

УДК 531/534: [57+61]

ИМПУЛЬСНАЯ СМАЗКА В ТАЗОБЕДРЕННОМ СУСТАВЕ ДЛЯ ГИПОУПРУГОЙ МОДЕЛИ ХРЯЩА

К. Вежхольский

Base Technique Department, Maritime University of Gdynia, Morskastr. 83, PL-81-225 Gdynia, Poland,
e-mail: wierzch@am.gdynia.pl

Кафедра основ техники, Морской университет, Гдыня, Польша

Faculty of Ocean Engineering and Ship Technology, Technical University Gdańsk, Narutowicza 11, 80-952,
Gdańsk, Poland

Факультет морского строительства и кораблестроения, Технический университет, Гданьск, Польша

Аннотация. Гипоупругая модель поверхности хряща в тазобедренном суставе человека используется в данной работе для внезапных изменений параметров смазки после травмы. Известно, что в течение нескольких микросекунд после травмы распределенное давление и нагрузка, а также сила трения и коэффициент трения существенно уменьшаются или увеличиваются свои значения. Эти изменения очень трудно измерить, поэтому так важно соответствующее численное исследование в этой области. Для получения численных результатов в данной работе предлагается исследование поведения зазора сустава для гипоупругого хряща.

Ключевые слова: импульсивное нагружение тазобедренного сустава, гипоупругая модель хряща.

1. Введение

Хрящ суставного соединения состоит из биологической жидкой фазы и твердого скелета. В данной статье описано влияние нелинейных двухфазных деформаций хряща на распределение параметров в тазобедренном суставе человека после травмы. Твердый скелет моделируется как трансверсально изотропный гипоупругий материал. Теория гипоупругости была сформулирована Трусделлом [24]. Бернштейн [1] и другие исследователи показали, что гипоупругость есть наиболее общая форма упругости. В статьях, упомянутых в списке литературы, не представлена проблема смазки в тазобедренном суставе человека после травмы для гипоупругой деформации хряща [2, 4-7, 11, 14-18, 21, 25, 26, 32]. Значения нагрузки, полученные после травмы в тазобедренном суставе человека в гипоупругом деформируемом хряще, очень часто имеют решающее значение для дальнейшего развития болезни или повреждаемости сустава. Поэтому геометрические изменения гипоупругого слоя хряща необходимы в дальнейшем анализе и дальнейшей терапии сустава. Сосредоточенная нагрузка P , приложенная на внешней поверхности сустава, вызывает деформацию гипоупругого слоя и изменяет высоту зазора сустава. В данной работе предполагается, что полубесконечная область занята средой из гипоупругой ткани. Так как точка приложения нагрузки является сингулярной точкой при решении уравнений, то в

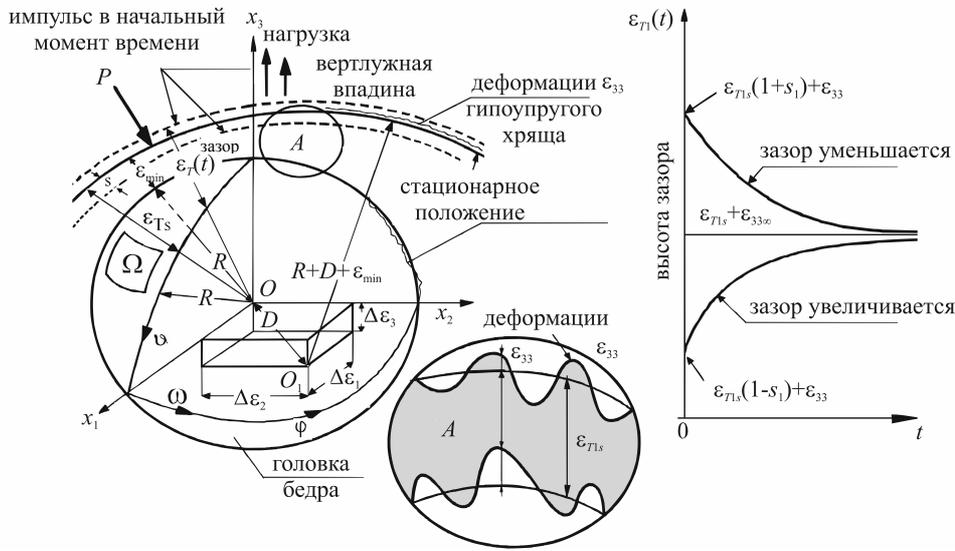


Рис.1. Область смазки, эксцентриситеты, изменения высоты зазора по времени после травмы

данной статье эта точка удалена из области путем введения полусферы малого радиуса и рассмотрения полубесконечной области, ограниченной полусферой и плоскостью. Если приложенная сосредоточенная сила P не велика, то деформации гипопруого хряща сустава создают малые изменения высоты зазора в тазобедренном суставе человека. Если сосредоточенная сила достаточно велика, то имеются значительные деформации гипопруого хряща (см. головку кости на рис. 1). Случайные изменения поверхностей сустава в этой статье не рассматриваются. Неровности используемых поверхностей хряща измерены экспериментально.

2. Управляющие уравнения и деформации высоты зазора

Слой деформированного хряща находится между головкой и костной чашечкой. Деформации хряща на головке и чашечке изменяют значения высоты зазора. Течение синовиальной жидкости внутри зазора сустава описывается уравнениями изменения количества движения и уравнением неразрывности. Эти уравнения и аппроксимация второго порядка общего определяющего соотношения, предложенные Ривлином и Эриксоном, можно записать в следующей форме [22, 23, 29]:

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{S} = -p\mathbf{I} + \eta_0 \mathbf{A}_1 + \alpha (\mathbf{A}_1)^2 + \beta \mathbf{A}_2, \quad (1)$$

где \mathbf{S} – тензор напряжений, p – давление, \mathbf{I} – единичный тензор, \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 – два первых тензора Ривлина-Эриксона, η , α , β – три материальных константы синовиальной жидкости, где η обозначает вязкость. Тензоры \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 даются симметричными матрицами, определенными в виде [20, 30]:

$$\mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{L} + \mathbf{L}^T, \mathbf{A}_2 \equiv \operatorname{grad} \mathbf{a} + (\operatorname{grad} \mathbf{a})^T + 2\mathbf{L}^T \mathbf{L}, \mathbf{a} \equiv \mathbf{L}\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad (2)$$

где \mathbf{L} – тензор градиента вектора скорости жидкости с^{-1} , \mathbf{L}^T – транспонированная матрица градиента вектора скорости в с^{-1} , \mathbf{v} – скорость в м/с , t – время в с , \mathbf{a} – вектор ускорения в м/с^2 .

Предполагается, что произведение чисел Деборы и Строухала, то есть $\text{De} \cdot \text{Str}$, и произведение числа Рейнольдса, безразмерного зазора и числа Строухала, то есть $\text{Re} \cdot \psi \cdot \text{Str}$, имеют одинаковый порядок. Кроме того, $\text{De} \cdot \text{Str} \gg A_\alpha \equiv \alpha \omega \eta_0$, где ω – угловая скорость головки кости. Дополнительно предполагается: вращательное движение головки кости человека с окружной скоростью $U = \omega R$, несимметричное течение синовиальной жидкости в зазоре, вязкоупругие и нестационарные свойства синовиальной жидкости, постоянное значение плотности синовиальной жидкости ρ , характеристическое значение высоты зазора тазобедренного сустава ε_0 , отсутствует скольжение на поверхностях кости, R – радиус головки кости [27-31]. Мы предполагаем зависимости между размерными и безразмерными величинами в следующей форме:

$$\begin{aligned} r &= \varepsilon_0 r_1, \quad \vartheta = R \vartheta_1, \quad t = t_0 t_1, \quad \varepsilon_T = \varepsilon_0 \varepsilon_{T1}, \quad v_\varphi = U v_{\varphi 1}, \\ v_r &= U \psi v_{r1}, \quad v_\vartheta = U v_{\vartheta 1}, \quad p = p_0 p_1, \quad p_0 = \frac{U \eta_0 R}{(\varepsilon_0)^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

число Рейнольдса, модифицированное число Рейнольдса, число Строухала и число Деборы имеют вид:

$$\text{Re} = \frac{\rho U \varepsilon_0}{\eta}, \quad \text{Re} \cdot \psi = \frac{\rho \omega (\varepsilon_0)^2}{\eta_0}, \quad \text{Str} = \frac{R}{U t_0}, \quad \text{De} = \frac{\beta U}{\eta_0 R}, \quad (4)$$

$$\text{De} \cdot \text{Str} = \frac{\beta}{\eta_0 t_0}, \quad \text{Re} \cdot \psi \cdot \text{Str} = \frac{\rho (\varepsilon_0)^2}{\eta_0 t_0}. \quad (5)$$

Для синовиальной жидкости верно неравенство $0 < \beta/t_0 < \eta_0$ и значения псевдовязкости β имеют в основном значения от 0,0000001 до 0,001 $\text{Па} \cdot \text{с}^2$. Безразмерные символы имеют нижний индекс 1. Пренебрегая членами радиального зазора $\psi = \varepsilon_0/R \approx 10^{-3}$ в управляющих уравнениях в сферических координатах: φ , r , ϑ и учитывая указанные допущения, получим [22]:

$$\text{Re} \cdot \psi \cdot \text{Str} \frac{\partial v_{\varphi 1}}{\partial t_1} = -\frac{1}{\sin \vartheta_1} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r_1} \left(\frac{\partial v_{\varphi 1}}{\partial r_1} \right) + \text{De} \cdot \text{Str} \frac{\partial^3 v_{\varphi 1}}{\partial t_1 \partial r_1^2}, \quad (6)$$

$$0 = \frac{\partial p_1}{\partial r_1}, \quad (7)$$

$$\text{Re} \cdot \psi \cdot \text{Str} \frac{\partial v_{\vartheta 1}}{\partial t_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial \vartheta_1} + \frac{\partial}{\partial r_1} \left(\frac{\partial v_{\vartheta 1}}{\partial r_1} \right) + \text{De} \cdot \text{Str} \frac{\partial^3 v_{\vartheta 1}}{\partial t_1 \partial r_1^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_{\varphi 1}}{\partial \varphi} + \sin(\vartheta_1) \frac{\partial v_{r1}}{\partial r_1} + \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} [v_{\vartheta 1} \sin(\vartheta_1)] = 0, \quad (9)$$

где: $0 \leq \varphi \leq 2\pi\theta_1$, $0 \leq \theta_1 \leq 1$, $\pi/8 \leq \vartheta_1 \leq \pi/2$, $0 \leq r_1 \leq \varepsilon_{T1}$, ε_{T1} – безразмерная полная высота зазора.

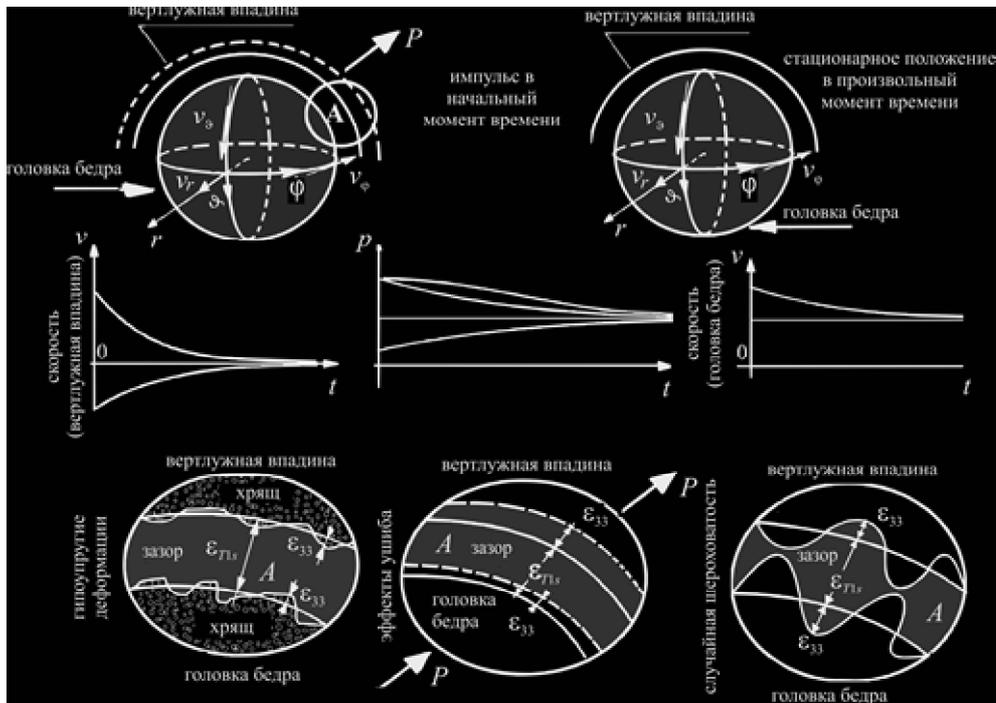


Рис. 2. а) положение в стационарном и импульсивном движении, б) рисунки давления и скорости синовиальной жидкости в зависимости от времени, в) гипоупругие деформации, влияние травмы, случайная шероховатость

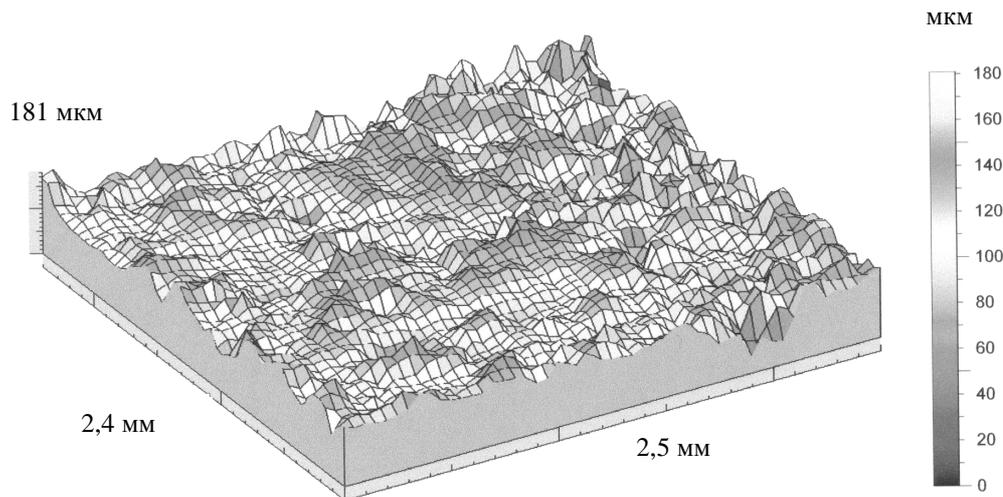


Рис. 3. Поверхность использованного суставного хряща головки кости с гипоупругими деформациями около 181 микрона, измеренными с использованием механического сенсора для образца 2,5 мм × 2,4 мм

Символы $v_{\phi 1}$, v_{r1} , $v_{\theta 1}$ означают безразмерные компоненты скорости синовиальной жидкости в окружном, высотах зазора и меридиональном направлениях по отношению к головке кости, соответственно.

Пространство зазора сустава для импульса в начальный момент времени и пространство зазора в бесконечное время после импульса представлены на рис. 2а. Рисунок зависящих от времени скорости и давления представлен на рис. 2б.

Безразмерная высота зазора ε_{T1} зависит от переменных φ , ϑ и времени t и состоит из двух частей [1, 3, 8, 9, 33]:

$$\varepsilon_{T1} = \varepsilon_{T1s}(\varphi, \vartheta) + \varepsilon_{33}(t), \quad (10)$$

где ε_{T1s} означает полную безразмерную часть геометрии тонкого слоя жидкости без деформаций, ε_{33} означает коррекцию безразмерной высоты зазора, вызванную гипопругой деформацией хряща.

Коррекция высоты зазора, вызванная гипопругой деформацией, зависит от вида и шероховатости поверхности хряща, а также от толщины хряща. Эти коррекции определяются на основе сравнения между экспериментами автора и Доусона и Моу [2, 15, 21], рис. 2в, 3, 4. Экспериментальные значения автора для гипопругих деформаций изучаемого тазобедренного сустава человека получены с помощью микросенсорного лазера в аппарате *Rank-Taylor-Hobson-Talyscan-150* и исследованы с помощью компьютерных программ *Talymap Expert* и *Microsoft Exel Computer Program* для поверхности образца (2,5 мм × 2,4 мм). Толщина слоя хряща флюктуирует от 181 до 241 микрона (см. рис. 3, 4).

3. Деформация гипопругого хряща

Соответствующее описание высоты зазора сустава человека зависит от напряжений, существующих в граничном слое, и от деформации гипопругого хряща. Поэтому они определяются эффективным модулем Юнга и эффективными напряжениями внутри гипопругого хряща под действием быстро меняющейся нагрузки. Напряженное состояние описывается с помощью модели гипопругости. В рамках этой модели скорость действительных напряжений зависит от скорости деформаций γ_{kn} в соответствии с уравнениями [1, 8, 15, 23]:

$$\frac{d\tau_{ij}}{dt} = C_{ijkn} \gamma_{kn}, \quad (11)$$

где C_{ijkn} (с индексами $i, j, k, n=1, 2, 3$) – компоненты гипопругого тензора, t – время.

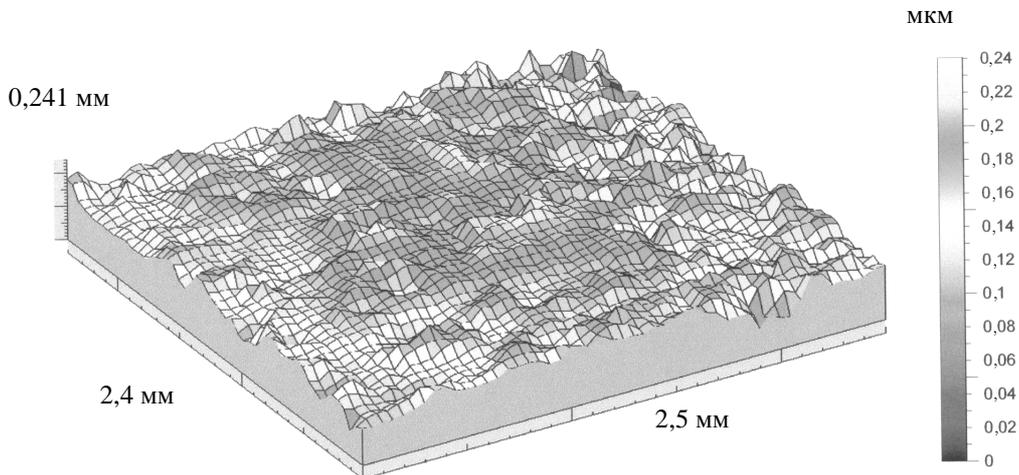


Рис. 4. Поверхность использованного суставного хряща головки кости с гипопругими деформациями около 241 микрона, измеренные с использованием механического сенсора для образца 2,5 мм × 2,4 мм

По Бернштейну [1] уравнения гипотезы упругости эквивалентны уравнениям для упругих материалов Коши [8, 9, 10, 24], а именно:

$$\frac{d\tau_{ii}}{dt} = C_{iikk} \gamma_{kk}. \quad (12)$$

Для плоской задачи растяжения и движения с ускорением компоненты скорости w_k в направлении k ($x_1 = R\phi$, $x_2 = r$, $x_3 = R\theta$) внутри пористого хряща описываются следующими соотношениями [3, 10, 19]:

$$w_k = \kappa_k x_k (\lambda_k)^{-1} \text{ для } \lambda_k = 1 + \kappa_k t, \quad (13)$$

где κ_k экспериментальная размерная константа (c^{-1}) и правило суммирования не имеет места. Дифференцирование уравнений (13) относительно пространственных координат дает выражение для скорости деформации:

$$\gamma_{kk} = \frac{dw_k}{dx_k} = \frac{\kappa_k}{\lambda_k}, \quad (14)$$

где $k=1, 2, 3$; λ_k – безразмерные растяжения в направлениях 1, 2, 3, соответственно, и в уравнении (14) правило суммирования также не применяется.

Вследствие (12) и (14) после интегрирования по времени t можно получить нормальные компоненты тензора напряжений Коши, которые представляют собой эффективные напряжения в твердом скелете хряща в соответствующей форме [8]:

$$\tau_{11s} = C_{1111} \ln \lambda_1 + C_{1122} \ln \lambda_2 + C_{1133} \ln \lambda_3, \quad (15)$$

$$\tau_{22s} = C_{2211} \ln \lambda_1 + C_{2222} \ln \lambda_2 + C_{2233} \ln \lambda_3, \quad (16)$$

$$\tau_{33s} = C_{3311} \ln \lambda_1 + C_{3322} \ln \lambda_2 + C_{3333} \ln \lambda_3, \quad (17)$$

вследствие свойств симметрии имеют место соотношения: $C_{2211}=C_{1122}$, $C_{3311}=C_{1133}$, $C_{3322}=C_{2233}$. Компоненты τ_{iis} представляют эффективные напряжения в твердом скелете хряща. Полные напряжения в хряще могут быть получены путем добавления полного давления p_Σ , то есть:

$$\tau_{ii} = -p_\Sigma + \tau_{iis}, \quad p_\Sigma = p_s + p, \quad (18)$$

где полное давление p_Σ есть сумма давления p_s , необходимого для обеспечения свободной от напряжений боковой поверхности, и гидродинамического давления p . Хрящ человека предполагается трансверсально изотропным с плоскостью изотропии (1-2), параллельной поверхности хряща и перпендикулярной к оси нагружения (ось 3). При такой симметрии имеют место соотношения: $C_{1133}=C_{2233}$ и $C_{1111}=C_{2222}$.

Инженерными константами для твердого скелета являются модуль упругости Юнга E_{11s} в плоскости изотропии, E_{33s} в направлении нормали к плоскости изотропии, то есть в направлении действия силы, и модуль сдвига G_{13} . Кроме того, рассматривается коэффициент Пуассона ν_{31s} , связывающий деформацию в плоскости (1-2) и деформацию по нормали к ней, а также коэффициент Пуассона ν_{12s} в плоскости (1-2). Направление 3 считается перпендикулярным поверхности хряща. Следуя работе Гарсиа, Альтиеро и Хаута [8], в данной работе значения модулей Юнга E_{33s} и E_{11s} хрящевого скелета человека приняты в диапазоне 1,0 – 5,0 МПа. Модуль сдвига хряща

человека принимает значение от 0,10 МПа до 0,20 МПа. Коэффициенты Пуассона ν_{31s} и ν_{12s} для нормального хряща человека имеют значение от 0,15 до 0,20.

В состоянии равновесия давление жидкости в пористой среде равно нулю и твердый скелет выдерживает все нагрузки. Для одноосного нагружения трехмерного тела имеет место соотношение $\lambda_1 = \lambda_2$ и уравнение (15) принимает вид:

$$\ln \lambda_1 = -H_1 \ln \lambda_3, \text{ где } H_1 \equiv \frac{C_{1133}}{C_{1111} + C_{1122}}. \quad (19)$$

Дифференцирование уравнения (19) по λ_3 дает:

$$-\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{d\lambda_3} = H_1. \quad (20)$$

С помощью известного определения коэффициента Пуассона уравнение (20) принимает вид:

$$\nu_{31s} = -\lim_{\lambda_1 \rightarrow 1} \lim_{\lambda_3 \rightarrow 1} \frac{d\lambda_1}{d\lambda_3} = H_1. \quad (21)$$

Далее уравнение (19) подставляется в уравнение (17). Тогда для $\lambda_1 = \lambda_2$ и $C_{1133} = C_{2233}$ имеет место соотношение:

$$\tau_{33s} = \tau_{33} = (C_{3333} - 2C_{1133}H_1) \ln \lambda_3. \quad (22)$$

Дифференцирование уравнения (22) относительно λ_3 дает:

$$\lambda_3 \frac{d\tau_{33}}{d\lambda_3} = C_{3333} - 2C_{1133}H_1. \quad (23)$$

Модуль Юнга в направлении нагружения имеет вид:

$$E_{33s} = \lim_{\lambda_3 \rightarrow 1} \frac{d\tau_{33}}{d\lambda_3} = C_{3333} - 2C_{1133}H_1. \quad (24)$$

Можно получить аналогичные уравнениям (21) и (24) соотношения, связывающие величины E_{11s} , ν_{12s} . Из этих соотношений и уравнений (21) и (24) можно получить следующие формулы:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= C_{2222} = E_{11s}(E_{33s} - E_{11s}\nu_{31s}^2)(1 + \nu_{12s})^{-1}J, \\ C_{3333} &= E_{33s}^2(1 - \nu_{12s})J, \\ C_{2233} &= C_{1133} = E_{11s}E_{33s}\nu_{31s}J, \\ C_{1122} &= E_{11s}(E_{33s}\nu_{12s} + E_{11s}\nu_{31s}^2)(1 + \nu_{12s})^{-1}J, \\ C_{1313} &= G_{13}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$J \equiv [E_{33s}(1 - \nu_{12s}) - 2E_{11s}\nu_{31s}^2]^{-1}. \quad (26)$$

Если подставить формулы (25) в (15), (17), а также (17) в (18), можно получить следующие соотношения (Приложение 1):

$$\tau_{33} = E_{33} \ln \lambda_3 - p, \quad (27)$$

где

$$E_{33} = \frac{1}{2} E_{33s} J \cdot [(1 - 4\nu_{31s})E_{11s} + 2(1 - \nu_{12s}E_{33s})]. \quad (28)$$

Безразмерные коррекции высоты зазора сустава, вызванные гипопругими деформациями хряща, имеют следующий вид:

$$\varepsilon_{33} = \frac{\tau_{33}}{E_{33}} = -\frac{p}{E_{33}} + \ln \lambda_3. \quad (29)$$

4. Метод интегрирования гидродинамической задачи

Вводится новая безразмерная переменная [12, 13, 22]:

$$\chi \equiv r_1 N, \quad N \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\text{Re} \cdot \psi \cdot \text{Str}}{t_1}}, \quad t_1 > 0, \quad 0 < \frac{\text{De} \cdot \text{Str}}{t_1} < 1, \quad (30)$$

и предполагается, что решение системы (6)-(9) может быть записано в виде следующих сходящихся рядов [13, 17]:

$$v_{\varphi 1} = v_{\varphi 0 \Sigma}(\chi, \varphi, \vartheta_1) + \frac{\text{De} \cdot \text{Str}}{t_1} v_{\varphi 1 \Sigma}(\chi, \varphi, \vartheta_1) + \left(\frac{\text{De} \cdot \text{Str}}{t_1}\right)^2 v_{\varphi 2 \Sigma}(\chi, \varphi, \vartheta_1) + \dots, \quad (31)$$

$$v_{\vartheta 1} = v_{\vartheta 0 \Sigma}(\chi, \varphi, \vartheta_1) + \frac{\text{De} \cdot \text{Str}}{t_1} v_{\vartheta 1 \Sigma}(\chi, \varphi, \vartheta_1) + \left(\frac{\text{De} \cdot \text{Str}}{t_1}\right)^2 v_{\vartheta 2 \Sigma}(\chi, \varphi, \vartheta_1) + \dots, \quad (32)$$

$$v_{r 1} = v_{r 0 \Sigma}(\chi, \varphi, \vartheta_1) + \frac{\text{De} \cdot \text{Str}}{t_1} v_{r 1 \Sigma}(\chi, \varphi, \vartheta_1) + \left(\frac{\text{De} \cdot \text{Str}}{t_1}\right)^2 v_{r 2 \Sigma}(\chi, \varphi, \vartheta_1) + \dots, \quad (33)$$

$$p_1 = p_{10}(\varphi, \vartheta_1, t_1) + \frac{\text{De} \cdot \text{Str}}{t_1} p_{11}(\varphi, \vartheta_1, t_1) + \left(\frac{\text{De} \cdot \text{Str}}{t_1}\right)^2 p_{12}(\varphi, \vartheta_1, t_1) + \dots, \quad (34)$$

где $t_1 > 0$, $0 < \text{De} \cdot \text{Str} \ll 1$, $\text{De} \cdot \text{Str}/t_1 < 1$.

Далее производные по переменным t_1 , r_1 в уравнениях (6)-(8) заменяются производными по одной переменной χ , используя следующие зависимости:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial t_1} = -\frac{1}{4} \sqrt{\text{Re} \cdot \psi \cdot \text{Str}} \frac{r_1}{t_1 \sqrt{t_1}} \frac{\partial}{\partial \chi} = -\frac{\chi}{2t_1} \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} = \frac{\partial}{\partial r_1} \left(\frac{\partial}{\partial r_1} \right) = \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial r_1} \right) \frac{\partial \chi}{\partial r_1} = \frac{\text{Re} \cdot \psi \cdot \text{Str}}{4t_1} \frac{\partial^2}{\partial \chi^2}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial r_1^2} &= \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\text{Re} \cdot \psi \cdot \text{Str}}{4t_1} \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \right) = -\frac{\text{Re} \cdot \psi \cdot \text{Str}}{4t_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + \frac{\text{Re} \cdot \psi \cdot \text{Str}}{4t_1} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial t_1} = \\ &= -\frac{\text{Re} \cdot \psi \cdot \text{Str}}{4t_1^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + \frac{\chi}{2} \frac{\partial^3}{\partial \chi^3} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Затем ряды (31)-(34) подставляются в измененную систему (6)-(9), где переменные t_1 , r_1 заменены переменной χ . Кроме того, производится приравнивание членов, умноженных на одинаковые степени параметра $(De \cdot Str/t_1)^k$, при $k=0, 1, 2, \dots$ Тогда можно получить следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 v_{i0\Sigma}}{d\chi^2} + 2\chi \frac{dv_{i0\Sigma}}{d\chi} = \frac{1}{N_i^2} \frac{\partial p_{10}}{\partial \alpha_i}, \quad (38)$$

$$\frac{d^2 v_{i1\Sigma}}{d\chi^2} + 2\chi \frac{dv_{i1\Sigma}}{d\chi} + 4(v_{i1\Sigma}) = \frac{1}{N_i^2} \frac{\partial p_{11}}{\partial \alpha_i} + \frac{d^2 v_{i0\Sigma}}{d\chi^2} \left(1 + \frac{1}{2}\chi\right), \quad (39)$$

$$\frac{d^2 v_{i2\Sigma}}{d\chi^2} + 2\chi \frac{dv_{i2\Sigma}}{d\chi} + 8(v_{i2\Sigma}) = \frac{1}{N_i^2} \frac{\partial p_{12}}{\partial \alpha_i} + 2 \frac{d^2 v_{i1\Sigma}}{d\chi^2} + \frac{1}{2}\chi \frac{d^3 v_{i1\Sigma}}{d\chi^3}, \quad (40)$$

где $i = \varphi, \vartheta$; $\alpha_\varphi = \varphi$, $\alpha_\vartheta = \vartheta_1$ и

$$(N_\varphi)^2 = N^2 \sin \vartheta_1, \quad N_\vartheta = N. \quad (41)$$

5. Окончательное решение для гипопругого хряща

Общие и частные решения обыкновенных дифференциальных уравнений (38)-(40) получены в Приложении 2. Константы (A2.9), (A2.16) подставляем в общее решение (A2.7) для компонент скорости синовиальной жидкости. Тогда можно получить следующую окончательную форму для конечной скорости синовиальной жидкости (A2.17) в окружном и меридиональном направлениях.

Пренебрегая вязкоупругими свойствами синовиальной жидкости и учитывая решение (A2.17), получим частные решения для полной скорости синовиальной жидкости в направлениях φ и ϑ для нестационарного течения в следующей форме:

$$v_{\varphi 0\Sigma}(\varphi, r_1, \vartheta_1, t_1) = + \sin \vartheta_1 - \left\{ \sin \vartheta_1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2N^2 \sin \vartheta_1} \frac{\partial p_{10}}{\partial \varphi} Y(\chi = N\varepsilon_{T1}) \right\} \cdot \frac{\operatorname{erf}(r_1 N)}{\operatorname{erf}(\varepsilon_1 N)} - \frac{\sqrt{\pi}}{2N^2 \sin \vartheta_1} \frac{\partial p_{10}}{\partial \varphi} Y(\chi = Nr_1), \quad (42)$$

$$v_{\vartheta 0\Sigma}(\varphi, r_1, \vartheta_1, t_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2N^2} \frac{\partial p_{10}}{\partial \vartheta_1} Y(\chi = N\varepsilon_{T1}) \cdot \frac{\operatorname{erf}(r_1 N)}{\operatorname{erf}(N\varepsilon_{T1})} - \frac{\sqrt{\pi}}{2N^2} \frac{\partial p_{10}}{\partial \vartheta_1} Y(\chi = Nr_1), \quad (43)$$

$$Y(\chi) \equiv \int_0^\chi e^{\chi_1^2} \operatorname{erf} \chi_1 d\chi_1 - \operatorname{erf} \chi \int_0^\chi e^{\chi_1^2} d\chi_1, \quad (44)$$

$$N \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{Re} \cdot \psi \cdot \operatorname{Str}}{t_1}}, \quad \operatorname{erf}(\chi_1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\chi_1} e^{-\chi_2^2} d\chi_2, \quad (45)$$

и $0 \leq t_1 < \infty$, $0 \leq r_1 \leq \varepsilon_{T1}$, $\pi/8 \leq \vartheta_1 \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi\theta_1$, $0 \leq \theta_1 < \infty$, $\varepsilon_{T1} = \varepsilon_{T1}(\varphi, \vartheta_1, t_1)$, $0 \leq \chi_2 \leq \chi_1 \leq \chi \equiv r_1 N \leq \varepsilon_{T1} N \equiv M$. Далее компоненты скорости (42), (43) подставляются в уравнение (9) и обе части этого уравнения интегрируются по переменной r_1 .

Компонента скорости синовиальной жидкости $v_{r0\Sigma}$ в направлении высоты зазора равна нулю на поверхности кости. Следовательно, создавая условие $v_{r0\Sigma} = 0$ при $r_1 = 0$, компонента скорости синовиальной жидкости в направлении высоты зазора имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 v_{r0\Sigma}(\varphi, r_1, \vartheta_1, t_1) = & -\frac{Ne^{-\varepsilon_{T1}^2 N^2}}{\operatorname{erf}(h_1 N)} \int_0^{r_1} \frac{\operatorname{erf}(r_2 N)}{\operatorname{erf}(\varepsilon_{T1} N)} dr_2 \cdot \\
 & \cdot \left[\frac{\partial \varepsilon_{T1}}{\partial \varphi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{\partial \varepsilon_{T1}}{\partial \varphi} \frac{\partial p_{10}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon_{T1}}{\partial \vartheta_1} \frac{\partial p_{10}}{\partial \vartheta_1} \right) \frac{1}{N} \int_0^{\varepsilon_{T1} N} e^{\chi_1^2} \operatorname{erf} \chi_1 d\chi_1 \right] - \\
 & - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{\partial^2 p_{10}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p_{10}}{\partial \vartheta_1^2} + \frac{\partial p_{10}}{\partial \vartheta_1} \cot \vartheta_1 \right) \cdot \\
 & \cdot \left\{ \frac{1}{N^2} Y(\chi = h_1 N) \int_0^{r_1} \frac{\operatorname{erf}(r_1 N)}{\operatorname{erf}(h_1 N)} dr_1 - \int_0^{r_2} Y(\chi_1 = r_2 N) dr_2 \right\}
 \end{aligned} \tag{46}$$

где $0 \leq t_1 < \infty$, $\pi/8 \leq \vartheta_1 \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi\theta_1$, $0 \leq \chi_2 \leq \chi_1 \leq \chi \equiv r_1 N \leq \varepsilon_{T1} N \equiv M$, $0 \leq \theta_1 < 1$, $0 \leq r_2 \leq r_1 \leq \varepsilon_{T1}$.

Компонента скорости синовиальной жидкости $v_{r0\Sigma}$ в направлении высоты зазора не равна нулю на поверхности вертикальной впадины. Следовательно, интегрируя уравнение непрерывности (9) относительно переменной r_1 и накладывая граничное условие (A2.7) для $r_1 = \varepsilon_1$ на компоненту скорости в направлении высоты зазора, а также учитывая условие (A2.6) при $r_1 = 0$, можно получить следующее уравнение:

$$\frac{1}{\sin \vartheta_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^{\varepsilon_{T1}} v_{\varphi 0\Sigma} dr_1 + \frac{1}{\sin \vartheta_1} \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \int_0^{\varepsilon_{T1}} \sin \vartheta_1 v_{\vartheta 0\Sigma} dr_1 = -\operatorname{Str} \frac{\partial \varepsilon_{T1}}{\partial t_1}. \tag{47}$$

Подставляя выражения (41)-(42) в (47), можно получить следующие модифицированное уравнение Рейнольдса:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{\pi}}{2N^2} \frac{1}{\sin \vartheta_1} E \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[J(\varepsilon_{T1} N) \frac{\partial p_{10}}{\partial \varphi} \right] \right\} + \frac{\sqrt{\pi}}{2N^2} E \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \left[J(\varepsilon_{T1} N) \frac{\partial p_{10}}{\partial \vartheta_1} \sin \vartheta_1 \right] \right\} = \\
 & = -(\sin \vartheta_1) E \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} H(\varepsilon_{T1} N) \right\} - \operatorname{Str} \frac{\partial E(\varepsilon_{T1})}{\partial t_1} \sin \vartheta_1,
 \end{aligned} \tag{48}$$

где

$$J(\varepsilon_{T1} N) \equiv W(\varepsilon_{T1} N) Y(\varepsilon_{T1} N) - \int_0^{\varepsilon_{T1}} Y(r_1 N) dr_1, H(\varepsilon_{T1} N) \equiv \varepsilon_{T1} - W(\varepsilon_{T1} N), \tag{49}$$

$$W(\varepsilon_{T1} N) \equiv \frac{\int_0^{\varepsilon_{T1}} \operatorname{erf}(r_1 N) dr_1}{\operatorname{erf}(\varepsilon_{T1} N)}, \tag{50}$$

и $\varepsilon_{T1} = \varepsilon_{T1s}(\varphi, \vartheta_1, t_1) + \delta_1$, $0 \leq r_2 \leq r_1 \leq \varepsilon_{T1}$, $\pi/8 \leq \vartheta_1 \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi\theta_1$, $0 \leq \theta_1 < 1$, $0 \leq t_1 < \infty$, $0 \leq \chi_2 \leq \chi_1 \leq \varepsilon_{T1}N$, $0 \leq N(t_1) = 0.5\sqrt{\text{Re} \cdot \text{Str}/t_1} < \infty$. Модифицированное уравнение Рейнольдса (48) определяет неизвестную функцию давления $p_{10}(\varphi, \vartheta_1, t_1)$.

Зависимость от времени высоты зазора с возмущениями имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{T1} &= \varepsilon_{T1s}(\varphi, \vartheta_1, t_1) + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{T1s}(\varphi, \vartheta_1) \left[1 + s_1 e^{-t_0 t_1^{\omega_0}} \right] + \varepsilon_{33} = \\ &= \varepsilon_{T1s}(\varphi, \vartheta_1, t_1) + p(t)/E_{33} = \varepsilon_{T1s}(\varphi, \vartheta_1, t_1) + \text{Ca} p_{10}(t_1), \end{aligned} \quad (51)$$

где ε_{33} – безразмерные коррекции, вызванные гипоупругими деформациями хряща в направлении высоты зазора, $\text{Ca} = p_0/E_{33}$ – число Коши. Независящая от времени часть гладкой высоты зазора имеет размерную форму:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \varepsilon_{T1s}(\varphi, \vartheta_1) &= \varepsilon_{Ts}(\varphi, \vartheta_1) \equiv \Delta\varepsilon_1 \cos \varphi \sin \vartheta_1 + \Delta\varepsilon_2 \sin \varphi \sin \vartheta_1 + \Delta\varepsilon_3 \cos \vartheta_1 - R + \\ &+ \sqrt{(\Delta\varepsilon_1 \cos \varphi \sin \vartheta_1 + \Delta\varepsilon_2 \sin \varphi \sin \vartheta_1 + \Delta\varepsilon_3 \cos \vartheta_1)^2 + (R + \varepsilon_{\min})(R + 2D + \varepsilon_{\min})}. \end{aligned} \quad (52)$$

Предполагается, что центр сферической головки кости находится в точке $O(0,0,0)$, а центр сферического хряща в точке $O_1(x - \Delta\varepsilon_1, y - \Delta\varepsilon_2, z + \Delta\varepsilon_3)$. Эксцентриситет имеет величину D (см. рис. 1).

Безразмерная функция $s_1 = s(\varphi, \vartheta_{1s})/\varepsilon_{Ts}(\varphi, \vartheta_1)$ при $\vartheta_{1s} = \vartheta_s/R$, $\vartheta_1 = \vartheta/R$ описывает изменения в высоте зазора при импульсном нагружении, вызванные приложенной силой P . Высота зазора увеличивается, если $s_1 > 0$. Высота зазора уменьшается, если $s_1 < 0$. Символ ω_0 означает угловую скорость в с^{-1} и означает изменения возмущенной во времени при неустановившемся течении синовиальной жидкости в зазоре сустава в направлении высоты. Если t_1 увеличивается, то при $s_1 > 0$ увеличение высоты зазора уменьшается и через достаточно большое время после импульса достигает одного и того же независимого от времени значения ε_{Ts} . Если безразмерное время t_1 увеличивается, то при $s_1 < 0$ уменьшение высоты зазора увеличивается.

Если t_1 стремится к бесконечности, то есть N стремится к нулю, то уравнения (48) стремятся к классическому уравнению Рейнольдса для стационарного движения. Для объяснения этого факта вычислим следующие пределы:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi}}{2N^2} Y(\chi = \varepsilon_{T1}N) &\equiv \lim_{N \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi}}{2N^2} \left[\int_0^{\varepsilon_{T1}N} e^{\chi^2} \text{erf}(\chi) d\chi - \text{erf}(\varepsilon_{T1}N) \int_0^{\varepsilon_{T1}N} e^{\chi^2} d\chi \right] = \\ &= \lim_{N \rightarrow 0} \frac{1}{N^2} \left\{ \int_0^{\varepsilon_{T1}N} \left(e^{\chi^2} \int_0^{\chi} e^{-\chi_1^2} d\chi_1 \right) d\chi - \int_0^{\varepsilon_{T1}N} e^{-\chi^2} d\chi \int_0^{\varepsilon_{T1}N} e^{\chi^2} d\chi \right\} = \\ &= \lim_{N \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\varepsilon_{T1}} e^{\chi_1^2} d\chi_1}{2N \cdot e^{\varepsilon_{T1}^2 N^2}} = -\frac{\varepsilon_{T1}^2}{2} \lim_{N \rightarrow 0} \frac{e^{\varepsilon_{T1}^2 N^2}}{e^{\varepsilon_{T1}^2 N^2} + 2\varepsilon_{T1} N^2 e^{\varepsilon_{T1}^2 N^2}} = -\frac{\varepsilon_{T1}^2}{2}. \end{aligned} \quad (53)$$

Вышеуказанные пределы получены при использовании правила Лапиталя. Учитывая пределы,

$$\lim_{N \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\pi}}{2N^2} Y(\chi_1 = Nr_1) = -\frac{r_1^2}{2}, \quad \lim_{N \rightarrow 0} W(\varepsilon_{T1s} N) = \frac{\varepsilon_{T1s}}{2}, \quad (54)$$

уравнение (48) при $N \rightarrow 0$, то есть для $t_1 \rightarrow \infty$, стремится к следующей форме классического уравнения Рейнольдса в сферических координатах, но с учетом гипоупругих деформаций хряща:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \vartheta_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(\varepsilon_{T1s} + \varepsilon_{33\infty})^3 \frac{\partial p_{10}}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \left[(\varepsilon_{T1s} + \varepsilon_{33\infty})^3 \frac{\partial p_{10}}{\partial \vartheta_1} \sin \vartheta_1 \right] = \\ & = \left(6 \frac{\partial}{\partial \varphi} + 12 \text{Str} \frac{\partial}{\partial t_1} \right) (\varepsilon_{T1s} + \varepsilon_{33\infty}) \sin \vartheta_1, \end{aligned} \quad (55)$$

$$\varepsilon_{33\infty} = \text{Ca} \frac{p_{10}(t_1 \rightarrow \infty)}{E_{331}}, \quad \varepsilon_{T1s} = \varepsilon_{T1s}(\varphi, \vartheta_1), \quad (56)$$

где $0 \leq \theta_1 < 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi\theta_1$, $0 \leq \vartheta_1 \leq \pi/2$.

Гипоупругие деформации достигают теперь предельных значений $\varepsilon_{33\infty}$. Зазор сустава уменьшается к не зависящему от времени значению $\varepsilon_{T1s}(\varphi, \vartheta_1) + \varepsilon_{33\infty}$ (см. рис. 1). Уравнение (53) определяет неизвестную функцию давления, не зависящую от времени.

6. Численные вычисления

При численных вычислениях предположены реальные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона хрящевого скелета [8]. Для значений $E_{33s}=5,5$ МПа, $E_{11s}=5,0$ МПа, $\nu_{33s}=0,20$, $\nu_{11s}=0,15$ найдем, что суммарный модуль Юнга хряща в направлении, перпендикулярном к поверхности хряща, имеет значение $E_{33}=6,65$ МПа.

При импульсивном движении безразмерное давление p_{10} и безразмерные коррекции давления: p_{11}, p_{12}, \dots в области смазки Ω ($0 \leq \varphi \leq 2\pi\theta_1$, $\pi/8 \leq \vartheta_1 \leq \pi/2$) определяются с помощью модифицированного уравнения Рейнольдса (48), (55). Высота зазора (51, 52) также учитывается. Численные вычисления произведем с использованием метода конечных разностей [20]. При вычислении было предположено следующее: радиус сферической головки кости $R=0,0265$ м, угловая скорость импульсивных возмущений $\omega_0=0.5$ с⁻¹, характеристическое размерное время $t_0=0,000001$ с. Чтобы получить реальные значения времени, нужно умножить безразмерную величину t_1 на значение характеристического времени $t_0=0,000001$ с. Например, $t_1=1000000$ с означает одну секунду после импульса.

Предположим следующие эксцентриситеты головки кости: $\Delta\varepsilon_1=4,0$ мкм, $\Delta\varepsilon_2=0,5$ мкм, $\Delta\varepsilon_3=3$ мкм и характеристическое значение высоты зазора $\varepsilon_0=10$ мкм. Кроме того, предположим следующие величины: динамическая вязкость синовиальной жидкости $\eta_0=0,40$ Па·с, коэффициент псевдовязкости $\beta=0,0000003$ Па·с², плотность синовиальной жидкости $\rho=1010$ кг/м³, угловая скорость сферической головки кости $\omega=1,5$ с⁻¹. Средняя высота зазора имеет минимальное значение ε_{\min} , изменяется в

интервале времени $0,000001 \text{ с} \leq t \leq 100 \text{ с}$ и достигает значений от 5,08 мкм до 6,93 мкм, средний относительный радиальный зазор имеет значение $\psi = \varepsilon_0 / R = 0,0003774$.

При указанных допущениях имеем: характеристическое размерное давление $p_0 = 4,2135 \text{ МПа}$, число Коши $Ca = 0,634$, число Строухала $Str = 666666,7$ и дополнительно $Re \cdot Str = 0,252$, $De \cdot Str = 0,750$. В этом случае имеется также соотношение $0 \leq \beta / \eta_0 t < 1$. Для безразмерного времени имеем: $t_1 = 1$, $t_1 = 1000000$, $t_1 = 100000000$, то есть для размерных времен: $t = 0,000001 \text{ с}$; $t = 1,0 \text{ с}$; $t = 100,0 \text{ с}$, соответственно. Распределение безразмерного давления показано на рис. 5 (при $s_1 = 0,125$), на рис. 6 (при $s_1 = -0,125$) без гипопругих деформаций хряща (левый столбец рисунков на рис. 5 и рис. 6 при $Ca = 0,00$) и с гипопругими деформациями хряща (правый столбец рисунков на рис. 5 и рис. 6 при $Ca = 0,634$).

Для случая $Ca = 0,634$ показано влияние деформаций хряща на величину давлений.

Значения давления для $Ca = 0,634$ получены в шесть этапов.

Предполагается, что значение давления p_{10} приближенно равно $p_{10(1)}$, полученному из уравнения (48) при $Ca = 0,00$, то есть значению давления без влияния деформаций хряща как первого в результатах вычисления давления. Значения $p_{10(1)}$ умножаются на ненулевое число Коши Ca , и тогда можно получить высоту зазора в форме $\varepsilon_{T_{1s}} + Ca p_{10(1)}$. Для этой высоты из уравнения (48) можно получить значения давления p_{10} , приближенно равного $p_{10(2)}$, как второй шаг в результате вычисления давления. Значения $p_{10(2)}$ умножаются на ненулевое число Коши Ca и можно получить величину зазора в форме $\varepsilon_{T_{1s}} + Ca p_{10(2)}$. Для этой величины из уравнения (48) можно получить значения давления p_{10} , приближенно равного $p_{10(3)}$, как третий этап результатов вычислений давления. Полученная последовательность давлений сходится к предельному значению давления p_{10} . Значения давления $p_{10(6)}$, полученные на шестом шаге вычислений, будут находиться в окрестности реального значения давления p_{10} , причем имеет место неравенство:

$$p_0 \left| p_{10} - p_{10(6)} \right| < 2N. \quad (57)$$

Чтобы получить размерные значения давления, необходимо умножить безразмерное значение давления, указанное на рис. 5 и 6, на характеристическое значение давления p_0 .

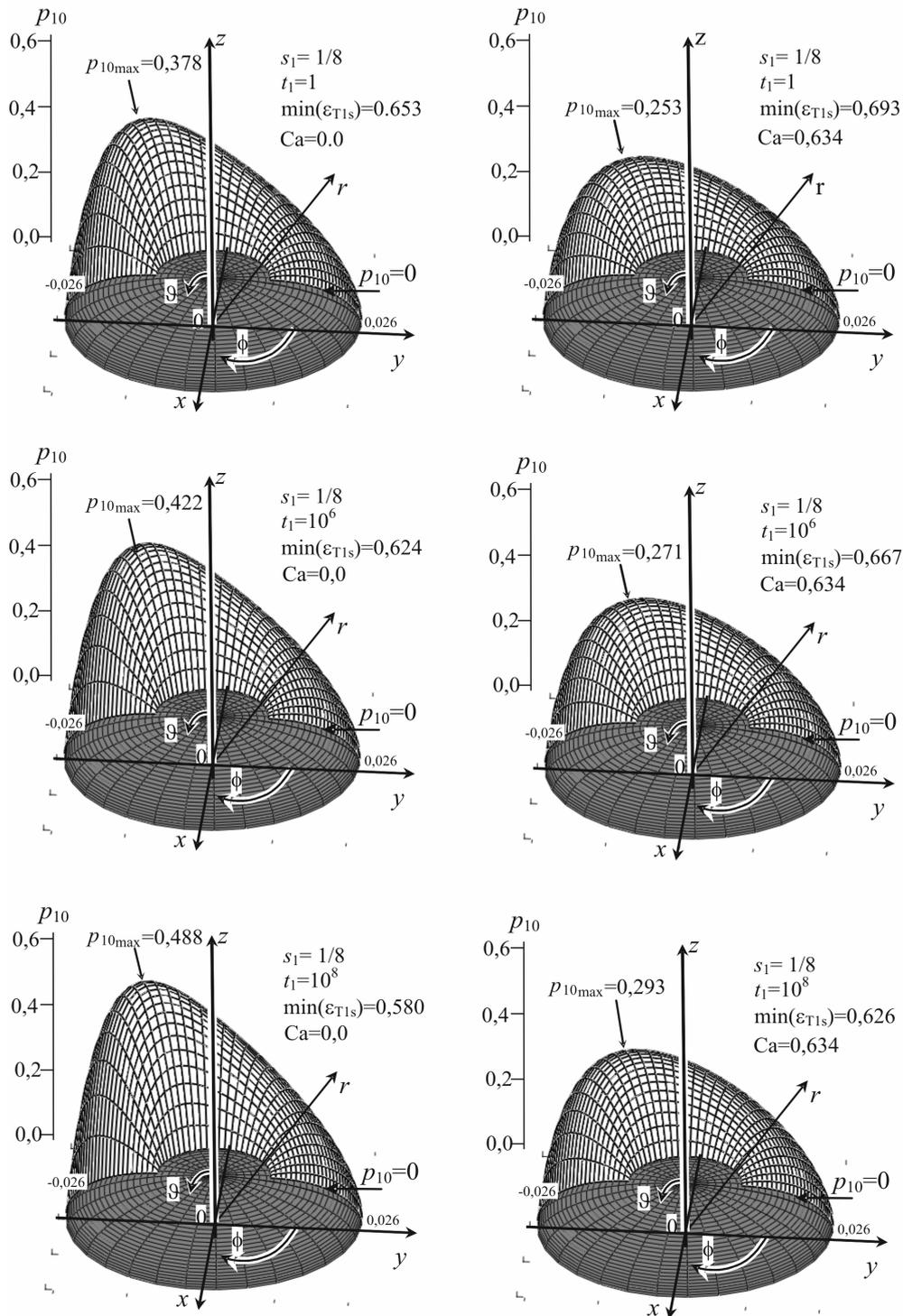


Рис. 5. Распределение безразмерного гидродинамического давления внутри зазора сферического сустава человека без деформаций хряща (левая сторона рисунка для $Ca=0,00$) и с гипотетическими деформациями хряща (правая сторона рисунка для $Ca=0,634$) в области $\Omega: 0 \leq \varphi \leq \pi, \pi R/8 \leq \vartheta \leq \pi R/2$ в безразмерном времени: $t_1=1$ ($t=0,000001$ с), $t_1=1000000$ ($t=1$ с) и $t_1=100000000$ ($t=100$ с) после момента импульса для эффектов уменьшения высоты зазора ($s_1=0,125$). Результаты получены для следующих значений: $R=0,0265$ м; $\eta_0=0,40$ Па·с; $\rho=1010$ кг/м³; $p_0=4,2135$ МПа; $\varepsilon_0=10$ мкм; $\Delta\varepsilon_1=4$ мкм; $\Delta\varepsilon_2=0,5$ мкм; $\Delta\varepsilon_3=3$ мкм; $\psi \approx \varepsilon_0/R \approx 0,0003774$; $\omega=1,5$ с⁻¹; $\omega_0=0,5$ с⁻¹; $Str=666\ 666,7$; $Re \cdot Str=0,252$; $De \cdot Str=0,750$

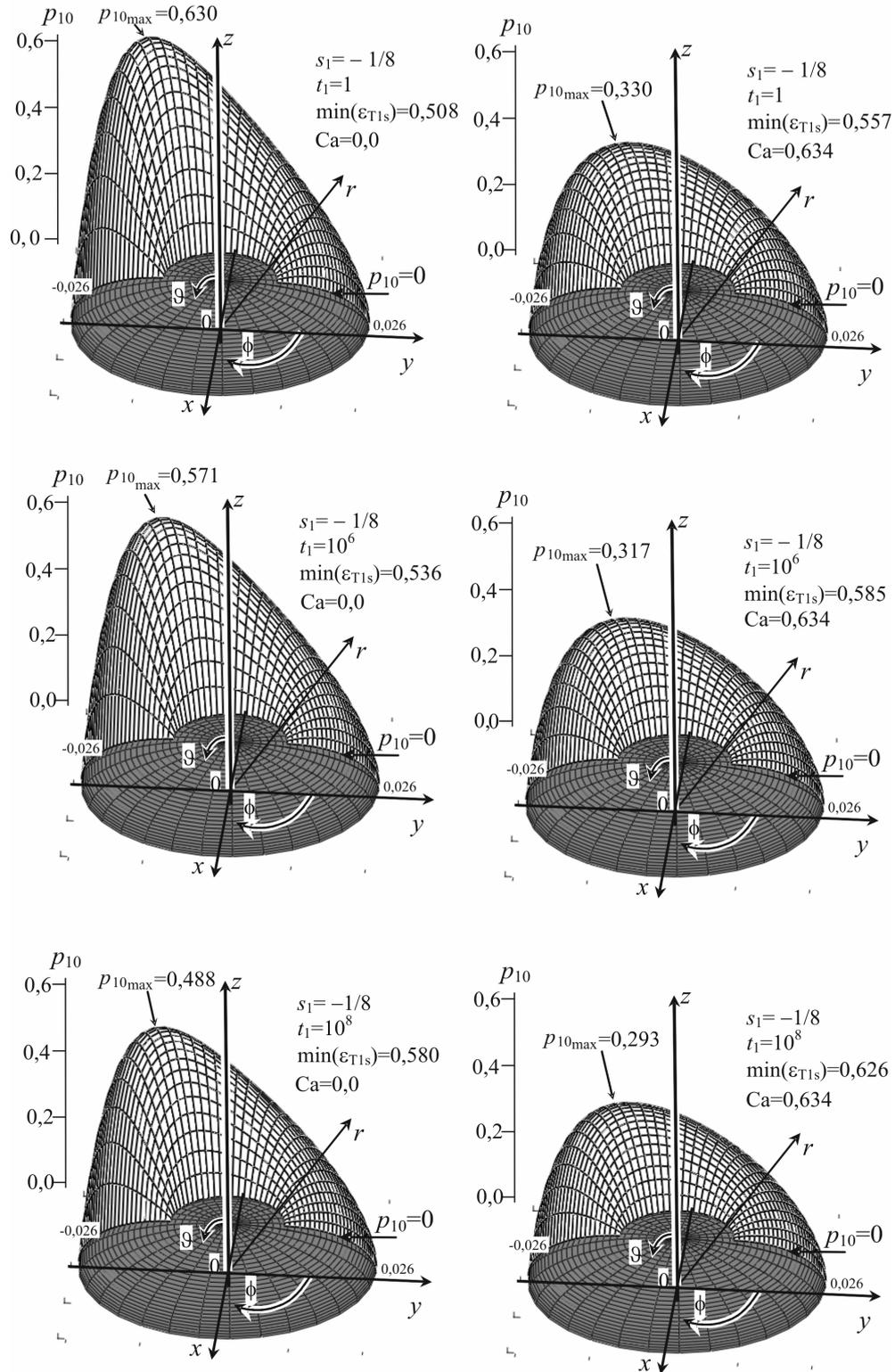


Рис. 6. Распределение безразмерного гидродинамического давления внутри зазора сферического сустава человека без деформаций хряща (левая сторона рисунка для $Ca=0,00$) и с гипопругими деформациями хряща (правая сторона рисунка для $Ca=0,634$) в области $\Omega: 0 \leq \varphi \leq \pi, \pi R/8 \leq \vartheta \leq \pi R/2$ в безразмерном времени: $t_1=1$ ($t=0,000001$ с), $t_1=1000000$ ($t=1$ с) и $t_1=100000000$ ($t=100$ с) после момента импульса для эффектов уменьшения высоты зазора ($s_1 = -0,125$). Результаты получены для следующих значений: $R=0,0265$ м; $\eta_0=0,40$ Па·с; $\rho=1010$ кг/м³; $p_0=4,2135$ МПа, $\varepsilon_0=10$ мкм, $\Delta\varepsilon_1=4$ мкм; $\Delta\varepsilon_2=0,5$ мкм; $\Delta\varepsilon_3=3$ мкм; $\psi=\varepsilon_0/R \approx 0,0003774$; $\omega=1,5$ с⁻¹; $\omega_0=0,5$ с⁻¹; $Str=666\ 666,7$; $Re \cdot Str=0,252$; $De \cdot Str=0,750$

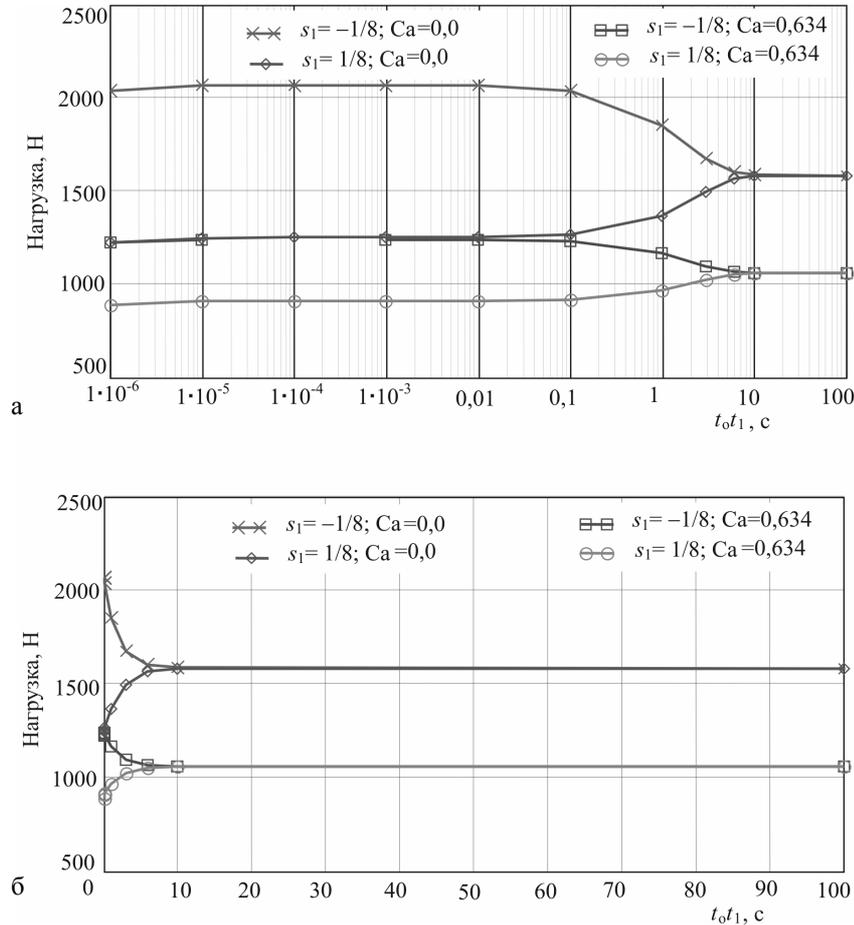


Рис. 7. Распределение размерной нагрузки внутри зазора сферического тазобедренного сустава человека в области $\Omega: 0 \leq \varphi \leq \pi, \pi R/8 \leq \vartheta \leq \pi R/2$ в зависимости от размерного времени от 0,000001 с до 100,000000 с после импульса в логарифмической шкале (а) и в десятичной шкале по времени (б). Две первые кривые сверху на рис. (а) и (б) показывают значение нагрузки, полученное без деформации хряща для $Ca=0,00$. Две первые кривые снизу на рис. (а) и (б) показывают значение нагрузки, полученное для деформаций хряща с $Ca=6,34$. Верхняя кривая в каждой из двух кривых на рис. (а) и (б) означает нагрузки, полученные для $s_1=-0,125$, а нижняя кривая в каждой из двух кривых на рис (а) и (б) означает нагрузки, полученные для $s_1=+0,125$. Результаты получены для следующих данных: $R=0,0265$ м; $\eta_0=0,40$ Па·с; $\rho=1010$ кг/м³; $p_0=4,2135$ МПа, $\varepsilon_0=10$ мкм; $\Delta\varepsilon_1=4$ мкм; $\Delta\varepsilon_2=0,5$ мкм; $\Delta\varepsilon_3=3$ мкм; $\psi=\varepsilon_0/R \approx 0,0003774$; $\omega=1,5$ с⁻¹; $\omega_0=0,5$ с⁻¹; $Str=666\ 666,7$; $Re \cdot Str=0,252$; $De \cdot Str=0,750$

Если травма увеличивает высоту зазора ($s_1 > 0$), то за время после импульса высота зазора уменьшается и давление растет. За достаточно большое время после импульса высота зазора и давление достигает не зависящих от времени значений высоты зазора и давления, соответственно.

Если травма уменьшает высоту зазора ($s_1 < 0$), то за время после импульса высота зазора увеличивается и давление падает. За достаточно большое время после импульса высота зазора и давление достигают не зависящих от времени значений высоты зазора и давления, соответственно.

Если рассматривать момент времени, достаточно удаленный от момента приложения импульса ($t_1 \rightarrow \infty$), то распределение давления при увеличении высоты зазора ($s_1 > 0$) и уменьшении высоты зазора ($s_1 < 0$), вызванное неровностями в хряще, стремятся к одному и тому же распределению. Этот предел распределения давления можно также получить из классического уравнения Рейнольдса (55).

7. Выводы

- Если деформации хряща пренебрежимы и удар увеличивает (уменьшает) высоту зазора сустава, то зазор уменьшается (увеличивается), то есть возвращается к своей первоначальной форме за временной интервал от 0,000001 с до 100 с. Для этого случая распределения давления показаны в левом столбце на рис. 5 и рис. 6. Через сотни секунд после травмы давление в этих двух случаях достигает одинаковых значений (см. нижний рисунок в левой строке на рис. 5 и рис. 6).
- Если деформации хряща учитываются и удар увеличивает (уменьшает) высоту зазора сустава, то зазор уменьшается (увеличивается), то есть возвращается к своей первоначальной форме, но с деформациями хряща, во временном интервале от 0,000001 с до 100 с. Для этого случая распределения давления показаны в правом столбце на рис. 5 и рис. 6. Через сотни секунд после травмы давление в этих двух случаях достигает одинаковых значений (см. нижний рисунок в правой строке на рис. 5 и рис. 6).
- Значения давления в правом столбце рисунков на рис. 5 и рис. 6 гораздо ниже, чем значения в левом столбце рисунков на рис. 5 и рис. 6. Из этого факта следует, что значения давлений, полученные без деформаций хряща, больше, чем значения давлений хряща в тазобедренном суставе с учетом деформаций хряща в каждый момент времени после травмы во временном интервале от 0,000001 с до 100 с.
- Нагрузка тазобедренного сустава с деформациями хряща гораздо больше, чем нагрузка, полученная для недеформируемой поверхности хряща.
- Наибольшее изменение нагрузки достигает в тазобедренном суставе человека в интервале времени от 0,1 с до 1,0 с после травмы. За время от 0,000001 с до 0,1 с после травмы нагрузка не изменяется независимо от увеличения или уменьшения высоты зазора при ударе.

Благодарности

Эта работа финансировалась фондом KBN в течение 2003-2006 гг. как научный проект KBN 411E-030-25. Данное исследование также было финансово поддержано согласно проекту ТОК –FP6-517226.

Автор благодарен за сотрудничество с кафедрой биомедицинской инженерии университета Ульм, Германия.

Приложение 1

При быстром нагружении суставной хрящ может рассматриваться как несжимаемый упругий материал [3]. Поэтому при этих условиях [3] имеет место соотношение:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (A1.1)$$

В случае нагружения в направлении 3, перпендикулярном к поверхности хряща, имеет место соотношение $\lambda_1 = \lambda_2$. Чтобы обеспечить боковую поверхность хряща свободной от напряжений, следует наложить условие $\tau_{11} = 0$ в формуле (18) для $i=1$. Если дополнительно вставить уравнение (15) в (18) для $i=1$, то можно получить:

$$p_{\Sigma} = (C_{1111} + C_{1122}) \ln \lambda_1 + C_{1133} \ln \lambda_3. \quad (A1.2)$$

Далее следует вставить выражения (A1.2) и (17) в уравнение (18) для $i=3$. Тогда будем иметь следующее:

$$\begin{aligned} \tau_{33} = -p_{\Sigma} + \tau_{33s} = -p - (C_{1111} + C_{1122}) \ln \lambda_1 - C_{1133} \ln \lambda_3 + \\ + (C_{1133} + C_{2233}) \ln \lambda_1 + C_{3333} \ln \lambda_3. \end{aligned} \quad (A1.3)$$

Вследствие предшествующих допущений $\lambda_1 = \lambda_2$ и из (A1.1) следует:

$$\ln \lambda_1 = -0.5 \ln \lambda_3. \quad (A1.4)$$

В этом случае для $C_{1133} = C_{2233}$, и из уравнения (A1.3) следует:

$$\begin{aligned} \tau_{33} = -p + 0.5(C_{1111} + C_{1122}) \ln \lambda_3 - C_{1133} \ln \lambda_3 - C_{1133} \ln \lambda_3 + C_{3333} \ln \lambda_3 = \\ = -p + (C_{3333} - 2C_{1133} + 0.5(C_{1111} + C_{1122})) \ln \lambda_3 = -p + E_{33} \ln \lambda_3. \end{aligned} \quad (A1.5)$$

Если вставить зависимости (25) в формулу для эффективного модуля Юнга E_{33} суставного хряща в направлении 3, то можно получить формулу (28).

Приложение 2

Общее решение обыкновенных дифференциальных уравнений (38) для $i = \varphi, \vartheta$ имеет следующий вид:

$$v_{i0\Sigma} = C_{i1} v_{01}(\chi) + C_{i2} + v_{i03}(\chi), \quad (A2.1)$$

где C_{i1}, C_{i2} – постоянные интегрирования. Частные решения однородных и неоднородных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$v_{01}(\chi) = \int_0^{\chi} e^{-\chi_1^2} d\chi_1, \quad v_{02}(\chi) = 1, \quad (A2.2)$$

$$v_{i03}(\chi) = -\frac{1}{N_i^2} \frac{\partial p_{10}}{\partial \alpha_i} \left[\int_0^{\chi} e^{\chi_1^2} v_{01}(\chi_1) d\chi_1 - v_{01}(\chi) \int_0^{\chi} e^{\chi_1^2} d\chi_1 \right], \quad (A2.3)$$

где $0 \leq \chi_1 \leq \chi = r_1 N$. При $t_1 \rightarrow 0$ имеем, что $N \rightarrow \infty$, следовательно, $\chi \rightarrow \infty$. При $t_1 \rightarrow \infty$ имеем, что $N \rightarrow 0$. Поэтому при $r_1 > 0$ получаем, что $\chi \rightarrow 0$. При $t_1 > 0$ и $r_1 = 0$ имеем, что $\chi = 0$. Далее имеют место следующие пределы:

$$\begin{aligned} v_{01}(\chi) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ for } \chi \rightarrow \infty, t_1 \rightarrow 0, N \rightarrow \infty, \\ v_{01}(\chi) &= 0 \text{ for } \chi \rightarrow 0, r_1 = 0, 0 < t_1 < t_2 < \infty, N > 0, \\ v_{i03}(\chi) &= 0 \text{ for } \chi \rightarrow 0, r_1 = 0, 0 < t_1 < t_2 < \infty, N > 0, i = \varphi, \vartheta, \end{aligned} \quad (A2.4)$$

$$v_{\varphi 03}(\chi) = -\frac{r_1^2}{2 \sin \vartheta_1} \frac{\partial p_{10}}{\partial \varphi} \text{ for } \chi \rightarrow 0, \quad r_1 > 0, \quad t_1 \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow 0,$$

$$v_{\vartheta 03}(\chi) = -\frac{r_1^2}{2} \frac{\partial p_{10}}{\partial \vartheta_1} \text{ for } \chi \rightarrow 0, \quad r_1 > 0, \quad t_1 \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow 0. \quad (\text{A2.5})$$

Сферическая головка кости движется только в окружном направлении φ . Поэтому компоненты скорости жидкости на поверхности головки кости в окружном направлении равны окружной скорости сферической поверхности головки кости. Компонента скорости синовиальной жидкости на сферической поверхности головки кости в меридиональном направлении ϑ равна нулю, так как сферическая головка не имеет скорости в направлении ϑ . Вязкая синовиальная жидкость течет вокруг головки кости. Поэтому на поверхности головки кости компонента скорости синовиальной жидкости в направлении высоты зазора равна нулю.

Следовательно, имеем граничные условия:

$$v_{\varphi 0\Sigma}(\chi = 0) = \sin \vartheta_1, \quad v_{\vartheta 0\Sigma}(\chi = 0) = 0, \quad v_{r 0\Sigma}(\chi = 0) = 0,$$

при $r_1 = 0 \Leftrightarrow \chi = 0$ и $0 < t_1 < t_2 < \infty, N > 0$. (A2.6)

Сферическая вертлужная впадина не имеет движения в окружном и меридиональном направлениях. Однако сферическая впадина имеет некоторые колебания в направлении высоты зазора, поэтому высота зазора изменяется во времени, а компоненты скорости синовиальной жидкости на поверхности чашечки равны нулю в окружном и меридиональном направлениях. Компонента скорости синовиальной жидкости в направлении высоты зазора r равна первой производной от высоты зазора по времени. Поэтому имеют место следующие условия:

$$v_{\varphi 0\Sigma}(\chi = M) = 0, \quad v_{\vartheta 0\Sigma}(\chi = M) = 0, \quad v_{r 0\Sigma}(\chi = M) = \text{Str} \frac{\partial \varepsilon_{T1}}{\partial t_1},$$

при $r_1 \rightarrow \varepsilon_1 \Leftrightarrow \chi \rightarrow N\varepsilon_{T1} = M$ и $0 < t_1 < t_2 < \infty, N > 0$, (A2.7)

где $\varepsilon_T = \varepsilon_0 \varepsilon_{T1}$ – высота зазора, ε_{T1} – безразмерная полная высота зазора, $\text{Str} = 1/\omega t_0$.

Вставляя условия (A2.4), (A2.5) и (A2.6) в общее решение (A2.3), получаем:

$$C_{\varphi 1} v_{01}(\chi = 0) + C_{\varphi 2} + v_{\varphi 03}(\chi = 0) = \sin \vartheta_1, \text{ при } r_1 = 0,$$

$$C_{\varphi 1} v_{01}(\chi = M) + C_{\varphi 2} + v_{\varphi 03}(\chi = M) = 0, \text{ при } r_1 = \varepsilon_{T1}, \quad (\text{A2.8})$$

$$C_{\vartheta 1} v_{01}(\chi = 0) + C_{\vartheta 2} + v_{\vartheta 03}(\chi = 0) = 0, \text{ при } r_1 = 0,$$

$$C_{\vartheta 1} v_{01}(\chi = M) + C_{\vartheta 2} + v_{\vartheta 03}(\chi = M) = 0, \text{ при } r_1 = \varepsilon_{T1}.$$

Учитывая пределы (A2.4) и (A2.5), решение системы уравнений (A2.8) можно записать в виде:

$$C_{\varphi 1} = -\frac{\sin \vartheta_1 + v_{\varphi 03}(M)}{v_{01}(M)}, \quad C_{\vartheta 1} = -\frac{v_{\vartheta 03}(M)}{v_{01}}, \quad C_{\varphi 2} = \sin \vartheta_1, \quad C_{\vartheta 2} = 0. \quad (\text{A2.9})$$

Далее решение уравнений (A2.1-A2.3, A2.9) подставляется в правую часть уравнения (39).

Тогда общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (39) имеет следующий вид:

$$V_{i1\Sigma}(\chi) = C_{i3}v_{11}(\chi) + C_{i4}v_{12}(\chi) + v_{i13}(\chi) \text{ for } i = \varphi, \vartheta, \quad (\text{A2.10})$$

где C_{i3}, C_{i4} – постоянные интегрирования. Частные решения имеют следующий вид:

$$v_{11}(\chi) = \chi e^{-\chi^2}, \quad v_{12}(\chi) = \chi e^{-\chi^2} \int_d^{\chi} \frac{1}{\chi_1^2} e^{-\chi_1^2} d\chi_1, \quad (\text{A2.11})$$

$$\begin{aligned} v_{i13}(\chi, C_{i1}) = & \\ = v_{11}(\chi) \int_0^{\chi} & \left\{ C_{i1} \chi_1(\chi_1 + 2) - \left(1 + \frac{\chi_1}{2}\right) e^{\chi_1^2} \frac{d^2(v_{i03}(\chi_1))}{d\chi_1^2} + \frac{1}{N_i^2} \frac{\partial p_{11}}{\partial \alpha_i} \right\} v_{12}(\chi_1) d\chi_1 + \\ + v_{12}(\chi) \int_0^{\chi} & \left\{ \left(1 + \frac{\chi_1}{2}\right) e^{\chi_1^2} \frac{d^2(v_{i03}(\chi_1))}{d\chi_1^2} + \frac{1}{N_i^2} \frac{\partial p_{11}}{\partial \alpha_i} - C_{i1} \chi_1(\chi_1 + 2) \right\} v_{11}(\chi_1) d\chi_1, \end{aligned} \quad (\text{A2.12})$$

для $i = \varphi, \vartheta, 0 < d \leq \chi_1 \leq \chi$.

Решение (A2.10) представляет коррекцию компонент скорости синовиальной жидкости, вызванные вязкоупругими свойствами смазки. Имеют место следующие пределы:

$$\begin{aligned} v_{11}(\chi) = 0 \text{ при } \chi \rightarrow 0, r_1 = 0, 0 < t_1 < t_2 < \infty, N \rightarrow \infty, \\ v_{12}(\chi) = -1 \text{ при } \chi \rightarrow 0, r_1 = 0, 0 < t_1 < t_2 < \infty, N > 0, \\ v_{i13}(\chi) = 0 \text{ при } \chi \rightarrow 0, r_1 = 0, 0 < t_1 < t_2 < \infty, N > 0, i = \varphi, \vartheta. \end{aligned} \quad (\text{A2.13})$$

Коррекция компонент скорости синовиальной жидкости не может изменить граничные условия (A2.5), (A2.6), которые предполагаются на поверхности головки кости и вертлужной впадины в окружном и меридиональном направлениях. Поэтому для коррекции компонент скорости имеются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} v_{\varphi1\Sigma}(\chi = 0) = 0, v_{\vartheta1\Sigma}(\chi = 0) = 0, \\ \text{при } r_1 = 0 \Leftrightarrow \chi = 0 \text{ и } 0 < t_1 < t_2 < \infty, N > 0, \\ v_{\varphi1\Sigma}(\chi = M) = 0, v_{\vartheta1\Sigma}(\chi = M) = 0, \\ \text{при } r_1 \rightarrow \varepsilon_1 \Leftrightarrow \chi \rightarrow N\varepsilon_{T1} = M \text{ и } 0 < t_1 < t_2 < \infty, N > 0. \end{aligned} \quad (\text{A2.14})$$

Накладывая условия (A2.13) на общее решение (A2.10), получаем:

$$\begin{aligned} C_{\varphi3}v_{11}(\chi = 0) + C_{\varphi4}v_{21}(\chi = 0) + v_{\varphi13}(\chi = 0) = 0, \text{ при } r_1 = 0, \\ C_{\varphi3}v_{11}(\chi = M) + C_{\varphi4}v_{21}(\chi = M) + v_{\varphi13}(\chi = M) = 0, \text{ при } r_1 = \varepsilon_{T1}, \\ C_{\vartheta3}v_{11}(\chi = 0) + C_{\vartheta4}v_{21}(\chi = 0) + v_{\vartheta13}(\chi = 0) = 0, \text{ при } r_1 = 0, \\ C_{\vartheta3}v_{11}(\chi = M) + C_{\vartheta4}v_{21}(\chi = M) + v_{\vartheta13}(\chi = M) = 0, \text{ при } r_1 = \varepsilon_{T1}. \end{aligned} \quad (\text{A2.15})$$

Учитывая пределы (A2.13), система уравнений (A2.15) имеет следующее решение:

$$C_{i3} = -\frac{v_{i13}(\chi = M)}{v_{i11}(\chi = M)}, C_{i4} = 0 \text{ for } i = \varphi, \vartheta. \quad (\text{A2.16})$$

Общее решение для компонент скорости синовиальной жидкости (31), (32) с помощью решений (A2.10) может быть записано в следующей безразмерной форме:

$$v_{i1} = C_{i1}v_{o1}(\chi) + C_{i2} + v_{i03}(\chi) + \frac{\text{De} \cdot \text{Str}}{t_1} (C_{i3}v_{i11}(\chi) + C_{i4}v_{i12}(\chi) + v_{i13}(\chi)) + O(\text{De} \cdot \text{Str})^2. \quad (\text{A2.17})$$

Список литературы

1. Hypo-elasticity and elasticity / B. Bernstein // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1960. – V. 6. – P. 89-104.
2. Biotribology of Natural and Replacement Synovial Joints / D. Dowson // Biomechanics of Diarthrodial Joint / C. Van Mow, A. Ratcliffe, S. L-Y. Woo. – New York, Berlin, London, Paris, Tokyo, Hong Kong: Springer-Verlag, 1990. – V. 2. – Chap. 29. – P. 305-345.
3. An analytical model of joint contact / A.W. Eberhardt, L.M. Keer, J.L. Lewis, V. Vithoontien // ASME J. Biomech. Eng. – 1990. – V. 112. – P. 407-413.
4. Fung, Y.C. Bioviscoelastic Solids, in Biomechanics, Mechanical Properties of Living Tissues / Y.C. Fung. – Berlin: Springer Verlag, 1993.
5. Fung, Y.C. The Meaning of Constitutive Equations in Biomechanics, Mechanical Properties of Living Tissues / Y.C. Fung. – Berlin: Springer Verlag, 1993.
6. Fung, Y.C. A First Course in Continuum Mechanics: for physical and biological engineers and scientists, 3-rd ed. / Y.C. Fung. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993.
7. Polymer Dynamics as a Mechanistic Model for the Flow-Independent Viscoelasticity of Cartilage / D.P. Fyhrie, J.R. Barone // Journal of Biomechanical Engineering, – 2003. – V. 125. – No. 4. – P. 578-584.
8. Estimation of in Situ Elastic Properties of Biophasic Cartilage Based on a Transversely Isotropic Hypo-elastic Model / J.J. Garcia, N.J. Altiero, R.C. Haut // Journal of Biomechanical Engineering. – 2000. – V. 122. – P. 1-8.
9. Finite deformation of soft tissue: Analysis of a mixture model in uni-axial compression / M.H. Holmes // ASME J. Biomech. Eng. – 1986. – V. 108. – P. 372-381.
10. Hypo-elastic Anisotropic Model of Soft Tissues / S. Jemioło, J.J. Telega, C. Michalak // Acta Bioeng. Biomechanics. – 2000. – V.2. – № 1. – P. 235-240.
11. A Single Integral Finite Strain (sifc) Model of Ligaments and Tendons / G.A. Johnson, K.R. Rajagopal, S.L.Woo // Advances in Bioengineering. – 1992. – V. 22. – P. 245-248.
12. Kącki, E. Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki / E.Kącki. – Warszawa: WNT, 1989.
13. Knopp, K. Szeregi nieskończone / K. Knopp. – PWN, 1956.
14. Maurel, W. Biomechanical Modells for Soft Tissue Simulation / W. Maurel, Y. Wu, D. Thalmann. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1998.
15. Fluid transport and mechanical properties of articular cartilage / V.C. Mow, M. Holmes, H. Lai // Journal of Biomechanics. – 1984. – V. 17. – P. 337-394.
16. Mow, V.C. Biomechanics of Diarthrodial Joints / V.C. Mow, A. Ratcliffe, S. Woo. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1990.
17. Friction, lubrication and wear of diarthrodial joints / V.C. Mow, L.J. Soslowsky // Basic Orthopedic Biomechanics / V.C. Mow, W.C. Hayes. – New York: Raven Press, 1991. – P. 254-291.
18. Mow, V.C. Cell Mechanics and Cellular Engineering / V.C. Mow, F. Guilak. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1994.
19. Nowacki, W. Teoria sprężystości / W. Nowacki. – Warszawa: PWN, 1970.
20. The pathophysiology of cartilage diseases / Steinhagen, B. Kurz, O. Niggemeyer, J. Bruns // Ortopedia Traumatologia Rehabilitacja. – 2001. – V. 3. – № 2. – P. 163-168.
21. Ralston, A. A First Course in Numerical Analysis / A. Ralston. – New York, Toronto, London, Sydney: McGraw Hill Co, 1965.

22. The Impulsive Motion of a Flat Plate in a Viscoelastic Fluid / I. Teipel // *Acta Mechanica*. – 1981. – V. 39. – P. 277-279.
23. *Truesdell, C. A First Course in Rational Continuum Mechanics* / C. Truesdell. – Baltimore: John Hopkins University, 1972.
24. Hypo-elasticity / C. J. Truesdell // *Arch. Ration. Mech. Anal.* – 1955a. – V. 4. – P. 83-133.
25. Tribologie in Medizin / M. Ungethum, W. Winkler-Gniewek // *Tribologie Schmierungstechnik*. – 1990. – V. 5. – P. 268-277.
26. Metoda wyznaczania parametrów biologicznego smarowanego cieczą nienewtonowską / K. Wierzcholski, S. Pytko // *Tribologia*. – 1993. – V. 1. – P. 9-12.
27. Analytical calculations for experimental dependences between shear rate and synovial fluid viscosity / K. Wierzcholski, S. Pytko // *Proc. of Internat. Tribology Conference*. – Yokohama, Japan. – 1995. – V. 3. – P. 1975-198.
28. The method of solutions for hydrodynamic lubrication by synovial fluid flow in human joint gap / K. Wierzcholski // *Control and Cybernetics*. – 2002. – V. 31. – No. 1. – P. 91-116.
29. Capacity of deformed human hip joint gap in time-dependent magnetic field / K. Wierzcholski // *Acta of Bioengineering and Biomechanics*. – 2003. – V. 5. – No. 1. – P. 43-65.
30. Pressure distribution in Human Joint Gap for elastic cartilage and time-dependent magnetic field / K. Wierzcholski // *Russian Journal of Biomechanics*. – 2003. – V. 7. – No. 1. – P. 24-46.
31. Tribologie für menschliche Gelenke / K. Wierzcholski // *Tribologie und Schmierungstechnik*. – 2002. – V. 5. – P. 5-13.
32. Mathematical Modeling of Ligaments and Tendons / S-Y. Woo, G.A. Johnson, B.A. Smith // *Journal Biomechanical Engineering*. – 1993. – V. 115. – P. 468-473.
33. Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate / H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers // *J. Elast.* – 1997. – V. 47. – P. 51-68.

IMPULSIVE LUBRICATION OF HIP JOINT FOR HYPO-ELASTIC CARTILAGE MODEL

K.Ch. Wierzcholski (Gdynia, Poland)

A hypo-elastic model of cartilage surface in human hip joint is presented here for suddenly changes of lubrication parameters after injury. Hence, pressure distribution and capacity as well friction force and friction coefficient radically decrease or increase its values in several microseconds after the trauma. These changes are very difficult to measure, hence the proper numerical research in this field is very important. To obtain the right numerical results we suggest to perform the derivation of behaviour of joint gap for hypo-elastic cartilage.

Key words: hip joint impulsive lubrication, hypo-elastic skeleton of cartilage.

Получено 22 января 2005