

А.Ю. Горохов, Н.А. Труфанов

Пермский государственный технический университет

О ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ОРТОТРОПНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКЕ В ОКРЕСТНОСТИ КРУГЛОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Рассматривается равновесие ортотропной вязкоупругой пластинки с круглым включением под воздействием постоянных растягивающих усилий. Задача рассмотрена в рамках линейной теории анизотропной вязкоупругости при различных гипотезах учета вязкоупругих свойств материала и различных вариантах включений. Продемонстрирована существенная разница в результатах при использовании той или иной гипотезы. Показано наличие значительных перераспределений напряжений возле кромки включения.

Ключевые слова: Вязкоупругость, ортотропия, композиционные материалы, метод конечных элементов, многооператорная задача.

Рассматривается задача о растяжении постоянными распределёнными силами ортотропной пластинки с круглым включением радиусом R . Включение расположено в центре пластинки, растягивающие силы направлены вдоль одного из направлений симметрии вязкоупругих свойств (рис. 1) или под углом 45° . Возможны три вида включений: 1) отверстие (включение отсутствует); 2) абсолютно жёсткое включение; 3) упругое включение.

Пусть материал пластинки занимает в пространстве область V^{II} , а включение область V^{I} . Тогда постановка соответствующей задачи теории упругости в случае отсутствия включения и для абсолютно жёсткого включения имеет вид:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in V^{\text{II}}; \quad (1)$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}(x, y) &= \frac{\partial u_x}{\partial x}(x, y), \quad \varepsilon_{yy}(x, y) = \frac{\partial u_y}{\partial y}(x, y), \\ \gamma_{xy}(x, y) &= \frac{\partial u_x}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial u_y}{\partial x}(x, y), \quad (x, y) \in V^{\text{II}}; \end{aligned} \quad (2)$$

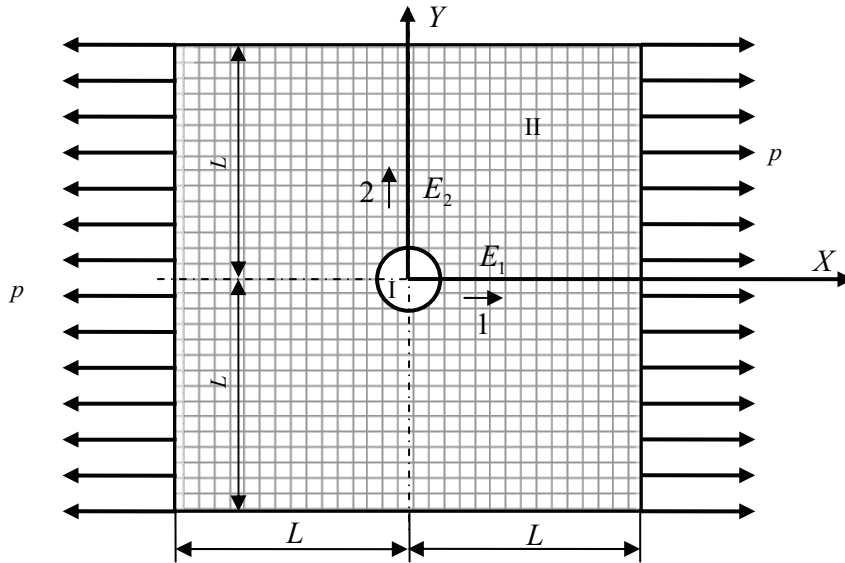


Рис. 1. Схема нагружения пластинки: I – материал включения; II – материал пластинки

физические соотношения в условиях плоского напряжённого состояния (ПНС) пластинки

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}(x, y) &= \frac{1}{E_1} (\sigma_{xx}(x, y) - \nu_1 \sigma_{yy}(x, y)), \varepsilon_{yy}(x, y) = \\ &= \frac{1}{E_2} (\sigma_{yy}(x, y) - \nu_2 \sigma_{xx}(x, y)), \gamma_{xy}(x, y) = \frac{1}{G} \tau_{xy}(x, y), (x, y) \in V^{\text{II}}; \end{aligned} \quad (3)$$

граничные условия

$$\sigma_{xx}|_{x=\pm L} = p, \tau_{xy}|_{x=\pm L} = 0, \sigma_{yy}|_{y=\pm L} = \tau_{xy}|_{y=\pm L} = 0,$$

– пластинка с круговым отверстием, не содержащим включения

$$(\sigma_{xx} \mathbf{n}_x + \tau_{xy} \mathbf{n}_y)|_{x^2+y^2=R^2} = 0, (\tau_{yx} \mathbf{n}_x + \sigma_{yy} \mathbf{n}_y)|_{x^2+y^2=R^2} = 0;$$

– пластинка с круговым отверстием, содержащим жёсткое включение

$$u_x|_{x^2+y^2=R^2} = 0, u_y|_{x^2+y^2=R^2} = 0.$$

Для случая упругого включения на его границе должно выполняться условие

$$u_x^I \Big|_{x^2+y^2=R^2} = u_x^{\text{II}} \Big|_{x^2+y^2=R^2}, \quad u_y^I \Big|_{x^2+y^2=R^2} = u_y^{\text{II}} \Big|_{x^2+y^2=R^2},$$

где u^I – перемещения в материале включения, u^{II} – в материале пластинки. Кроме того, уравнения равновесия (1) и геометрические соотношения (2) записываются для $(x, y) \in V$, где $V = V^I \cup V^{\text{II}}$, а физические соотношения (3) дополняются уравнениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}(x, y) &= \frac{2}{E_1} (\sigma_{xx}(x, y) - \nu_1 \sigma_{yy}(x, y)), \quad \varepsilon_{yy}(x, y) = \\ &= \frac{2}{E_2} (\sigma_{yy}(x, y) - \nu_2 \sigma_{xx}(x, y)), \quad \gamma_{xy}(x, y) = \frac{2}{G} \tau_{xy}(x, y), \quad (x, y) \in V^I. \end{aligned} \quad (4)$$

Предполагается, что модули упругости включения в 2 раза меньше, чем пластинки, а также $R \ll L$.

При постановке задачи в рамках теории линейной вязкоупругости физические соотношения (3) примут вид

$$\varepsilon_{xx} = \Pi_{xx}^* \sigma_{xx} + \Pi_{xy}^* \sigma_{yy}, \quad \varepsilon_{yy} = \Pi_{xy}^* \sigma_{xx} + \Pi_{yy}^* \sigma_{yy}, \quad \gamma_{xy} = \Pi_{xyxy}^* \tau_{xy}, \quad (5)$$

где Π_{xx}^* , Π_{yy}^* , Π_{xy}^* , Π_{xyxy}^* – интегральные операторы вида

$$\begin{aligned} \Pi_{xx}^* f(t) &= \int_0^t \Pi_{xx}(t-\tau) df(\tau) = \Pi_{xx}(0) \left(f(t) + \int_0^t K_{xx}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right), \\ \Pi_{yy}^* f(t) &= \int_0^t \Pi_{yy}(t-\tau) df(\tau) = \Pi_{yy}(0) \left(f(t) + \int_0^t K_{yy}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right), \\ \Pi_{xy}^* f(t) &= \int_0^t \Pi_{xy}(t-\tau) df(\tau) = \Pi_{xy}(0) \left(f(t) + \int_0^t K_{xy}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right), \\ \Pi_{xyxy}^* f(t) &= \int_0^t \Pi_{xyxy}(t-\tau) df(\tau) = \Pi_{xyxy}(0) \left(f(t) + \int_0^t K_{xyxy}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Как видно из постановки, задача является многооператорной и её решение традиционными методами, ориентированными на наличие

в структуре решения одного оператора, невозможно, поэтому зачастую прибегают к некоторым упрощениям в самой постановке.

Из многолетней практики решения подобных многооператорных задач сложился ряд упрощающих гипотез. В их числе гипотезы: 1) вязкоупругие свойства проявляются только при сдвиге [1, 2, 3]; 2) ядра всех операторов могут быть выражены через одну функцию времени [4, 5]. Эти гипотезы приводят к изменению самой постановки задачи, однако позволяют перейти от задачи с несколькими операторами к задаче с одним оператором, что значительно упрощает процесс решения.

Решим рассмотренную задачу с применением каждой из гипотез, а также в общей многооператорной постановке.

Для описания вязкоупругих свойств пластинки воспользуемся работой [6], в которой приводятся данные об аппроксимации кривых ползучести для некоторых однонаправленных композиционных материалов. Аппроксимация кривых ползучести производилась выражением

$$\varepsilon_{ij}(t) = \left[I_{ijkl} + \int_0^t K_{ijkl}(t-\tau) d\tau \right] \sigma_{kl}. \quad (6)$$

Функции ядер $K_{ijkl}(t) = \varphi_m$ приняты в виде суммы экспонент:

$$\varphi_m(t) = \frac{\lambda_m}{3} \sum_{i=1}^3 \beta_{im} \exp(-\beta_{im} t), \quad (7)$$

где индекс m отвечает за номер ядра ползучести: $K_{1111} = \varphi_1$, $K_{2222} = \varphi_2$, $K_{1122} = \varphi_3$, $K_{1212} = \varphi_4$.

В табл. 1. приведены значения параметров функции (7), взятые из работы [6] для однонаправленного стеклопластика.

Таблица 1

Реологические характеристики однонаправленного стеклопластика

$\varphi_1(t)$			$\varphi_2(t)$			$\varphi_3(t)$			$\varphi_4(t)$		
I_{1111}	λ_1	β_{1i}	I_{2222}	λ_2	β_{2i}	I_{1122}	λ_3	β_{3i}	$2I_{1212}$	λ_4	β_{4i}
$\cdot 10^4$	$\cdot 10^4$	$\cdot 10^4$	$\cdot 10^3$	$\cdot 10^4$	$\cdot 10^4$	$\cdot 10^4$	$\cdot 10^4$	$\cdot 10^4$	$\cdot 10^3$	$\cdot 10^3$	$\cdot 10^4$
2,02	0	1	1,16	1,87	0,29	0,68	0	1	1,98	4,80	0,28
		1			1,33			1			1,29
		1			3,73			1			3,37

Примечание. В таблице приняты измерения: I_{ijkl} , λ_m – мм²/кгс, β_{mi} – 1/ч.

Также в работе [6] приводятся данные по аппроксимации всех ядер ползучести одной функцией. При этом аппроксимация кривых ползучести (6) записывается следующим выражением:

$$\varepsilon_{ij}(t) = [I_{ijkl} + \lambda_m \Gamma(t)] \sigma_{kl},$$

где нормированная функция времени $\Gamma(t)$ имеет вид

$$\Gamma(t) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 [1 - \exp(-\beta_i t)]; \quad 0 \leq \Gamma(t) \leq 1. \quad (8)$$

В табл. 2. приведены значения параметров функции (7).

Таблица 2

Реологические характеристики функции (7)

$\beta_{1i} \cdot 10^4, 1/\text{ч}$	$\lambda_1 \cdot 10^4, \text{мм}^2/\text{кгс}$	$\lambda_2 \cdot 10^3, \text{мм}^2/\text{кгс}$	$\lambda_3 \cdot 10^4, \text{мм}^2/\text{кгс}$	$\lambda_4 \cdot 10^3, \text{мм}^2/\text{кгс}$
0,35	0	1,83	0	4,63
1,25				
3,99				

Среднеквадратичная относительная погрешность аппроксимации всех ядер ползучести одной функцией (8) для рассмотренного однонаправленного стеклопластика составляет 1,2 % [6].

Для получения вязкоупругих свойств ортотропной пластинки с включениями будем считать, что пластинка состоит из слоёв однонаправленного стеклопластика, чьи свойства нам известны и приведены выше. Слои чередуются: один слой с направлением армирования вдоль направления оси X , второй с направлением армирования вдоль направления оси Y (см. рис. 1). При таком расположении получаем пакет, который можно рассматривать как ортогонально армированный материал. Зная вязкоупругие характеристики однонаправленного стеклопластика, известным образом можно получить характеристики ортогонально армированного стеклопластика.

Задачу о растяжении ортотропной вязкоупругой пластинки с включением будем решать по методу квазиконстантных операторов. Упругую задачу на каждом моменте времени будем решать методом конечных элементов. Используются треугольные элементы с линейной аппроксимацией. Дискретизация составляет 25 элементов на четверть

кромки включения. Результаты решения упругой задачи были сопоставлены с известным аналитическим решением, полученным в [7]. Относительная погрешность численного решения не превышает 3 %.

Приведем некоторые результаты решения поставленной задачи. Все изображенные ниже эпюры, по аналогии с [7], взяты по модулю с добавлением 1, что позволяет создать эффект круглого включения с радиусом 1. На эпюрах отображается отношение напряжений в материале пластинки у кромки круглых включений к внешнему растягивающему усилию σ/p . Линии с маркерами в виде точек характеризуют величину σ/p для достаточно большого момента времени $t = 10^9$ с, а без маркеров – для нулевого $t = 0$ с момента времени. Эпюры построены в полярной системе координат.

На рис. 2 приведены эпюры отношений окружных напряжений к внешнему усилию σ_θ/p , полученных при растяжении пластинки с круглым отверстием под углом 0° к одному из направлений упругости материала пластинки. Представлены результаты решения задачи при использовании всех независимых операторов (см. рис. 2, а), при использовании только одного оператора сдвига (см. рис. 2, б) и при аппроксимации всех операторов на основе одной функции (см. рис. 2, в). Рис. 2, г. содержит эпюры отношений σ_θ/p , полученных при растяжении пластинки с круглым отверстием под углом 45° к одному из направлений упругости материала пластинки. Для получения окружных напряжений для отношений σ_θ/p , изображенных на этом рисунке, решалась исходная многооператорная задача (5) в общем виде. Из рис. 2, г хорошо видно, что напряжения в материале с течением времени претерпевают не только значительные количественные, но и качественные изменения.

Для количественной оценки эволюции напряжений у кромки отверстия построим график изменения параметра σ_θ/p во времени (рис. 3). Линии 1, 2, 3 на рис. 3 соответствуют изменениям параметров σ_θ/p , эпюры которых изображены на рис. 2, а, б, в, при угле, равном 90° (угол, при котором наблюдаются наибольшие напряжения). Таким образом, линия 1 соответствует решению задачи с использованием всех независимых операторов, линия 2 – решению задачи с учетом только сдвигового оператора и линия 3 – решению задачи при аппроксимации

всех ядер операторов одной функцией. Значение $\sigma_0/p = 2,8$ соответствует упругому решению. Видно (см. рис. 3), что использование различных гипотез приводит к существенным количественным изменениям в результатах решений. Кроме того, можно говорить о большом росте напряжений во времени относительно упругого решения (до 40 %) (см. рис.3).

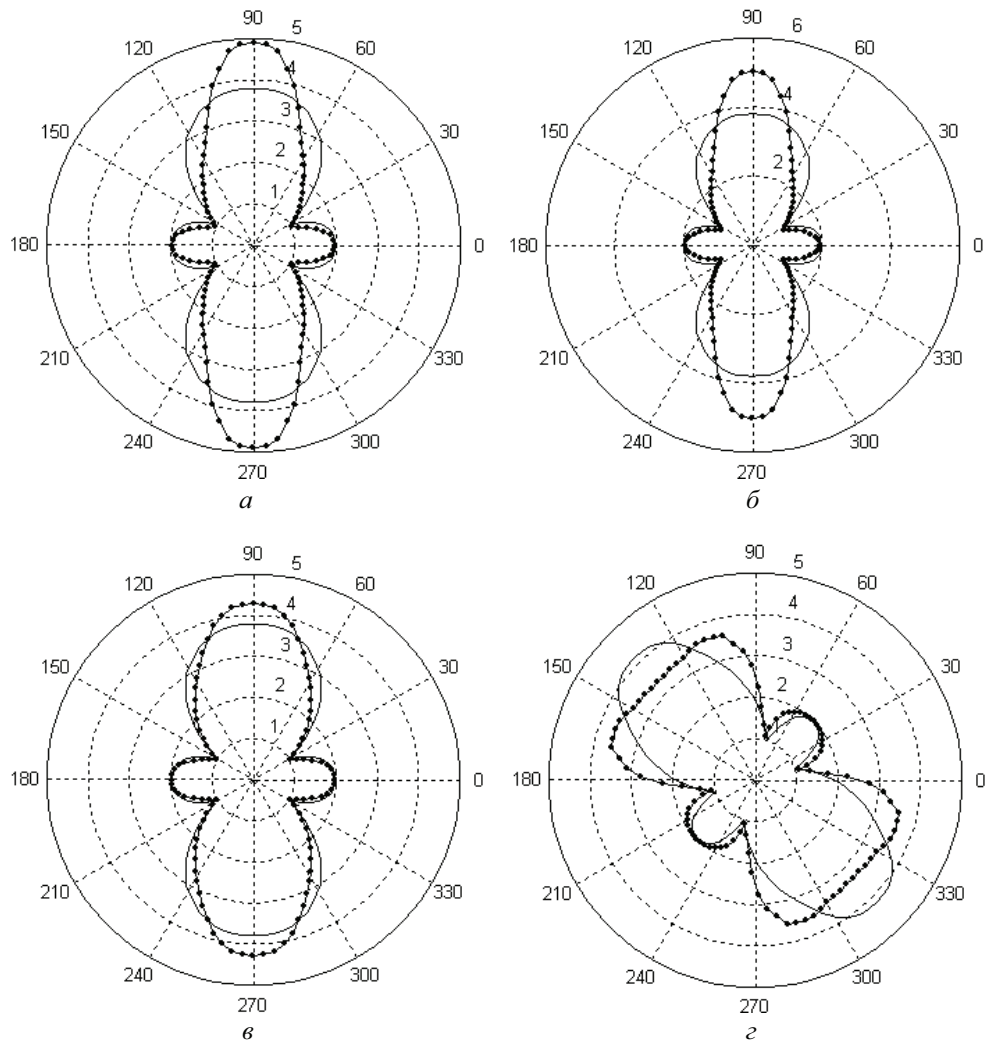


Рис. 2. Эпюры относительного напряжения σ_0/p для задачи с отверстием

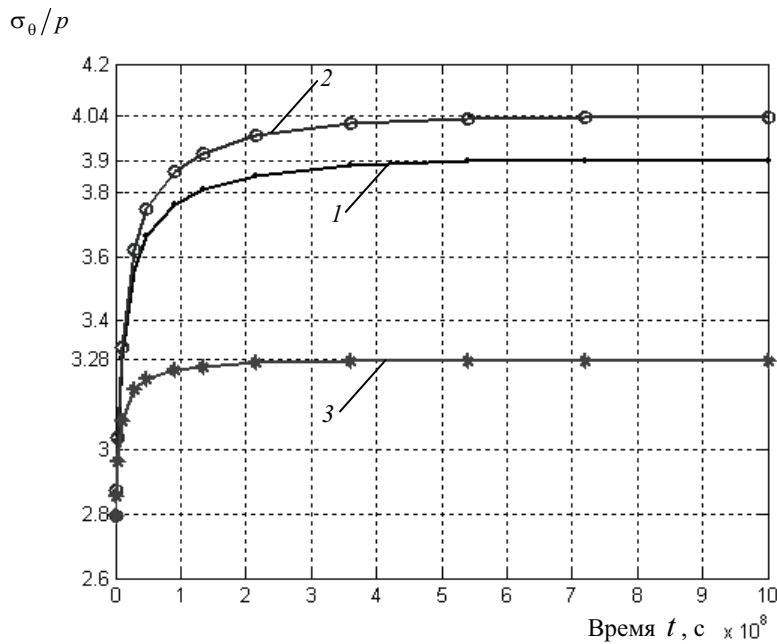


Рис. 3. Изменение относительного напряжения σ_0/p с течением времени для задачи с отверстием

Приведем результаты решения поставленной задачи по растяжению пластинки с абсолютно жёстким включением. Аналогично рис. 2, на рис. 4, *a*, *b* и *в* изображены эпюры изменения параметра σ_0/p по углу при растяжении пластинки под углом 0° к одному из направлений ортотропии свойств материала пластинки. Эпюры получены при решении задачи с использованием всех независимых операторов, с использованием только одного оператора сдвига и с аппроксимацией всех операторов на основе одной функции соответственно. На рис. 4, *г* представлена эпюра σ_0/p для задачи о растяжении под углом 45° при учете всех независимых операторов.

На основании полученных картин (см. рис. 4) изменения отношения σ_0/p можно судить о наличии значительной эволюции напряжений в материале пластинки возле кромки жёсткого включения. Кроме количественных изменений напряжения претерпевают и значительные качественные изменения. В ходе работы выявлено, что окружные напряжения не только возрастают со временем, а еще и изменяют знак. Как и для задачи с круглым отверстием, различные гипотезы в постановке задачи приводят к расхождению в результатах решения.

Линии 1, 2 и 3 на рис. 5 соответствуют изменениям напряжений σ_θ/p во времени, эпоры которых изображены на рис. 4, а, б, в, при угле, составляющем примерно 61° (угол, при котором наблюдаются наибольшие напряжения). Линия 4 рис. 5 указывает на значение $\sigma_\theta/p = 0,116$, соответствующее упругому решению задачи. Наличие точек графиков напряжений σ_θ/p (см. рис. 5), лежащих ниже линии 4, указывает на то, что напряжения с течением времени меняют свой знак. Рост напряжений относительно упругого значения для данной задачи составляет около 450 % (см. рис. 5).

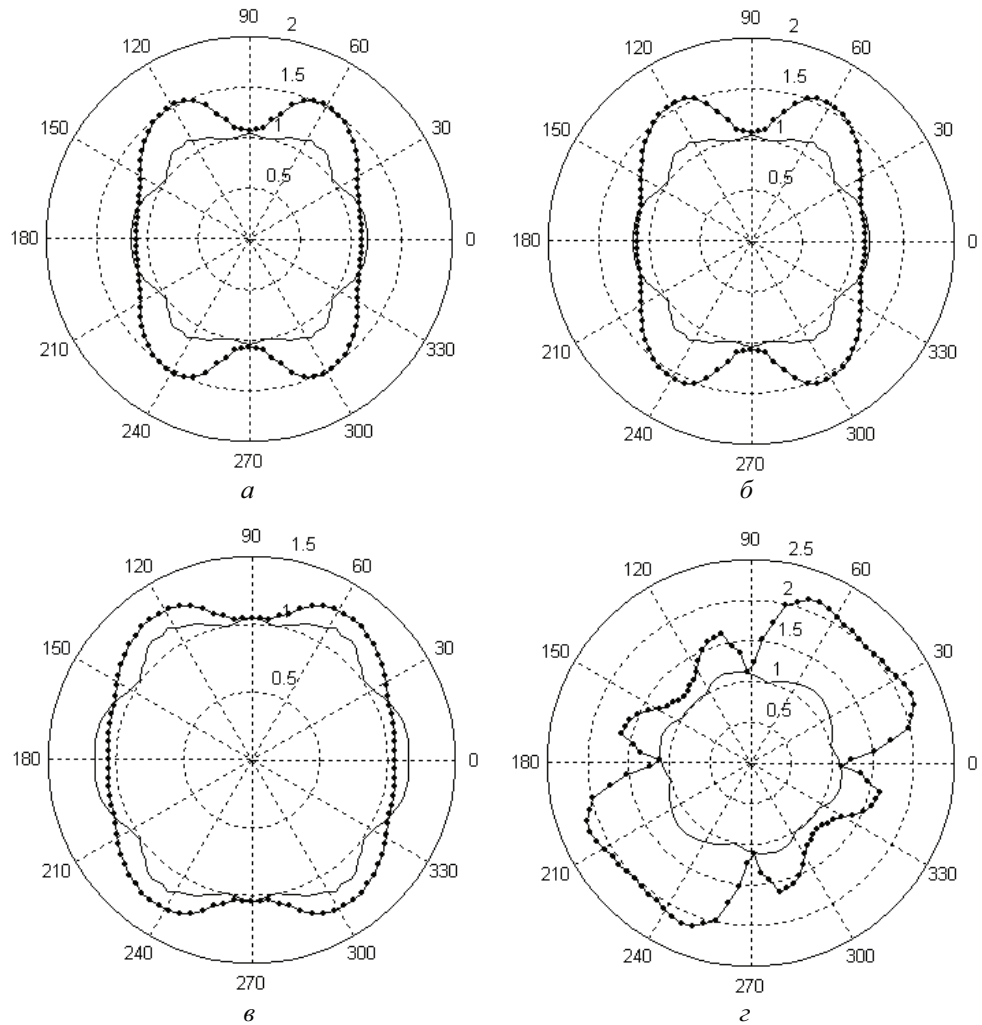


Рис. 4. Эпоры относительного напряжения σ_θ/p для задачи с жёстким включением

В отличие от задачи с отверстием, где на контуре отсутствует эффект перераспределения напряжений (σ_r и $\tau_{r\theta}$ равны нулю), для задачи с жёстким включением этот эффект имеет место. На рис. 6 приведены эпюры изменения по углу отношения радиальных напряжений σ_r/p для задач на растяжение пластинки под углом 0° (см. рис. 6, а) и 45° (см. рис. 6, б). Из рис. 6 видно, что при увеличении окружных напряжений (см. рис. 4, а, з) радиальные напряжения уменьшаются. Таким образом, в материале пластинки происходит перераспределение напряжений.

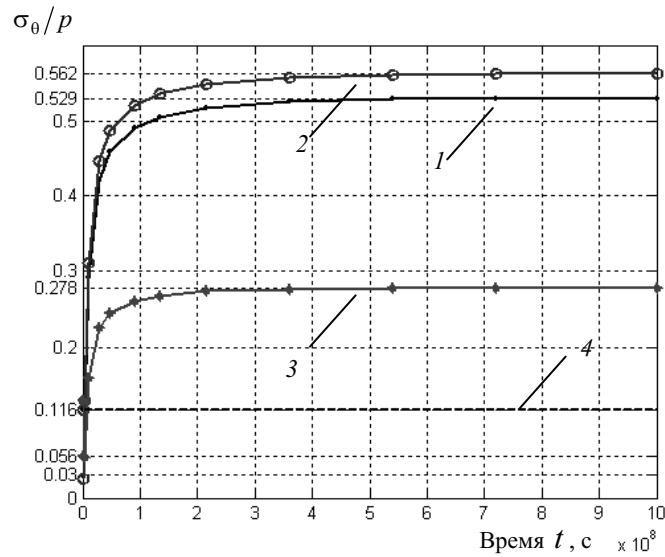


Рис. 5. Изменение относительного напряжения σ_0/p с течением времени

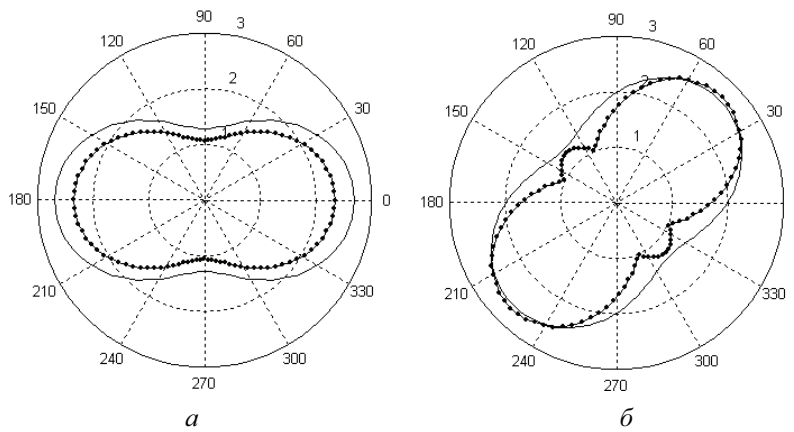


Рис. 6. Эпюры относительного напряжения σ_r/p для задачи с жёстким включением

Приведем результаты решения задачи о растяжении пластинки с упругим включением, физические соотношения для которого приведены в (4). На рис. 7 приведены эпюры для отношения σ_θ/p аналогично рис. 2 и 4. Видно, что перераспределение окружных напряжений у кромки включения невелико. Однако из рис. 7, в, видно, что при решении задачи с упругим включением использование описания всех операторов на основе одной функции приводит к значительному уменьшению окружных напряжений. С другой стороны, подобное уменьшение не наблюдается при решении задачи с использованием всех операторов. Следовательно, для данной задачи попытка аппроксимировать все операторы на основе одного не даёт качественно верного решения. Рис. 7, г показывает наличие заметного качественного и количественного изменения окружных напряжений возле кромки включения при растяжении пластинки под углом 45° .

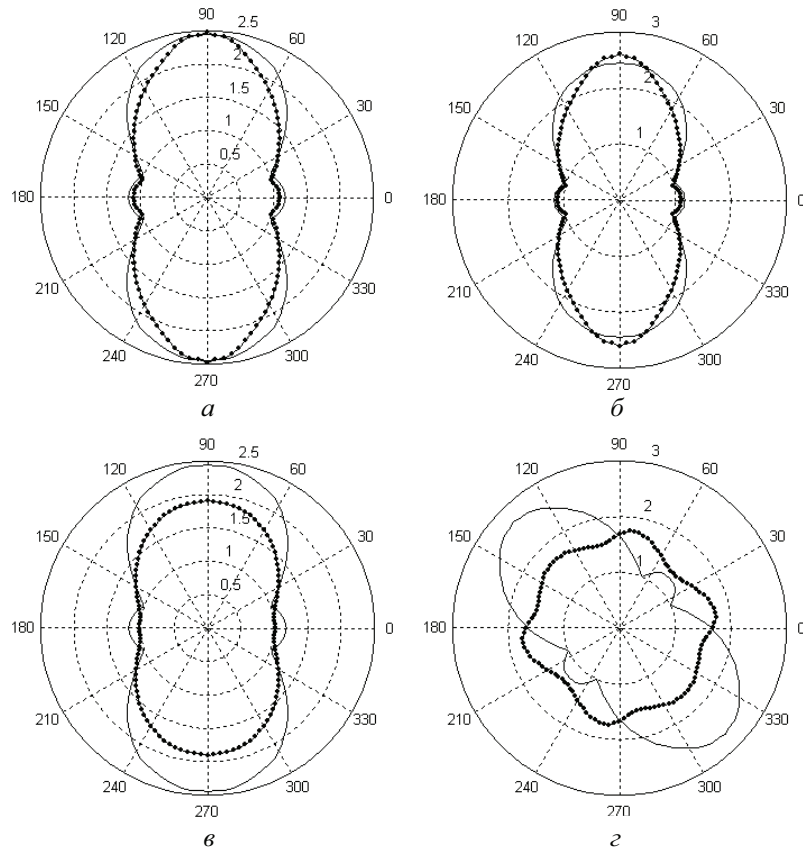


Рис. 7. Эпюры относительного напряжения σ_θ/p для задачи с упругим включением

Аналогично рис. 6 на рис. 8 изображены эпюры изменения по углу радиальных напряжений σ_r/p возле кромки упругого включения для задач на растяжение пластинки под углом 0° (см. рис. 8, а) и 45° (см. рис. 8, б). Рис. 8. показывает, что при уменьшении окружных напряжений (см. рис. 7 а, з) радиальные напряжения растут.

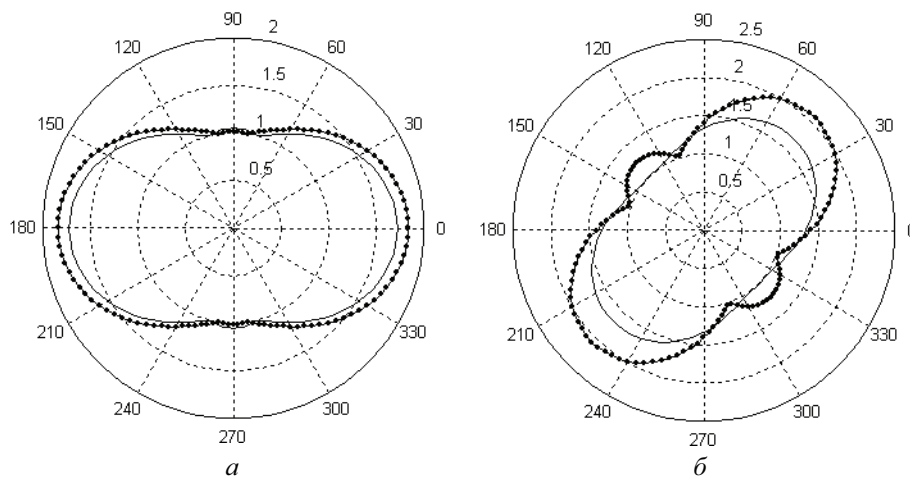


Рис. 8. Эпюры относительного напряжения σ_r/p для задачи с упругим включением

Таким образом, в рамках данной работы поставлена и решена задача линейной вязкоупругости для ортотропной пластинки с включением при различных гипотезах учета вязкоупругих свойств материала пластинки. Установлен эффект значительного перераспределения напряжений в материале пластинки возле кромки включений даже при постоянной внешней нагрузке. Попытка применения различных упрощающих гипотез при описании вязкоупругих свойств материала приводит к существенным отличиям от решений в общей постановке и даже к качественно неверным результатам.

Библиографический список

1. Брызгалин Г.И. К расчёту на ползучесть пластинок из стеклопластиков // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1963. – № 4. – С. 132–136.
2. Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А. Устойчивость при ползучести стеклопластиковых цилиндрических оболочек под длительным действием внешнего давления // Механика полимеров. – 1970. – № 1. – С. 81–85.

3. Туник А.Л., Екельчик В.С. Напряжённо-деформированное состояние ортотропной оболочки из стеклопластика с учётом ползучести материалов // *Механика полимеров*. – 1970. – № 3. – С. 525–555.

4. Коминар В.А., Малинин Н.И. Об устойчивости прямоугольной пластинки из ортотропного стеклопластика с учётом ползучести // *Вестник МГУ. Математика и механика*. – 1968. – № 1. – С. 69–74.

5. Долина Н.Н., Розовский М.И. Деформация цилиндра из композитного материала при разноползучести // *Теория механической переработки полимерных материалов: тезисы докл. всесоюз. симпозиума*. – Пермь, 1976. – С. 44–45.

6. Плуме Э.З. Сравнительный анализ ползучести однонаправленных композитов, армированных волокнами различного типа // *Механика композиционных материалов*. – 1985. – № 3. – С. 431–436.

7. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела: моногр. – М.: Наука, 1977, С. 157–200.

Получено 21.03.2011