

**В.В. Вершинин, А.А. Локтев**

Московский государственный строительный университет

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ПРОТИВОУДАРНОЙ ИЗОЛЯЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЕМ РАБОЧИХ ХАРАКТЕРИСТИК**

Исследуется проблема динамического контакта ударника в виде твердого тела и мишени в виде тонкостенной конструкции тел с учетом располагающегося между ними в зоне контакта противоударного изолятора, состоящего из упругого и вязкого элемента, соединенных параллельно и последовательно в разных вариантах изолятора. Определяются динамические характеристики контактного взаимодействия, оценивается вклад в значения конечных характеристик упругих и вязких параметров изолятора. Рассматривается задача оптимизации начальных параметров противоударного элемента для случая ограничения конечных характеристик удара, задача выявления управляющих параметров изолятора и способов их изменения после начала ударного воздействия на защищаемую конструкцию.

**Ключевые слова:** ударное воздействие, противоударный изолятор, вязкоупругий элемент Кельвина–Фойгта, вязкоупругий элемент Максвелла, динамические характеристики.

### **1. Постановка задачи**

Задачи, связанные с моделированием противоударных систем и изоляторов, рассматривались неоднократно отечественными и зарубежными учеными [1–4]. В некоторых работах определялись контактная сила в месте удара [1, 2], перемещения точек мишени [1–4], ускорения, которые приобретает мишень после удара по ней [1, 3].

В работе рассматривается механическая система (рис. 1), состоящая из системы двух тел (ударника и мишени) и расположенным между ними изолятором, состоящим из вязкого, упругого элемента и элемента управления, который может генерировать некоторую силу противодействия начальному удару. На рис. 1, *а* представлен изолятор с линейным вязкоупругим элементом типа Кельвина–Фойгта, а на рис. 1, *б* – изолятор с вязкоупругим элементом Максвелла.

Предполагается, что ударник и точки мишени могут двигаться прямолинейно вдоль одной и той же прямой. Движение ударника и мишени после начала контакта для модели вязкоупругого тела типа Кельвина–Фойгта относительно основания описывается [1] системами дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m_1(\ddot{x} + \ddot{z}) + K(\dot{x} - \dot{y}) + C(x - y) &= 0, \\ m_2(\ddot{y} + \ddot{z}) + K(\dot{y} - \dot{x}) + C(y - x) &= F, \end{aligned} \quad (1.1)$$

для модели Максвелла справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} m_1(\ddot{x} + \ddot{z}) - K \int_0^t (\dot{x} - \dot{y}) e^{-\frac{t-t'}{\tau_1}} dt' + C(x - y) &= 0, \\ m_2(\ddot{y} + \ddot{z}) - K \int_0^t (\dot{y} - \dot{x}) e^{-\frac{t-t'}{\tau_1}} dt' + C(y - x) &= F, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – массы тел ударника и мишени соответственно,  $x$  и  $y$  – координаты ударника и мишени относительно верхней точки изолятора,  $z$  – координата верхней точки изолятора относительно инерциальной системы отсчёта,  $K$  – коэффициент вязкого сопротивления,  $C$  – коэффициент жесткости упругого элемента,  $F$  – управляющая сила, приложенная к мишени со стороны изолятора (в данной работе она отсутствует).

Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  крайняя точка противоударного изолятора и область мишени под изолятором (контактная область) покоятся, т.е. уравнения (1.1), (1.2) рассматриваются при начальных условиях

$$x(t = 0) = 0, y(t = 0) = 0, \dot{x}(t = 0) = 0, \dot{y}(t = 0) = 0. \quad (1.3)$$

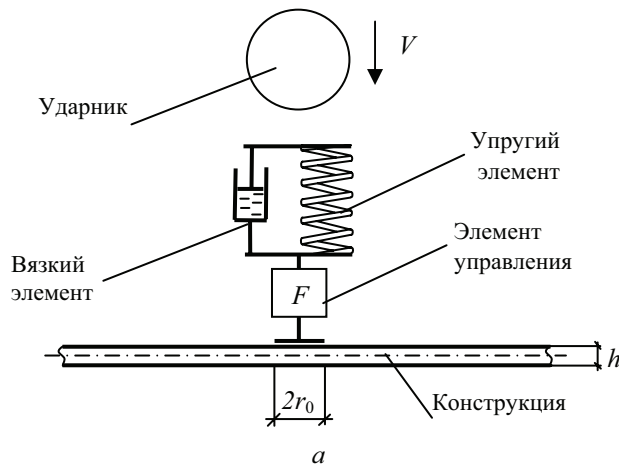


Рис. 1. Вид противоударных изоляторов с вязкоупругими элементами:  
(а) Кельвина–Фойгта, (б) Максвелла (см. с. 140)

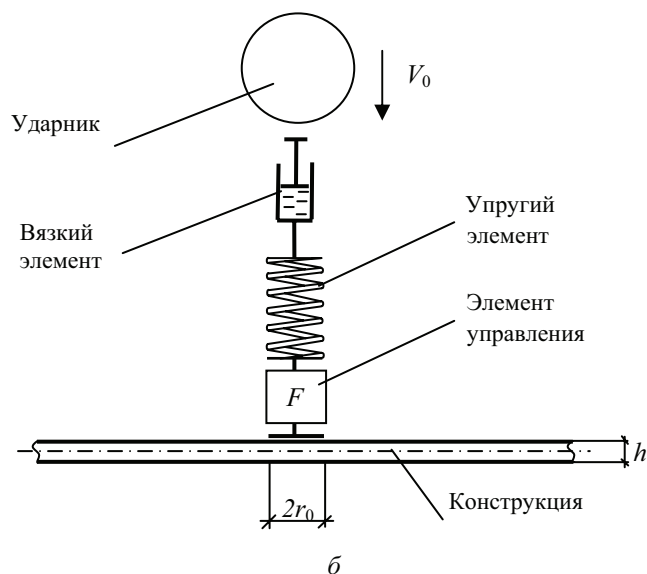


Рис. 1. Окончание

## 2. Метод решения

В данной работе рассматривается не мгновенный удар, т.е. контактная сила достигает своего максимального значения через какое-то время после касания ударником изолятора. В работе [4] приведены примеры расчёта, основанные на приближенной теории типа Сен-Венана для поперечного удара по балке, для которой учитываются вынужденные колебания, а контактная сила изменяется со временем по гармоническому закону, но предполагается, что ударное взаимодействие носит неупругий характер и не учитывается зависимость контактной силы от местных деформаций в зоне взаимодействия тел. Несмотря на распространенность данного подхода в инженерных задачах, результаты его использования не дают полной информации о характере процесса соударения и об изменении силы взаимодействия между соударяющимися телами по времени, и поэтому он неприменим в задаче противоударной изоляции.

В представляемой работе сделана попытка обобщить данный подход на случай вязкоупругих моделей ударного взаимодействия и большего временного интервала, включающего и повторные соударения тел. В работе предполагается, что за время ударного взаимодействия стационарные и нестационарные процессы деформирования ми-

шени не дошли до конца балки, т.е. рассматривается достаточно протяженная балка. Также предполагается, что балка, выступающая в качестве мишени, шарнирно оперта по краям, т.е. граничные условия можно записать в виде

$$y(x = -l) = y(x = l) = \frac{\partial^2 y(x = -l)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(x = l)}{\partial x^2} = 0, \quad (2.1)$$

где  $l$  – полудлина балки.

В качестве начальных условий ударного взаимодействия тел принимаются следующие:

$$y(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (2.2)$$

При нахождении аналитического выражения силы взаимодействия между ударяющим телом и балкой воспользуемся алгоритмом, приведённым в [4]. При этом изложенная теория будет применима к случаям соударения с балкой таких тел, что общая нормаль в точке соприкосновения недеформированных поверхностей тела и балки проходила через центр инерции тела и была вертикальной. Кроме того, уравнение поверхности тела в точках начального касания с балкой и их окрестностях должно быть свободно от аналитических особенностей и не содержать особых точек, а кривизна ударяющего тела в тех же точках не должна быть равна нулю, иначе невозможно применение расширенной теории Герца [4].

Дифференциальное уравнение колебаний стержня имеет вид

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{\rho}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{q(x, t)}{EI}, \quad (2.3)$$

где  $\rho$  – приведенная к длине масса стержня.

Данное уравнение содержит производную по времени и производную по координате, для его решения необходимо избавиться от одного типа производных с помощью условий совместности или преобразования Лапласа. После записи уравнения (2.3) в пространстве изображений можно перейти от определения функции прогибов [4] к определению прогиба от действия единичной силы, для этого необходимо пронормировать функцию  $\tilde{y}(x, p)$  зависимостью  $\tilde{P}(p)$ :

$$u(x, p) = \frac{\tilde{y}(x, p)}{\tilde{P}(p)} = \frac{2l^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 n^4} \sin\left(\frac{n\pi a}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (2.4)$$

где  $p$  – параметр преобразования Лапласа,  $a$  – координаты точки приложения контактной силы  $\tilde{P}(p)$ , тильда над функцией обозначает ее представление в пространстве изображений. Граничные условия в пространстве изображений остаются прежними. После определения зависимости для прогиба балки можно перейти к определению контактной силы в месте взаимодействия двух тел, для этого рассмотрим уравнение движения ударника после начала контакта:

$$m_1 \frac{d^2 s}{dt^2} = m_1 g - P(t), \quad (2.5)$$

где  $s(t) = \alpha(t) + y(a, t)$  – полное перемещение ударника,  $\alpha(t)$  – местные деформации материала балки в месте удара, а прогиб  $y(a, t)$  вычисляется в месте ударного воздействия

Динамический контакт происходит при соблюдении следующих начальных условий:

$$s(t=0) = 0, \quad \frac{ds(x, 0)}{dt} = V_0. \quad (2.6)$$

В пространстве изображений уравнение (2.5) с учетом начальных условий (2.6) примет вид

$$\tilde{P}(p) = -m_1 p^2 \tilde{s}(p) + m_1 p V_0 + m_1 g. \quad (2.7)$$

Зависимость местного смятия и контактной силы определяется при решении контактной задачи и определяется механическими и геометрическими параметрами контактирующих тел, в качестве основного чаще всего используется модифицированное соотношение Герца

$$\alpha(t) = b P(t)^q \quad (2.8a)$$

или, в случае вязкоупругого элемента Максвелла, контактная сила принимает интегральный вид с экспоненциальным ядром релаксации:

$$P(t) = C(\alpha - w) - K \int_0^t (\dot{\alpha} - \dot{w}) e^{-\frac{t-t'}{\tau_1}} dt', \quad (2.8b)$$

где  $b$  определяется геометрическими и механическими свойствами соударяющихся тел,  $q = 2/3$  для начального касания в одной точке и  $q = 1 - \frac{1}{2n+1}$  для плотного начального касания, рассмотренного в [4].

Голдсмит [4] и ряд других исследователей рекомендуют определять этот параметр экспериментально,  $t'$  – переменная интегрирования.

Для вязкоупругого элемента Кельвина–Фойгта на основании соотношений (2.6) и (2.8а), записанных в пространстве изображений из уравнения (2.7), получим

$$\tilde{P}(p)(1 + m_1 p^2 u) = -m_1 p^2 b \tilde{P}(p)^q + m_1 p V', \quad (2.9)$$

где  $V' = V_0 + \frac{g}{p}$ .

Отсюда получаем рекуррентную формулу для  $\tilde{P}(p)$ :

$$\tilde{P}(p) = \left( \frac{V'}{bp} \right)^{\frac{1}{q}} \left( 1 + (1 + m_1 p^2 u) \frac{V'^{\frac{1}{q}-1}}{m_1 p (pb)^{\frac{1}{q}}} \left( 1 + (1 + m_1 p^2 u) \frac{\tilde{P}(p)^{1-q}}{bm_1 p^2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.10)$$

Если положить в правых частях равенств (2.10)  $\tilde{P} = 0$ , то получим приближения для контактной силы соответствующего порядка, который определяется степенью вложенности, т.е. количеством представлений  $\tilde{P}(p)^{1-q}$  с помощью самого же выражения (2.10). Выбирая соответствующие значения  $q$ , получим выражения для силы взаимодействия между ударяющим телом и балкой при различных условиях начального касания.

Решая данную задачу Коши методами операционного исчисления, можно легко получить выражения для смещения ударника  $x(t)$ , после чего можно будет найти остальные динамические характеристики контакта.

Положим  $m = K/2m_1$ ,  $n = \sqrt{C/m_1}$ . Возможны три случая:

при  $n > m$

$$x(t) = -\frac{1}{n_1 m_3} \int_0^t P(\tau) \cdot e^{-m(t-\tau)} \cdot \sin(n_1(t-\tau)) d\tau, \text{ где } n_1 = \sqrt{n^2 - m^2}; \quad (2.11)$$

при  $m < n$

$$x(t) = -\frac{1}{\alpha m_3} \int_0^t P(\tau) \cdot e^{-m(t-\tau)} \cdot \text{sh}(\alpha(t-\tau)) d\tau, \text{ где } \alpha = \sqrt{m^2 - n^2}; \quad (2.12)$$

при  $m = n = \lambda$

$$x(t) = -\frac{1}{m_3} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau. \quad (2.13)$$

Время первого ударного контакта находится по формуле для  $P(t)$ . Для временного интервала после окончания первого ударного контакта принимаем  $\ddot{z}(t) = 0$ .

В случае изолятора с вязкоупругим элементов Максвелла система уравнений (1.2) решается также с помощью метода преобразования Лапласа.

Решая эту систему, получим выражения для  $\alpha$  и  $w$ , которые в случае действительных корней характеристического уравнения  $a_1, a_2, a_3$  в пространстве оригиналов примут вид

$$\alpha = A_2 \exp(a_1 t) + B_2 \exp(a_2 t) + C_2 \exp(a_3 t) + D_2, \quad (2.14)$$

$$w = A_3 \exp(a_1 t) + B_3 \exp(a_2 t) + C_3 \exp(a_3 t) + D_3 + G_3 + (E_3 + H_3) \exp(a_7 t) + (F_3 + K_3) \exp(a_8 t), \quad (2.15)$$

В случае комплексно сопряженных корней  $a_4, a_5$  и одного действительного корня  $a_6$  характеристического уравнения эти выражения можно записать в следующем виде:

$$\alpha = \exp(-1/2at) \left\{ \xi^{-1/2} \sin\left(\frac{1}{2}\xi^{1/2}t\right) [2B_4 - aA_4] + A_4 \cos\left(\frac{1}{2}\xi^{1/2}t\right) \right\} + C_4 \exp(a_6 t) + D_4, \quad (2.16)$$

$$w = \exp(-at/2) \left\{ \xi^{-1/2} \sin\left(\frac{1}{2}\xi^{1/2}t\right) [2B_5 - aA_5] + A_5 \cos\left(\frac{1}{2}\xi^{1/2}t\right) \right\} + G_5 \exp(a_6 t) + D_5 + G_5 + (E_5 + H_5) \exp(a_9 t) + (F_5 + K_5) \exp(a_{10} t), \quad (2.17)$$

где коэффициенты, обозначенные буквами, определяются через соотношения известных величин [2]. После определения величин  $w$ ,  $\alpha$  и их подстановки в (2.8б) можно записать выражение для контактной силы  $P(t)$ .

### 3. Численные исследования

На рис. 2 представлены графические зависимости контактной силы от времени для случаев использования изолятора с вязкоупругим элементом Кельвина–Фойгта (кривые 1, 2, 3) и элементом Максвелла (кривые 4, 5, 6) для различных значений упругой и вязкой составляющей изолятора. Кривые 1 и 4 получены для случая  $C = 10^3$  Н/м,  $K = 10^6$  Нс/м, кривые 2 и 4 соответствуют значениям  $C = 10^3$  Н/м,  $K = 10^3$  Нс/м, а кривые 3 и 6 –  $C = 10^6$  Н/м,  $K = 10^3$  Нс/м. Остальные параметры взаимодействия принимают следующие значения:  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа,  $q = 2/3$ ,  $m = 1$  кг,  $V_0 = 8$  м/с,  $l = 2$  м, тип профиля – двутавр № 40.

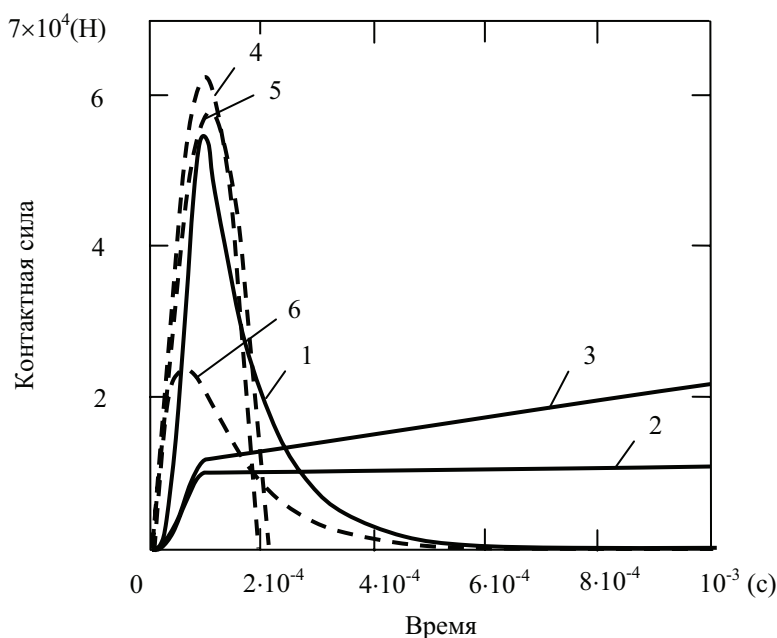


Рис. 2. Зависимость контактной силы от времени для значений  $C$  и  $K$

На этом рисунке видно, что сила взаимодействия в месте установки изолятора имеет различный характер зависимости от времени для двух вязкоупругих элементов. Однако такие явления, как увеличе-



ние времени взаимодействия тел и уменьшение максимума контактной силы наблюдаются и для элемента Максвелла, и для элемента Кельвина–Фойгта. На рис. 2 видны примеры прилипания ударника и мишени (кривые *1* и *б*), это происходит при противоположных значениях соотношения параметров упругости и вязкости и различном характере остаточных деформаций в изоляторах. При использовании последовательной модели изолятора уменьшение контактной силы более существенно и вязкоупругие свойства демпфера влияют в большей степени на конечные динамические характеристики, в то время как при наличии параллельного вязкоупругого элемента в изоляторе контактная сила может уменьшиться до некоторого значения, которое практически не будет меняться со временем.

### Библиографический список

1. Баландин Д. В., Болотник Н. Н. Предельные возможности противоударной изоляции системы с двумя степенями свободы // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – № 6. – С. 52–62.
2. Локтев А.А. Удар вязкоупругого тела по упругой изотропной пластинке // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т. 13. № 3. – С. 170–178.
3. Concept of a platform-based impact isolation system for protection of wheelchair occupants from injuries in vehicle crashes / D.V. Balandin, N.N. Bolotnik, W.D. Pilkey, S.V. Purtsezoв, C.G. Shaw // Medical Engineering and Physics. – 2008. – № 30. – P. 258–267.
4. Гольдсмит В. Удар. – М.: Стройиздат, 1965. – 595 с.

Получено 21.03.2011