упругих подвесов и маятника, занимающих в пространстве область V . Во второй части постановки описываются электростатические взаимодействия в области V_0 , соответствующей зазору между подвижной обкладкой на чувствительном элементе и подложкой на основании датчика. Положение любой точки из областей V и V_0 задается в показанной на рис. 1 декартовой системе координат радиус-вектором $\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$.

Задача решается в рамках теории малых деформаций. Маятник ММА и упругие подвесы рассматриваются как трехмерные тела, и для описания их упругого деформирования с учетом влияния температурного поля и внешних силовых факторов используются общие уравнения линейной теории упругости

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0, \quad \vec{r} \in V, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ρ – плотность материала, F_i – проекция вектора внешних объемных сил на ось Ox_i , являющихся в системе координат $Ox_{i,j}$ переносными силами инерции.

Геометрические соотношения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \vec{r} \in V, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где ε_{ij} – компоненты тензора деформация, u_i – компоненты вектора перемещений.

Физические соотношения

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{mm} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \vec{r} \in V, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; λ, μ – постоянные Ламе, связанные с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν следующими выражениями:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Пусть $\vec{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ – вектор перемещений. Тогда граничные условия в области крепления внутренней пластины к основанию датчика (граница Γ_1 на рис. 1) запишутся в виде

$$u_i(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in \Gamma_1, \quad i = 1, 2, 3.$$

На границах Γ_2 и Γ_3 (см. рис. 1), связанных с токопроводящими площадками на маятнике ММА, действует распределенная поверхностная нагрузка $f(\vec{r})$, вызванная влиянием сил электростатического взаимодействия,

$$\sigma_3 = f(\vec{r}), \quad \vec{r} \in (\Gamma_2 \cup \Gamma_3),$$

$$\tau_{13} = \tau_{23} = 0, \quad \vec{r} \in (\Gamma_2 \cup \Gamma_3).$$

Прочие боковые поверхности упругой перемычки и чувствительного элемента, кроме границ Γ_1, Γ_2 и Γ_3 , являются свободными:

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = 0, \quad \vec{r} \in (\Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3)), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Математическая постановка электростатической задачи, описывающая взаимодействия электрических зарядов на границах чувствительного элемента датчика и подложки, записывается в следующем виде:

теорема Гаусса

$$\operatorname{div} \vec{D} = q, \quad \vec{r} \in V_0,$$

где \vec{D} – вектор электрического смещения, а q – плотность электрического заряда.

Связь между вектором электрического смещения \vec{D} и вектором напряженности электрического поля \vec{E} имеет вид

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{r} \in V_0,$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды.

Вектор напряженности \mathbf{E} выражается через потенциал электростатического поля φ как

$$\vec{\mathbf{E}} = -\text{grad } \varphi, \quad \vec{\mathbf{r}} \in V_0.$$

Между подвижными обкладками конденсатора (границы Γ_2 и Γ_3) и противоположными обкладками на основании прибора (границы Γ_4 и Γ_5) создается разность потенциалов. В этом случае граничные условия для электростатической задачи записываются как

$$\varphi|_{\Gamma_2, \Gamma_3} = \varphi_0, \quad \varphi|_{\Gamma_4, \Gamma_5} = -\varphi_0,$$

где $-\varphi_0$ – разность потенциалов между обкладками.

Требуется совместное решение задачи теории упругости и электростатической задачи. На токопроводящих поверхностях маятника ММА возникает распределенная электростатическая сила, действующая всегда по нормали к поверхности:

$$f(\vec{\mathbf{r}}) = q\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{n}}, \quad \vec{\mathbf{r}} \in (\Gamma'_2 \cup \Gamma'_3),$$

где $\vec{\mathbf{n}}$ – внешний единичный вектор-нормаль к поверхности подвижной обкладки, Γ'_2, Γ'_3 – границы, связанные с поверхностью чувствительного элемента в деформированном состоянии, совпадающие с границами Γ_2 и Γ_3 в недеформированном состоянии.

Исследование квазистатических перемещений и вынужденного движения ММА возможно путем численного решения представленных связанных электростатических уравнений и соотношений механики деформируемого твердого тела, полученных в рамках предположения о деформируемости всех элементов микроакселерометра. В качестве способа численного решения поставленной связанной задачи возможно применение метода конечных элементов.

В работе решена задача о свободных колебаниях ММА без учета влияния сил электростатического взаимодействия. На рис. 3–5 показаны первые три собственных формы колебаний и указаны соответствующие им собственные частоты.

Последующие собственные формы связаны с деформированием маятника и внутренней пластины, соответствующие им собственные частоты, по крайней мере, на порядок больше частот, приведенных на рисунках. На рис. 3–5 ярко видны те возможные переме-

щения чувствительного элемента ММА, которые выбирались в качестве степеней свободы при выводе неоднородной системы дифференциальных уравнений (7).

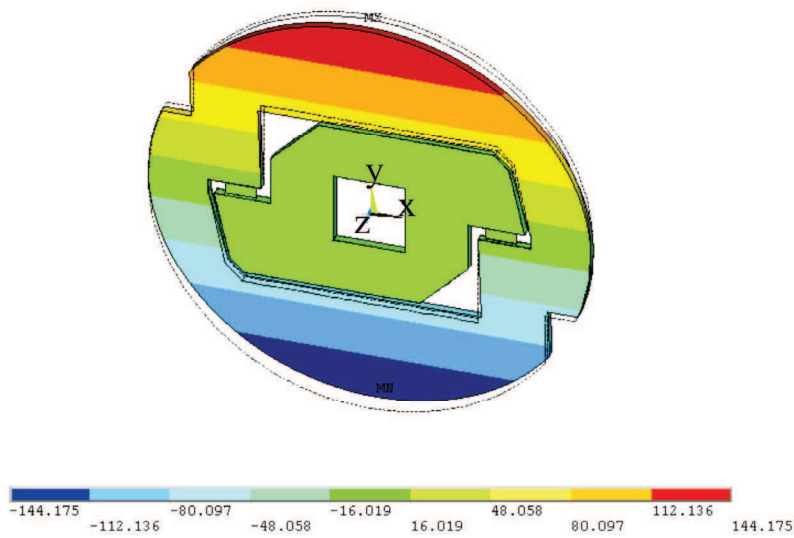


Рис. 3. Первая собственная форма колебаний ММА.
 $p_1=13,7$ Гц

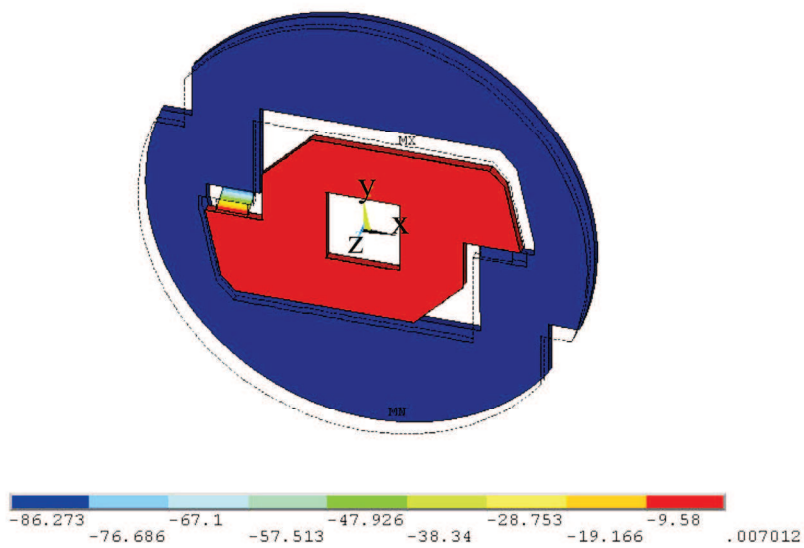


Рис. 4. Вторая собственная форма колебаний ММА.
 $p_1=425,9$ Гц

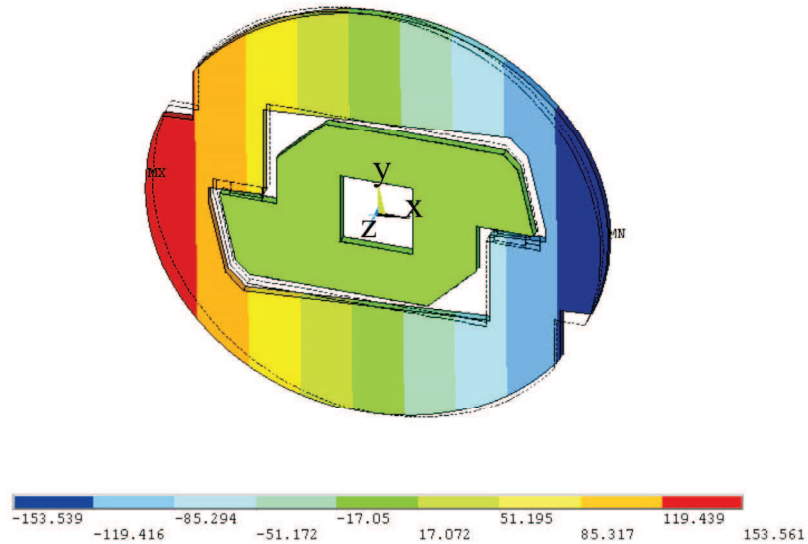


Рис. 5. Третья собственная форма колебаний MMA.
 $p_1 = 453,5$ Гц

С целью упрощения расчетов возможен следующий алгоритм решения динамической задачи о деформировании MMA методом конечных элементов. Рассматривается задача о свободных колебаниях, из решения которой определяются собственные формы колебаний деформируемого MMA:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{0\},$$

где $[\mathbf{M}]$ – матрица масс системы, $[\mathbf{K}]$ – матрица жесткости, $\{\mathbf{u}\}$ – вектор перемещений, представляемый в виде

$$\{\mathbf{u}\}_i = \{\boldsymbol{\varphi}\}_i \cos \omega_i t, \quad i = \overline{1, N},$$

где N – количество узловых неизвестных; ω_i – i -я собственная круговая частота колебаний, определяемая из характеристического уравнения

$$\det([\mathbf{K}] - \omega_i^2 [\mathbf{M}]) = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

а $\{\boldsymbol{\varphi}\}_i$ – i -я собственная форма колебаний.

После определения собственных пар решение задачи о вынужденном движении предлагается искать в виде разложения по собственным формам колебаний. Подобный прием предоставит возможность сократить время счета по сравнению с прямым методом решения уравнений движения и в то же время позволит качественно описать осо-

бенности деформирования упругих перемычек с учетом их сложной пространственной формы, особенностей физико-механических свойств материала и т.д.

Выводы

В работе рассматриваются два подхода к построению математических моделей квазистатических перемещений и вынужденного движения чувствительного элемента микромеханического кремниевого маятникового акселерометра. В первом случае маятник ММА считается абсолютно жестким, недеформируемым. В работе при помощи уравнения Лагранжа 2-го рода получена неоднородная система дифференциальных уравнений, описывающая движение чувствительного элемента, имеющего смещенный центр тяжести и подверженного влиянию разнообразного числа силовых факторов. Для упрощенной модели вынужденного движения маятника получено определяющее соотношение, позволяющее исследовать влияние сил электростатического взаимодействия, возникающих между противоположно заряженными токопроводящими областями на самом чувствительном элементе и основании датчика, на движение маятника ММА. В работе отражены недостатки подобного классического подхода и предложена математическая постановка связанных задач механики деформируемого твердого тела и электростатики, численное решение которых предлагается искать при помощи метода конечных элементов.

Библиографический список

1. Пат. 2028000 Российская Федерация. Компенсационный акселерометр / В.И. Баженов, И.В. Вдовенко, В.А. Рязанов, В.М. Соловьев // БИ. 1995. № 3.
2. Распопов В.Я. Микромеханические приборы: учеб. пособие. – М.: Машиностроение, 2007. – 400 с.
3. Максимов П.В., Труфанов Н.А. Численный анализ влияния электростатических и температурных воздействий на деформационные характеристики слоистого чувствительного элемента микроакселерометра // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т. 15, № 4.

Получено 21.03.2011