УДК 531/534:53

Е.П. Клигман, М.А. Юрлов, Н.А. Юрлова

Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ СВОЙСТВ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ ЭЛЕКТРОВЯЗКОУПРУГИХ СИСТЕМ С АКТИВНЫМИ ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ*

На основе полученной математической модели электроупругого тела предложен алгоритм выбора передаточной функции в цепи отрицательной обратной связи для обеспечения условий стабильности формы системы.

Разработана процедура построения вектора корректирующих воздействий в случае неполного управления (управление системой корректирующими воздействиями, количество которых меньшего общего числа степеней свободы системы).

Для иллюстрации предложенного подхода рассмотрена параболическая оболочка со встроенными актуаторами на базе пьезоэлементов.

Функцию управляющего воздействия на форму поверхности деформированной оболочки выполняет электрический потенциал, прикладываемый к электродам пьезоэлементов.

Ключевые слова: электровязкоупругость, спектральные задачи, обратные связи, теория оболочек, smart-материалы, численные методы, колебания, пьезоэлектрики.

Введение

Развитие современных технологий в различных отраслях техники часто требует проектирования и создания адаптивных упругих систем. Это, например, космические антенны, радиотелескопы, интерферометры и космические станции, имеющие высокоточное оптическое и навигационное оборудование, несущие плоскости и лопасти винтов летательных аппаратов и многое другое. К таким конструкциям предъявляются требования сохранения заданной формы с высокой точностью и отсутствия колебаний в определенных частях, например в местах расположения оптических приборов при любых статических и динамических возмущениях. Использование для создания адаптивных систем smart-материалов позволяет обеспечить заданную форму упругих конструкций и гашение их нестационарных колебаний.

* Работа выполнялась при поддержке программы Президиума РАН №23 (09-П-1-1010) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракт № 02.740.11.0442).

Основной особенностью smart-материалов является их способность целенаправленно изменять свои свойства в зависимости от внешних условий. Как правило, в состав smart-композитов входят датчики, фиксирующие изменение параметров окружающей среды или термомеханическое состояние конструкции (сенсоры), и активные элементы (актуаторы), которые в нужном направлении изменяют механические свойства конструкции. Такой тип smart-материалов подразумевает наличие обратной связи и системы управления актуаторами, т.е. является активным.

В настоящее время для изготовления актуаторов могут быть использованы любые материалы, обладающие способностью изменять свое термомеханическое состояние при немеханическом (электрическом, магнитном или температурном) воздействии: сплавы с памятью формы, пьезоэлектрические материалы, магнито- и электрострикционные материалы, магнитные и электрореологические жидкости.

В том числе в качестве приводов в адаптивных упругих системах могут быть использованы актуаторы, выполненные из пьезоэлектрических материалов (пьезоэлементы), которые определенным образом встраиваются в конструкцию. Принудительные деформации пьезоэлементов или соответствующие им электрические сигналы, регулирующиеся внешним электрическим потенциалом, могут рассматриваться в качестве управляющих воздействий.

Выбор передаточной функции в цепи обратной связи для обеспечения стабильности формы и динамической устойчивости конструкции требует построения адекватной математической модели статического и динамического поведения системы.

1. Математическая модель системы с обратными связями

Вариационное уравнение движения тела, состоящего из упругого и пьезоэлектрических элементов, может быть получено на основе соотношений линейной теории упругости и квазистатических уравнений Максвелла [1–2].

В случае изотермического процесса вариационное уравнение может быть записано следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\int_{V_1}\left(\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}+\rho\ddot{u}_i\delta u_i\right)dV+\int_{V_2}\left(\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}-D_i\delta E_i+\rho\ddot{u}_i\delta u_i\right)dV-\\
&-\int_{\Omega_\sigma}\delta u_i P_i d\Omega-\int_{\Omega_p} q_e\delta\varphi d\Omega=0,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где D, E – векторы электрической индукции и напряженности электрического поля; P – вектор нагрузок; Ω_p – поверхность, ограничивающая пьезоэлектрический элемент; q_e и φ – поверхностная плотность зарядов и электрический потенциал.

Компоненты тензора деформаций удовлетворяют соотношениям Коши $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)$. Электрическое поле считается потенциальным, т.е. выполняется условие $\varphi_i=-E_i$. Для изотермических процессов в линейных электроупругих средах справедливы следующие физические соотношения:

$$
\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \text{ – для упругих и вязкоупругих частей,} \qquad (2)
$$

$$
\left.\begin{aligned}\sigma_{ij}&=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}-\beta_{ijk}E_k\\ D_k&=\beta_{ijk}\varepsilon_{ij}+e_{ki}E_i\end{aligned}\right\} \text{ – для пьезоэлектрических частей,} \qquad (3)
$$

где C_{ijkl} – тензор упругих констант, β_{ijk} и e_{ki} – тензоры пьезоэлектрических и диэлектрических коэффициентов.

Для вязкоупругих материалов демпфирующие свойства можно определить, основываясь на учете временного фактора в рамках теории сплошной среды наследственного вида. В этом случае, согласно принципу Вольтерра, тензор упругих констант C_{ijkl} в зависимости (2) должен быть заменен соответствующим вязкоупругим оператором [3].

Для обеспечения стабильности формы конструкции при внешних статических воздействиях необходимо иметь решение статической задачи. Вариационное уравнение статики можно получить из уравнения (1), исключив из него инерционные слагаемые:

$$
\int_{V_1}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV+\int_{V_2}\left(\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}-D_i\delta E_i\right)dV-\int_{\Omega_\sigma}\delta u_i P_i d\Omega-\int_{\Omega_p} q_e\delta\varphi d\Omega=0. \qquad (4)
$$

2. Конечно-элементный аналог вариационных уравнений статики и динамики электроупругих систем

Сформулированные задачи могут быть решены с помощью метода конечных элементов. Для этого запишем вариационные уравнения (1) и (4) в матричной форме:

$$\begin{gathered}\int\limits_{V_1}\left(\delta\{\varepsilon_1\}^T[D_1]\{\varepsilon_1\}+\delta\{\ddot{u}_1\}^T[\rho_1]\{u_1\}\right)dV-\int\limits_{\Omega_\sigma}\delta\{u_1\}^T\{t_1\}\,d\Omega+\\+\int\limits_{V_2}\left(\delta\{\varepsilon_2\}^T[D_2]\{\varepsilon_2\}+\delta\{\ddot{u}_2\}^T[\rho_2]\{u_2\}\right)dV-\int\limits_{\Omega_p}\delta\{u_2\}^T\{t_2\}\,d\Omega=0.\end{gathered}\tag{5}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{V_1}\delta\{\varepsilon_1\}^T[D_1]\{\varepsilon_1\}\,dV-\int\limits_{\Omega_\sigma}\delta\{u_1\}^T\{t_1\}\,d\Omega+\\+\int\limits_{V_2}\delta\{\varepsilon_2\}^T[D_2]\{\varepsilon_2\}\,dV-\int\limits_{\Omega_p}\delta\{u_2\}^T\{t_2\}\,d\Omega=0.\end{gathered}\tag{6}$$

Обобщенные векторы перемещений, деформаций, напряжений и матрица плотности записываются следующим образом:

$$\{u_1\}=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix},\ \{\varepsilon_1\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\\varepsilon_{22}\\\varepsilon_{33}\\2\varepsilon_{23}\\2\varepsilon_{13}\\2\varepsilon_{12}\end{Bmatrix},\ \ \{\sigma_1\}=\begin{Bmatrix}\sigma^{11}\\\sigma^{22}\\\sigma^{33}\\\sigma^{23}\\\sigma^{13}\\\sigma^{12}\end{Bmatrix},\ [\rho_1]=\rho\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\{t_1\}=\begin{Bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{Bmatrix},$$

$$\{u_2\}=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\\varphi\end{Bmatrix},\ \{\varepsilon_2\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\\varepsilon_{22}\\\varepsilon_{33}\\2\varepsilon_{23}\\2\varepsilon_{13}\\2\varepsilon_{12}\\-E_1\\-E_2\\-E_3\end{Bmatrix},\ \{\sigma_2\}=\begin{Bmatrix}\sigma^{11}\\\sigma^{22}\\\sigma^{33}\\\sigma^{23}\\\sigma^{13}\\\sigma^{12}\\D^1\\D^2\\D^3\end{Bmatrix},\ [\rho_2]=\rho\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\{t_2\}=\begin{Bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\q\end{Bmatrix}.$$

Здесь p_i, q – компонента поверхностной нагрузки и электрический заряд.

Физические соотношения (2) в матричной форме имеют обычный для теории упругости вид

$$\{\sigma_1\} = [C]\{\varepsilon_2\}. \tag{7}$$

Физические соотношения (3) для пьезокерамики, поляризованной в направлении оси X_3, в матричной форме будут иметь вид

$$\{\sigma_2\} = [D_2]\{\varepsilon_2\} = \begin{bmatrix} C & \beta \\ \beta^T & -e \end{bmatrix}\{\varepsilon_2\}, \tag{8}$$

где

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix}, \tag{9а}$$

$$[D_2] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{13} \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{13} \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & \beta_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & \beta_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{15} & 0 & -e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{15} & 0 & 0 & 0 & -e_{11} & 0 \\ \beta_{13} & \beta_{13} & \beta_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \end{bmatrix}. \tag{9б}$$

В случае поляризации керамики в направлении какой-либо другой оси соответствующим образом должна быть преобразована матрица коэффициентов $[D_2]$ в (8). Для элемента тела V_1 матрица упругости $[D_1]$ будет иметь размер 6×6 и содержать только элементы C_{ij}.

Вариационная задача (5) и (6) с помощью метода конечных элементов (МКЭ) сводится к системе N линейных алгебраических уравнений:

$$\left[K\right]\left\{U\left(t\right)\right\}+\left[M\right]\left\{\ddot{U}\left(t\right)\right\}=\left\{P\left(t\right)\right\}, \tag{10}$$

$$\left[K\right]\left\{U\right\}=\left\{P\right\}, \tag{11}$$

где $\left\{U\right\}$ – вектор узловых параметров, $\left[K\right]$ – матрица жесткости (в общем случае комплексная), $\left[M\right]$ – матрица масс, $\left\{P\right\}$ – вектор нагрузок (внешних сил), включающий помимо силовых факторов электрический заряд [4].

3. Численное определение управляющих нагрузок при неполном управлении системой

Рассмотрим линейную упругую управляемую систему (конструкцию), которая описывается вектором N обобщенных координат, находящуюся под воздействием внешних нагрузок и M управляющих воздействий (силовых, электрических, тепловых или иных). Требуется, чтобы определенная часть конструкции, движение которой можно описать M обобщенными координатами $(M < N)$, при колебаниях совершала заданное движение или находилась в покое. Управление системой корректирующими воздействиями, количество которых меньше общего числа степеней свободы (обобщенных координат), называется неполным.

Чтобы конструкция была управляемой по заданным степеням свободы (обобщенным координатам), необходимо выбрать те её элементы, на которые должны действовать управляющие нагрузки. Затем необходимо определить управляющие нагрузки (законы их изменения по времени) при действии некоторых заданных возмущений. Далее, по этим управляющим нагрузкам необходимо подобрать соответствующие актуаторы, способные обеспечить выполнение заданного управляющего воздействия. После этого может быть спроектирована система управления с обратными связями и определены законы управления. В целом система должна быть адаптивной, чтобы кинематические условия управления выполнялись при произвольных квазистатических и нестационарных возмущениях, возможно, заранее неопределенных.

4. Управление системой с помощью силовых воздействий

Уравнение движения упругой, в общем случае неконсервативной системы с N степенями свободы (обобщенными координатами) и M управляющими силами в соответствии с (10) будет иметь вид

$$[K]\{U(t)\}+[M]\{\ddot{U}(t)\}=\{P(t)\}+[G]\{Z(t)\}. \tag{12}$$

Здесь $\{Z\}$ – вектор управляющих сил размерности M, $[G]$ – постоянная матрица коэффициентов размерности $N\times M$, представляющая управляющие силы в полном векторе нагрузок, размерности N, в виде $\{P_y\}=[G]\{Z\}$.

Если управление осуществляется с помощью пьезоэлектрических актуаторов, то вектор $\{Z\}$ будет содержать электрические заряды, соответствующие электрическим степеням свободы.

При управлении системой посредством задания перемещения узлов или электрического потенциала формулируется условие кинематического нагружения, которое представляется в следующем виде:

$$[L]\{U(t)\}=\{l(t)\}, \tag{13}$$

где $[L]$ – постоянная прямоугольная матрица размерности $M\times N$, $\{l(t)\}$ – вектор размерности M $\{l(t)\}$, представляющий заданное движение части системы. Объединив уравнения (13) и (15), получим систему

$$\begin{cases} [M_x]\{\ddot{U}(t)\}+[K_x]\{U(t)\}=\{P_x(t)\} \\ \qquad\qquad\qquad\quad [L]\{U(t)\}=\{l(t)\} \end{cases} \tag{14}$$

или

$$\begin{bmatrix}[M_x]\\ [0]\end{bmatrix}\{\ddot{U}(t)\}+\begin{bmatrix}[K_x]\\ [L]\end{bmatrix}\{U(t)\}=\begin{Bmatrix}\{P_x(t)\}\\ \{l(t)\}\end{Bmatrix}, \tag{14a}$$

откуда находим $\{U(t)\}$.

Для удобства численного решения системы (12) ее можно преобразовать к новым обобщенным координатам так, чтобы выделить M уравнений для M обобщенных координат, соответствующих управляющим силам. Обозначим вектор этих координат порядка M через $\{z(t)\}$. Обобщенные координаты вектора $\{z(t)\}$ выбираются так, чтобы скалярное произведение $\delta\{z(t)\}^T\{Z\}$ представляло элементарную работу управляющих сил. Для этого представим вектор $\{U(t)\}$ в виде $\{U(t)\}=\begin{Bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{Bmatrix}$. Тогда (12) можно записать в виде системы двух матричных уравнений:

$$[M_x]\{\ddot{U}(t)\}+[K_x]\{U(t)\}=\{P_x(t)\}, \tag{15}$$

$$[M_z]\{\ddot{U}(t)\}+[K_z]\{U(t)\}=\{P_z(t)\}+\{Z(t)\}. \tag{16}$$

Здесь $\{P\}=\begin{Bmatrix} P_x \\ P_z \end{Bmatrix}$, $[M]=\begin{bmatrix} M_x \\ M_z \end{bmatrix}$, $[K]=\begin{bmatrix} K_x \\ K_z \end{bmatrix}$.

Векторы $\{z\},\{Z\},\{P_z\}$ имеют порядок *M*, а векторы $\{x\}$, $\{P_x\}$ – порядок *N–M*; матрицы $[M_z],[K_z]$ имеют размерность $M\times N$, а матрицы $[M_x],[K_x]$ – $(N-M)\times N$. Из системы (12) можно найти вектор $\{U(t)\}$, а затем из уравнения (12) – вектор $Z(t)$.

Для решения динамической задачи управления нестационарными колебаниями системы можно использовать следующий подход.

Выбираем какие-либо *M* обобщенных координат, входящих в вектор $\{U(t)\}$, и выражаем их через остальные *N–M* обобщенных координат. Затем выбранные *M* обобщенных координат исключаем из числа неизвестных в уравнении (15). В результате будем иметь систему *N–M* дифференциальных уравнений. После их интегрирования при заданных начальных условиях из уравнения (16) можно определить вектор управляющих сил $\{Z(t)\}$.

Следует отметить, что для систем высокого порядка, каковыми являются конечно-элементные модели, при численном интегрировании по времени системы дифференциальных уравнений необходимо использовать достаточно малый шаг интегрирования Δt. Кроме того, для реальных упругих систем управляющие силы $\{Z(t)\}$ содержат высокочастотные составляющие, которые для эффективной работы системы необходимо подавить с помощью сглаживающих фильтров. Весьма эффективным методом решения поставленной задачи является метод главных координат, во многом решающий отмеченные выше проблемы [5].

5. Управление упругой конструкцией для обеспечения условий стабильности ее формы

При действии постоянных или медленно меняющихся во времени возмущений, например из-за погрешностей размеров составляющих элементов или вследствие нагрева и охлаждения, а также статических силовых воздействий, возникают деформации и изменения формы конструкции, которые можно компенсировать управляющими воздействиями. Управляющие воздействия, в нашем случае электрические, создают управляемые деформации активных элементов, которые корректируют форму конструкции.

Наиболее остро проблема стабильности формы упругого тела стоит в области космической связи для параболических антенн.

Рассмотрим электроупругую конструкцию, конечно-элементная модель которой имеет N степеней свободы. Уравнения равновесия конструкции в обобщенных координатах с учетом постоянно действующих возмущений и управляющих воздействий, записанные в виде (12), при $\{\ddot{U}(t)\}=\{0\}$ примут вид

$$[K]\{U\}=\{P\}+\{P_{у}\}=\{P\}+[G]\{Z\}, \tag{17}$$

где $[K]$ – матрица жесткости конструкции, порядка N; $\{P\}$ – вектор обобщенных сил порядка N, характеризующий постоянно действующие нагрузки и возмущения (например, внешние силы, начальные технологические и температурные деформации ε_0), $P_{у}$ – вектор управляющих воздействий порядка $M < N$; G – матрица порядка $N \times M$, представляющая вектор обобщенных управляющих сил как $\{P_{у}\}=[G]\{Z\}$.

Из уравнения (17) получаем

$$\{U\}=\left[K^{-1}\right]\{P\}+[K]^{-1}[G]\{Z\}=\{U^{0}\}+[N]\{Z\}, \tag{18}$$

где $\left\{U^0\right\}$ – вектор обобщенных координат или начальное искажение формы конструкции и её деформация от действия нагрузки, определяемые уравнением (11), $\left[N\right]=\left[K\right]^{-1}\left[G\right]$.

Необходимо определить вектор управляющих воздействий $\left\{Z\right\}$, чтобы с их помощью минимизировать вектор $\left\{U\right\}$. Для этого составим квадратичную форму

$$J=\frac{1}{2}\left\{U\right\}^T\left[W\right]\left\{U\right\}=\frac{1}{2}\left(\left\{U^0\right\}^T+\left\{Z\right\}^T\left[N\right]^T\right)\left[W\right]\left(\left\{U^0\right\}+\left[N\right]\left\{Z\right\}\right), \quad (19)$$

где $\left[W\right]$ – некоторая симметричная или диагональная положительно определенная весовая матрица.

Условие минимума J на совокупности всех управляющих воздействий записывается в виде

$$dJ=d\left\{Z\right\}^T\left(\left[N\right]^T\left[W\right]\left[N\right]\left\{Z\right\}+\left[N\right]^T\left[W\right]\left\{U^0\right\}\right)=0,$$

откуда, приравнивая нулю выражение в скобках, получаем

$$\left\{Z\right\}=-\left(\left[N\right]^T\left[W\right]\left[N\right]\right)^{-1}\left[N\right]^T\left[W\right]\left\{U^0\right\}. \quad (20)$$

Показатель эффективности управления

$$f=\frac{\left\{U\right\}^T\left[W\right]\left\{U\right\}}{\left\{U^0\right\}^T\left[W\right]\left\{U^0\right\}} \quad (21)$$

с учетом (18) и (20) записывается в виде

$$f=1+\frac{\left\{Z\right\}^T\left[N\right]^T\left[W\right]\left\{U^0\right\}}{\left\{U^0\right\}^T\left[W\right]\left\{U^0\right\}}. \quad (22)$$

Минимум величины f определяет оптимальное расположение управляющих воздействий.

Вектор $\left\{Z\right\}$ будет существенно зависеть от выбора целевой функции, заданной весовой матрицей $\left[W\right]$ (20).

6. Система с кинематическими условиями управления

Рассмотрим случай, когда на упругую закрепленную систему наложены кинематические условия управления по части степеней свободы в виде (13). Подставив (18) в (13), получим

$$[L][K]^{-1}[G]\{Z\} = \{l\} - [L]\left[K^{-1}\right]\{P\}, \tag{23}$$

откуда определяется вектор управляющих сил $\{Z\}$. Из уравнения (23) следует, что упругая система при неполном управлении будет статически управляемой при условии

$$\det\left([L][K]^{-1}[G]\right) \neq 0. \tag{24}$$

В случае если движение управляемой конструкции описывается уравнениями (14а) при $\left\{\ddot{U}(t)\right\} = \{0\}$, то для квазистатической задачи получим

$$\{U\} = \begin{bmatrix} [K_x] \\ [L] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{P_x\} \\ \{l\} \end{Bmatrix}, \quad \{Z\} = [K_z]\{U\} - \{P_z\}. \tag{25}$$

В данном случае система будет статически управляемой при условии

$$\det\left(\begin{bmatrix} [K_x] \\ [L] \end{bmatrix}\right) \neq 0. \tag{26}$$

Из уравнений (25) определяем деформированную форму конструкции и вектор необходимых управляющих сил $\{Z\}$ для обеспечения условия $[L]\{U\} = \{l\}$.

7. Управление деформированной формой параболической оболочки

Для иллюстрации алгоритма формирования управляющего воздействия рассмотрим параболическую оболочку с прикрепленными к ней пьезоэлектрическими актуаторами. Оболочка жестко закреплена в окрестности полюса и находится под действием некоторой нагрузки *P* (рис. 1, *а*).

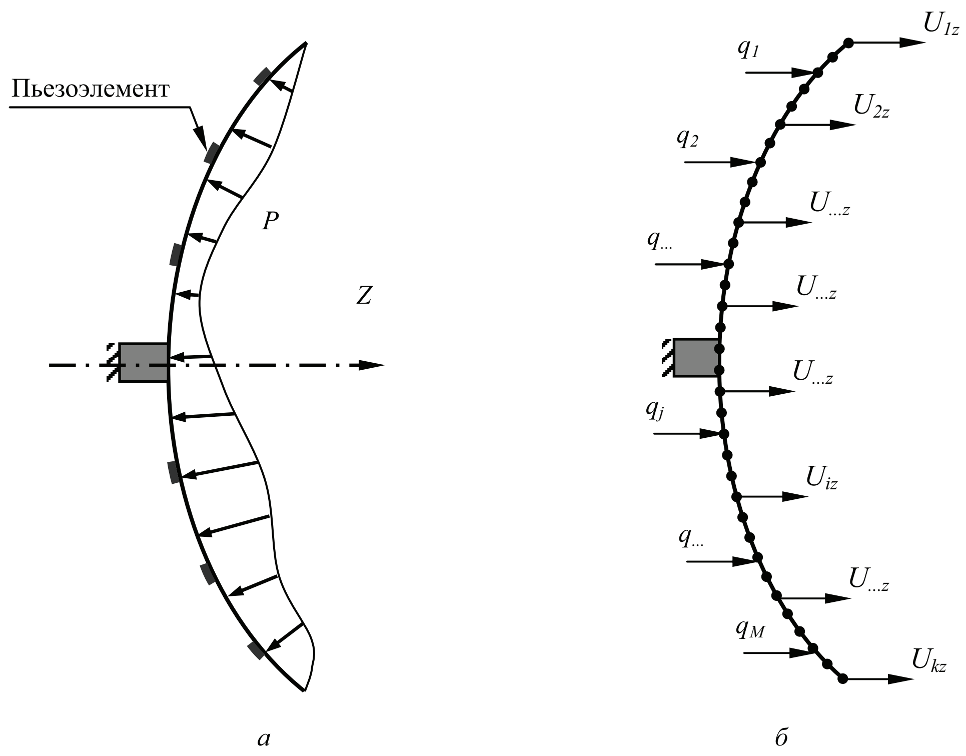

Рис. 1. Параболическая оболочка

Представим оболочку конечно-элементной моделью (рис. 1, *б*) с *n* узлами, имеющими по четыре степени свободы:

$$\left\{U^{\text{node}}\right\} = \left\{U_x \quad U_y \quad U_z \quad \varphi\right\},$$

где U_x, U_y, U_z – компоненты вектора перемещений, φ – электрический потенциал. Тогда общее число степеней свободы $N = 4n$. Деформация оболочки регулируется с помощью дополнительных управляющих усилий $Z_i = q_i^{\text{у}}$, $\left(i = 1 \div M\right)$, где q_i – электрический заряд, подаваемый на электроды пьезоэлемента. Уравнения равновесия оболочки в деформированном состоянии под действиям нагрузки *P* и управляющих зарядов q_i записываются в обобщенных перемещениях узлов $\{U\}$ в виде (16), где $\{Z\} = \left\{q_1^{\text{у}}, q_2^{\text{у}}, \cdots q_M^{\text{у}}\right\}^T$. Будем полагать, что осуществляется контроль за осевыми перемещениями в *k* узлах $\left(k > M\right)$. Обозначим эти перемещения через $V_j \ (j = 1 \div k)$. Ставится следующая задача: определить управляющие усилия $\{Z\} = \{q_1^{у}, q_2^{у}, \cdots q_M^{у}\}^T$, при которых данные компоненты вектора перемещений были бы минимальны. Для этого воспользуемся методом наименьших квадратов. Составим функционал

$$J = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} Y_{jj} v_j^2 = \frac{1}{2}\{V\}^T [Y]\{V\}, \tag{27}$$

где $\{V\}$ – вектор контролируемых перемещений,

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{22} & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & Y_{jj} & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & Y_{kk} \end{bmatrix} = \lceil Y_{11}\, Y_{22} \cdots Y_{jj} \cdots Y_{kk} \rfloor$$ – диагональная

матрица весовых коэффициентов. Вектор контролируемых перемещений $\{V\}$ может быть выделен из вектора $\{U\}$ с помощью линейного алгебраического оператора $[H]$, представляемого матрицей размерности $k \times N$:

$$\{V\} = [H]\{U\}. \tag{28}$$

Подставив (28) в (27), получим

$$J = \frac{1}{2}\{U\}^T [H]^T [Y][H]\{U\}. \tag{29}$$

С учетом уравнения (18) функционал *J* может быть представлен следующей формулой:

$$J = \frac{1}{2}\left(\{U^0\}^T + \{Z\}^T [N]^T\right)[H]^T [Y][H]\left(\{U^0\} + [N]\{Z\}\right). \tag{30}$$

Условием минимума функционала *J* является равенство нулю его дифференциала.

$$dL = d\{Z\}^T \left([N]^T [H]^T [Y][H][N]\{Z\} + [N]^T [H]^T [Y][H]\{U^0\}\right) = 0, \tag{31}$$

откуда

$$\{Z\} = -\left([N]^T [H]^T [Y][H][N]\right)^{-1} [N]^T [H]^T [Y][H]\{U^0\}. \tag{32}$$

Определенные таким образом величины управляющих зарядов $\{Z\}$ обеспечивают минимальное искажение формы параболической оболочки с учетом весовых коэффициентов для каждого контролируемого перемещения.

На практике в качестве исполнительного устройства используется источник напряжения, т.е. в качестве управляющего сигнала выступает электрический потенциал φ_i. Связь между приращением потенциала и заряда определяется следующее формулой:

$$\Delta\varphi_i = \frac{\Delta q_i}{C_i}, \tag{33}$$

где C_i – ёмкость пьезоэлемента, $\Delta\varphi_i = \varphi_i^{у} - \varphi_i^{0}$, $\Delta q_i = q_i^{у} - q_i^{0}$. В нашем случае в результате деформации оболочки в *i*-м узле возникает электрический потенциал φ_i^0, в то время как $q_i^0 = 0$. Тогда управляющий потенциал будет определен как

$$\varphi_i^{у} = \varphi_i^{0} + \frac{q_i^{у}}{C_i} = \varphi_i^{0} + \frac{Z_i}{C_i}. \tag{34}$$

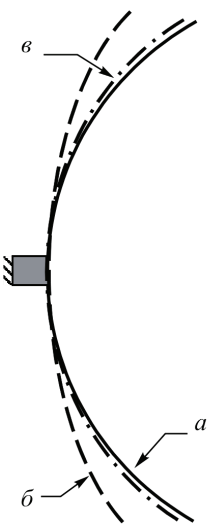

Рис. 2. Форма оболочки: *а* – исходная форма оболочки; *б* – форма нагруженной оболочки; *в* – форма нагруженной оболочки с обратными связями

На рис. 2 показан характер решения (форма оболочки) для нагруженной оболочки (б) и нагруженной оболочки с внешним управляющим воздействием, сформированным в цепи обратной связи (в).

Выводы

Сформулирована проблема выбора передаточной функции в цепи отрицательной обратной связи для обеспечения условий стабильности формы системы.

Описанный подход обладает определенной универсальностью и позволяет вычислять вектор значений управляющих параметров, в качестве которых в электроупругих системах могут выступать внешние силы, электрические заряды и потенциал на электродах пьезоэлементов. Рассмотренный пример стабилизации формы параболической оболочки с помощью пьзоэлектрических актуаторов показал высокую степень формализации данного алгоритма.

Библиографический список

1. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М: Наука, 1988. – 471 с.

2. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Электротермовязкоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – 319 с.

3. Matveyenko V.P., Kligman E.P. Natural Vibration Problem of Viscoelastic Solids as Applied to Optimization of Dissipative Properties of Constructions // Journal of Vibration and Control. – 1997. – Vol. 3, No 1. – С. 87–102.

4. Клигман Е.П., Матвеенко В.П., Юрлова Н.А. Динамические характеристики тонкостенных электроупругих систем // Известия РАН, МТТ. – 2005. – № 2. – С. 179–187.

5. Клигман Е.П., Матвеенко В.П., Юрлова Н.А. Вариант метода главных координат для решения задач колебаний электровязкоупругих систем с пассивными электрическими цепями // Вестник ПГТУ. Вычислительная механика. – 2007. – № 6 – С. 37–45.

Получено 21.01.2011