

УДК 531/534: [57+61]

О ПРИЛОЖЕНИИ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ ОФТАЛЬМОЛОГИИ

Е. В. Краковская

Кафедра теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета, Россия, 198504, Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский проспект, 28, e-mail: krakovskaya_e@mail.ru

Аннотация. В работе исследуется снижение коэффициента запаса прочности роговицы после эксимерных лазерных операций (лазерного кератомилеза *in situ* и фоторефрактивной кератэктомии) и по поводу миопии и миопического астигматизма. Ранее при решении подобной задачи склера рассматривалась как значительно более жесткая оболочка, чем роговица, и поэтому роговица рассматривалась как жестко защемленная пологая оболочка. В данной работе задача о последствиях операций рефракционной хирургии рассматривается в более реалистичной постановке как задача о напряженно-деформированном состоянии двух сферических изотропных оболочек, сопряженных по окружности и находящихся под действием равномерно распределенного внутриглазного давления. Склера представляется незамкнутой однородной цилиндрической оболочкой. Напряженно-деформированное состояние оболочки находится на основе решения, полученного методом асимптотического интегрирования комплексных уравнений В. Новожилова. Сопряженная со склерой роговица рассматривается как изотропная пологая оболочка другого радиуса. Напряженно-деформированное состояние роговицы найдено с помощью решения комплексных уравнений пологих оболочек, полученных А. Назаровым. Приводится анализ характеристик роговицы при повышенном внутриглазном давлении до и после операции. Рассматривается влияние склеральной оболочки на прогиб решетчатой пластинки глаза при глаукоме. Решение показывает, что влияние склеры приводит к изменению максимальных прогибов на 4-5 %.

Ключевые слова: биомеханика глаза, внутриглазное давление, глаукома, решетчатая пластина, лазерные операции по поводу миопии, напряженно-деформированное состояние, роговица, склера.

В настоящее время широко распространенными рефракционными операциями по поводу миопии и миопического астигматизма являются операции лазерного кератомилеза *in situ* и фоторефрактивной кератэктомии [1]. В результате этих операций меняются толщина и кривизна роговицы. В связи с этим представляет интерес вопрос об изменении напряженно-деформированного состояния роговицы после указанных операций. В работе [2] этот вопрос исследовался в предположении, что склера является значительно более жесткой, чем роговица, и, таким образом, роговица рассматривалась как жестко защемленная пологая оболочка. Однако в литературе имеются разные

данные о соотношении модулей упругости склеры и роговицы. Например, в работе [3] полагается, что $E_1 / E_2 = 5$, а в работе [4] выявлено, что $E_1 / E_2 = 3$.

С точки зрения механики задача о последствиях операций рефракционной хирургии и изменении прочности роговицы при различных соотношениях E_1 / E_2 моделируется как задача о напряженно-деформированном состоянии двух сферических изотропных оболочек, сопряженных по окружности, находящихся под действием равномерно распределенного внутреннего давления.

Склера представляется незамкнутой однородной сферической оболочкой. Напряженно-деформированное состояние оболочки найдено на основе решения, полученного методом асимптотического интегрирования комплексных уравнений В.В. Новожилова [5]:

$$\begin{aligned}
 w^{(1)} &= \frac{R_1}{E_1 h_1} (A \cos \beta_1 - B \sin \beta_1) e^{-\beta_1} + \frac{R_1^2 q (1 - \mu_1)}{2 E_1 h_1}, \\
 N_1^{(1)} &= -\sqrt{\frac{c_1}{2 R_1}} \operatorname{ctg} \theta ((A - B) \cos \beta_1 - (A + B) \sin \beta_1) e^{-\beta_1} + \frac{q R_1}{2}, \\
 N_2^{(1)} &= (A \cos \beta_1 - B \sin \beta_1) e^{-\beta_1} + \frac{q R_1}{2}, \\
 M_2^{(1)} &= \mu_1 M_1^{(1)}; \quad M_1^{(1)} = -c_1 (B \cos \beta_1 + A \sin \beta_1) e^{-\beta_1}, \\
 Q_1^{(1)} &= -\sqrt{\frac{c_1}{2 R_1}} ((A - B) \cos \beta_1 - (A + B) \sin \beta_1) e^{-\beta_1}, \\
 \mathfrak{G}^{(1)} &= \frac{1}{E_1 h_1} \sqrt{\frac{R_1}{2 c_1}} ((A + B) \cos \beta_1 + (A - B) \sin \beta_1) e^{-\beta_1}; \quad u^{(1)} = C \sin \theta, \\
 \beta_1 &= \sqrt[4]{3(1 - \mu_1^2)} \sqrt{\frac{R_1}{h_1}} (\theta - \theta_0), \\
 c_1 &= \frac{h_1}{\sqrt{12(1 - \mu_1^2)}}, \tag{1}
 \end{aligned}$$

где $w^{(1)}$ – прогиб оболочки, $N_1^{(1)}, N_2^{(1)}$ – усилия, $M_1^{(1)}, M_2^{(1)}$ – моменты, возникающие в оболочке, $Q_1^{(1)}, \mathfrak{G}^{(1)}, u^{(1)}$ – перерезывающая сила, угол поворота и перемещение оболочки, соответственно. Верхний индекс указывает на принадлежность к склере. θ – угол, образуемый нормалью к срединной поверхности с осью оболочки, θ_0 – угол, определяющий край оболочки; h_1, E_1, R_1, μ_1 – толщина, модуль упругости, радиус, коэффициент Пуассона склеры, соответственно; q – внутриглазное давление; A, B, C – константы интегрирования.

Сопряженная со склерой роговица рассматривается как полая однородная изотропная оболочка другого радиуса. Напряженно-деформированное состояние роговицы найдено с помощью решения комплексных уравнений пологих оболочек, полученных А.А. Назаровым [6]:

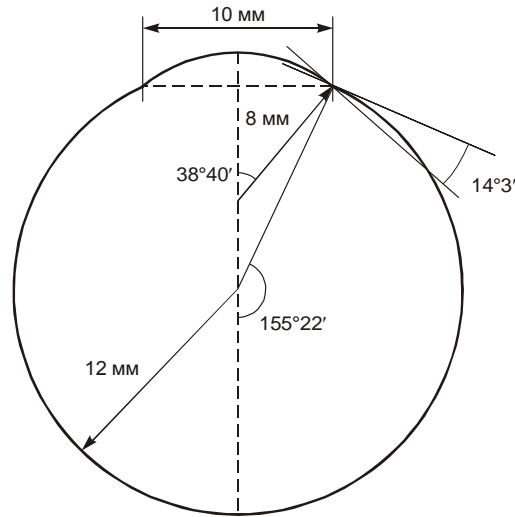


Рис. 1. Схематическое сопряжение роговицы и склеры

$$\begin{aligned}
 w^{(2)} &= C_1 + A_1 I_1 + B_1 I_2, \\
 N_1^{(2)} &= \frac{q}{4f} + \frac{2f E_2 h_2}{\alpha} (B_1 I_1' + A_1 I_2'), \\
 N_2^{(2)} &= \frac{q}{2f} - N_1^{(2)} - 2f E_2 h_2 (A_1 I_1 + B_1 I_2), \\
 M_1^{(2)} &= \frac{D}{k^2} (A_1 (I_2 + \frac{1-\mu_2}{\alpha} I_1') - B_1 (I_1 - \frac{1-\mu_2}{\alpha} I_2')), \\
 M_2^{(2)} &= \frac{D(1+\mu_2)}{k^2} (A_1 I_2 - B_1 I_1) - M_1^{(2)}, \\
 Q_1^{(2)} &= \frac{D}{k^3} (A_1 I_2' - B_1 I_1'), \quad \vartheta^{(2)} = -\frac{1}{k} \frac{dw^{(2)}}{d\alpha} + \frac{u^{(2)}}{R_2}, \\
 u^{(2)} &= \frac{(1-\mu_2)k q \alpha}{4f E_2 h_2} + 2f k (1+\mu_2) \left(\frac{C_1}{1+\mu_2} \alpha + A_1 I_2' - B_1 I_1' \right), \\
 k^2 &= \frac{h_2}{4f \sqrt{3(1-\mu^2)}}, \quad f = \frac{1}{2R}, \quad D = \frac{E_2 h_2^3}{12(1-\mu^2)}, \quad r = k\alpha,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где I_1, I_2, I_1', I_2' – значения действительной, мнимой составляющей функций Бесселя нулевого порядка и их производные, соответственно, h_2, E_2, R_2, μ_2 – толщина, модуль упругости, радиус, коэффициент Пуассона роговицы, соответственно, r – полярная координата, D – жесткость на изгиб, q – равномерно распределенное внутриглазное давление.

На линии сопряжения оболочек выполняется шесть условий непрерывности перемещений, момента, усилий и угла поворота [7]:

$$\begin{aligned}
 u^{(1)} &= u^{(2)} \cos \gamma - w^{(2)} \sin \gamma, & N_1^{(1)} &= N_1^{(2)} \cos \gamma - Q_1^{(2)} \sin \gamma, \\
 w^{(1)} &= w^{(2)} \cos \gamma + u^{(2)} \sin \gamma, & Q_1^{(1)} &= Q_1^{(2)} \cos \gamma + N_1^{(2)} \sin \gamma, \\
 M_1^{(1)} &= M_1^{(2)}, & \vartheta^{(1)} &= \vartheta^{(2)},
 \end{aligned} \tag{3}$$

где γ – угол между касательными к оболочкам 1 и 2 (рис. 1).

Таким образом, аналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии сопряженных сферических оболочек может быть найдено с помощью систем (1), (2) и (3). Постоянная C в системе (1) фиксирует начало отсчета осевого смещения. В нашем случае $C = 0$.

В среднем радиус склеры – 12 мм, роговицы – 8 мм, толщина склеры – 0,5 мм, коэффициент Пуассона – 0,4 для склеры и 0,45 для роговицы, модуль Юнга склеры – 14,3 МПа [8]. Расчеты проводились для различных значений внутриглазного давления. Известно, что после операций фотореактивной кератэктомии уменьшается кривизна роговицы при увеличении ее толщины. Операция лазерного кератомилеза *in situ* основана на уменьшении толщины роговицы.

Основные растягивающие напряжения роговицы при воздействии на нее внутриглазного давления (q) равны $\sigma_p = \frac{qR_2}{2h_2}$. Изгибающее усилие рассчитывается при

максимальном моменте, возникающем в оболочке: $\sigma_{из} = \frac{6M_{max}}{h_2^2}$. По сумме напряжений

$\sigma_{из}$ и σ_p можно оценить запас прочности роговицы $\eta = \frac{\sigma_*}{\sigma_{из} + \sigma_p}$. Разрушающие

напряжения для роговицы лежат в диапазоне $\sigma_* = 5,38 \div 9,79 \cdot 10^6 \frac{Н}{м^2}$.

В таблице 1 приведены характеристики, полученные для роговицы при повышенном внутриглазном давлении 40 мм рт.ст., до и после операции лазерного кератомилеза *in situ*. Видно, что при уменьшении толщины роговицы на 0,1 мм после операции лазерного кератомилеза *in situ* коэффициент запаса прочности в среднем понижается на 13,95 %.

Отметим, что при моделировании последствий операции фотореактивной кератэктомии радиус кривизны роговицы уменьшался на 1 мм, а толщина увеличивалась на 0,1 мм, в результате при расчете задачи для разных значений модуля упругости роговицы максимальный абсолютный прогиб в центре оболочки понижается в среднем на 39 %. Все расчеты проводились в программе *Mathematica 5.1*.

Таблица 1

Характеристики роговицы до и после операции лазерного кератомилеза *in situ* при внутриглазном давлении 40 мм рт. ст.

Толщина роговицы	$h = 0,52$ мм			$h = 0,42$ мм			η_1 / η_2
	$w_{max}^{(2)}, 10^{-6}$ м	$\sigma_{из}, \frac{Н}{м^2}$	η_1	$w_{max}^{(2)}, 10^{-6}$ м	$\sigma_{из}, \frac{Н}{м^2}$	η_2	
$E_2 = \frac{E_1}{10}$	93,36	16930	134,49	113,38	18408	114,53	1,173
$E_2 = \frac{E_1}{5}$	46,42	15560	139,23	56,36	16602	119,11	1,168
$E_2 = \frac{E_1}{3}$	27,80	15208	140,54	33,47	14960	123,59	1,137

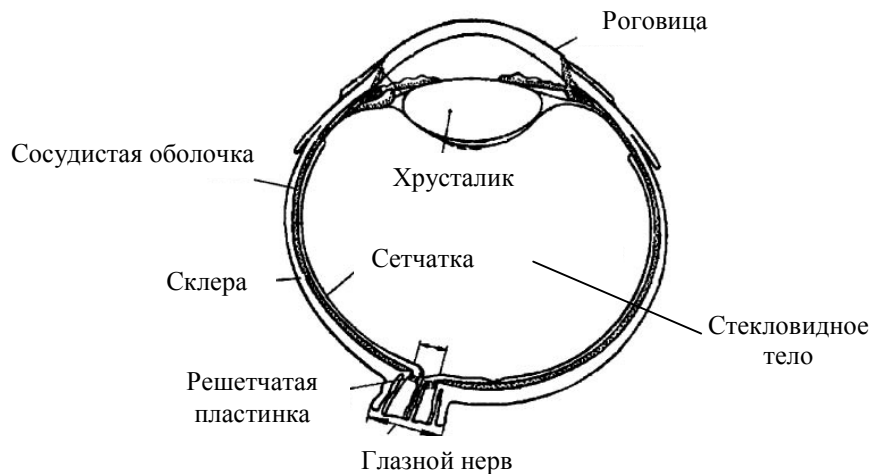


Рис. 2. Строение глаза

Аналогичная математическая постановка позволяет описать деформацию решетчатой пластинки глаза при глаукоме.

Известно, что атрофия зрительного нерва при глаукоме происходит именно в области решетчатой пластинки глаза в результате ее деформации, если отношение внутриглазного и внутричерепного давлений увеличивается по сравнению с нормальным для конкретного пациента значением.

Решетчатая пластинка представляет собой часть склеры недалеко от заднего полюса, где оболочка становится существенно тоньше и имеет множество мелких отверстий, через которые проходит зрительный нерв (рис. 2). Таким образом, модуль упругости решетчатой пластинки значительно меньше модуля упругости для склеры и можно положить $E_1 / E_2 = 10$.

Было бы легче рассмотреть решетчатую пластинку отдельно, чтобы учесть ее анизотропию и неоднородность, как рассмотрено в задаче [8]. Однако решетчатая пластинка является частью склеры, поэтому интересно учесть влияние на поведение пластинки растягивающей силы, действующей со стороны склеральной оболочки глаза. Решетчатая пластинка предполагается однородной и изотропной.

В настоящей работе проводится сравнение аналитических решений задачи о деформации составной оболочки (склеры и решетчатой пластинки) и отдельно задачи о деформации решетчатой пластинки под действием нормального давления. Изучается влияние увеличения внутриглазного давления на диаметр склерального кольца, а также влияние деформации сферической оболочки глаза на величину прогиба решетчатой пластинки. В задаче о сопряженных оболочках решетчатая пластинка считается полой оболочкой того же радиуса, что и склера. Ранее подобная задача рассматривалась в прикладном пакете *Adina*, поэтому представляет интерес сравнение аналитических и численных результатов [9].

В таблице 2 представлены значения прогибов решетчатой пластинки как полой оболочки (w_1) с жесткой заделкой, когда $u|_{r=a} = 0, w|_{r=a} = 0, w'|_{r=a} = 0$, пластины (w_2) с жесткой заделкой, а также в сопряжении со склерой (w_3). Для последнего случая найдены изменения радиуса склерального кольца для различных величин внутриглазного давления, $r = \Delta_x = w_3 \cdot \sin \theta_0$.

Толщина решетчатой пластинки принималась в расчетах 0,25 мм, модуль Юнга 1,43 МПа, основание пластинки 2 мм, радиусы кривизны оболочек 12 мм, коэффициент Пуассона 0,45, толщина склеры 1 мм.

Таблица 2

Характеристики решетчатой пластинки при повышенном внутриглазном давлении в разных постановках задачи

q , мм рт.ст.	15	30	40	50	60	80
w_1 , мм 10^{-3}	13,05	26,1	34,8	43,05	52,21	69,61
w_2 , мм 10^{-3}	13,38	26,76	35,68	44,6	53,53	71,36
w_3 , мм 10^{-3}	13,65	27,3	36,4	45,51	54,61	72,8
Δr , мм 10^{-3}	1,13	2,27	3,03	3,79	4,55	6,06

Сравнение результатов, полученных для составных оболочек и упрощенной модели, показывает, что разница в значениях максимальных прогибов 4,39-5,40 %, а изменение радиуса склерального кольца существенно меньше прогибов и им можно пренебречь. Таким образом, деформацию решетчатой пластинки, по-видимому, можно изучать отдельно от деформации склеральной оболочки.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 04-01-00258.

Список литературы

1. *Балашевич, Л.Т.* Рефракционная хирургия. Учебное пособие для клинических ординаторов и врачей / Л.Т. Балашевич. – СПб., 1990.
2. *Бауэр, С.М.* Об изменении прочности роговицы после эксимерных лазерных операций по поводу миопии / С.М. Бауэр, Б.А. Зимин, М.В. Федорченко, Л.И. Балашевич, А.Б. Качанов // Биомеханика глаза: сб. трудов III семинара, Московский НИИ глазных болезней им. Гельмгольца, 2002. – С. 55-60.
3. *Srodka, W.* Influence of IOP on the geometrical and biomechanical properties of the linear model of the eye globe – effect of the optical selfadjustment / W. Srodka, M. Asejczyk, H. Kasprzak // Proceedings of 13th Conference of the European Society of Biomechanics. – 2002. – P. 723.
4. *Iomdina, E.N.* A comparative study of biomechanical properties of the cornea and sclera / E.N. Iomdina // Proceedings of the Congress of the European Society of Biomechanics. – 2002. – P. 394.
5. *Новожилов, В. В.* Теория тонких оболочек / В.В. Новожилов. – Ленинград, 1962.
6. *Назаров, А. А.* Основы теории и методы расчета пологих оболочек / А.А. Назаров. – Л., 1966.
7. *Филиппов, С. Б.* Теория сопряженных и подкрепленных оболочек / С.Б. Филиппов. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 1999.
8. *Бауэр, С. М.* Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии / С.М. Бауэр, Б.А. Зимин, П.Е. Товстик. – СПб., 2000.
9. *Bauer, S.M.* On formulation of the problem on deformation of the Lamina Cribrosa / S.M. Bauer, A.A. Romanova, A.L. Smirnov // Russian Journal of Biomechanics. – 2001. – Vol. 5, No.3. – P. 18-22.

ON APPLICATION OF THE SHELL THEORY TO SOME PROBLEMS IN OPHTHALMOLOGY

E. V. Krakovskaya (Saint-Petersburg, Russia)

In this paper the decreasing of the cornea safety margin after excimer laser corrective surgery (laser keratomileusis *in situ* and photorefractive keratoectomy) concerning myopia and astigmatism of myopia is investigated. Earlier this question was considered on the assumption that the sclera is substantially more rigid shell than the cornea. Thus the cornea was considered as a shallow clamped shell. In given paper problem of consequences of operations of refractive surgery is considered in more realistic statement as a problem on stress-strain state of two spherical circle conjugated isotropic shells which are under the action of uniformly distributed intraocular pressure. The sclera is represented by an unclosed uniform spherical shell. Stress-strain state of the shell was obtained by the asymptotic investigation of complex equation of V. Novogilov. The cornea connected with the sclera is considered as a shallow isotropic uniform shell of another radius. The stress-strain state of the cornea was obtained by means of shallow shells complex equations of A. Nazarov. The obtained characteristics are presented for the cornea at increased intraocular pressure before and after operation. Influence of the sclera on deformation of the Lamina Cribrosa at glaucoma is also studied. The solution shows that the sclera action brings about change of maximal deflection for 4-5 %.

Key words: eye biomechanics, intraocular pressure, glaucoma, lamina cribrosa, laser operations concerning myopia, stress-strain state, cornea, sclera.

Получено 27 декабря 2005