

УДК 531/534: [57+61]

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ЖЕВАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ЧЕЛОВЕКА

А.А. Киченко^{*}, А.Ю. Шумихин^{*}, В.М. Тверье^{*}, Ю.И. Няшин^{*}, Е.Ю. Симановская^{},
А.Н. Еловикова^{**}**

^{*} Кафедра теоретической механики Пермского государственного технического университета, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29а, e-mail: nyashin@theormech.pstu.ac.ru

^{**} Кафедра детской стоматологии и ортодонтии Пермской государственной медицинской академии, Россия, 614990, Пермь, ул. Куйбышева, 39

Аннотация. В работе представлена математическая модель, позволяющая определить силовые факторы, действующие на нижнюю челюсть человека при различных жевательных усилиях. Модель позволяет раскрыть статическую неопределённость жевательной системы человека при помощи методов оптимизации. В качестве критерия оптимизации предложена нелинейная (минимаксная) целевая функция. Нелинейная задача оптимизации сведена к последовательному итерационному решению линейных задач симплекс-методом. В результате получены зависимости мышечных сил и сопутствующих суставных реакций от силы кусания. Сопоставления результатов с аналогичными данными, полученными из ряда других работ, подтвердили надёжность предложенной модели. Также был проведён анализ чувствительности, который показал устойчивость модели к входным данным. В дальнейшем представленная модель могла бы быть использована при описании напряжённо-деформированного состояния нижней челюсти и в области протезирования.

Ключевые слова: жевательная система человека, жевательные мышцы, оптимизация, силовые факторы, статическая неопределимость.

Введение

Мышечные усилия, проявляемые при жевании, кусании, разговоре и прочих движениях челюсти, представляют интерес для многих научных дисциплин – физиологии, биомеханики, медицины. Интерес этот определяется во многом запросами практики (создание протезов, профилактика и лечение заболеваний жевательного аппарата). Важна, однако, и теоретическая сторона данной проблемы: выявление, каким образом центральная нервная система (ЦНС) управляет движениями нижней челюсти и вовлекает мышцы в акт кусания и жевания. Математическая модель, определяющая нагрузки, действующие в височно-нижнечелюстном суставе (ВНЧС), могла бы дать клиницистам информацию относительно суставных реакций пациента. Производители имплантатов ВНЧС могли бы использовать данную информацию для проверки новых конструкций и материалов протезов. Необходимость получения данной информации объясняется ещё и тем, что ВНЧС и сам жевательный аппарат человека являются не очень хорошо изученными с точки зрения возникающих в них

силовых факторов. Например, в ряде работ считается, что ВНЧС является вообще не нагруженным, другие авторы утверждают, что в нем возникают реакции величиной в несколько сотен ньютонов [1]. Информация о силах, действующих на нижнюю челюсть, может быть полезна при описании напряжённо-деформированного состояния нижней челюсти.

Регистрация усилий в жевательных мышцах человека *in vivo* затруднительна; чрезвычайно трудно провести измерение *in vivo* нагрузок, действующих в ВНЧС. Поэтому все основные методы определения мышечных сил и суставных реакций в настоящее время основаны на механико-математическом моделировании.

Математическая модель

Жевательный аппарат человека как специализированная биомеханическая система имеет очень сложное строение. Он состоит из малodeформируемых тел (кости черепа, в том числе верхняя челюсть, и нижняя челюсть), имеющих подвижное соединение между собой (два ВНЧС); деформируемых тканей с сильно нелинейными свойствами (хрящи ВНЧС, связочный аппарат, суставная капсула); генераторов силы (жевательных мышц с сухожилиями) [2–9].

Нижняя челюсть прикрепляется к черепу двумя синовиальными блоковидными ВНЧС, которые часто моделируются в виде идеальных сферических или цилиндрических шарниров; таким образом, движение челюсти в первом приближении принято считать вращательным. В действительности движения нижней челюсти являются поступательно-вращательными; нижняя челюсть и череп способны двигаться друг относительно друга [10]. Комбинация вращения и поступательного движения позволяет делать сложные движения, что даёт возможность говорить, глотать, жевать. В модели, предложенной в данной работе, ВНЧС считались идеальными сферическими шарнирами.

Взаимно независимые мышцы прилагают силы между нижней челюстью и черепом. Строение мышц не является однородным: любая мышца состоит из мышечных волокон – саркомеров. Каждое волокно имеет свою длину и угол наклона к продольной оси мышцы [11]. Поэтому при моделировании скелетно-мышечной системы человека относительно внутреннего строения мышцы делается предположение об идентичности и однородности мышечных волокон, то есть считается, что они имеют одинаковую длину (число последовательно расположенных саркомеров) и угол наклона к продольной оси мышцы. Также делается предположение об изометрическом сокращении исследуемых жевательных мышц.

Поскольку каждое волокно производит свою (хотя, в силу предположения об однородности мышцы, одинаковую по величине и направлению) элементарную силу, то принимается, что каждая мышца, изометрически сокращаясь, развивает отдельную силу по прямой линии, направленную по линии действия мышцы. Данная сила является результирующей элементарных сил, производимых мышечными волокнами. Хотя такое представление является не всегда адекватным [11], оно значительно упрощает процесс построения и исследования модели.

Для составления уравнений, описывающих статическое равновесие нижней челюсти, в качестве системы отсчета в данной работе была выбрана прямоугольная декартова система координат. Ось x была направлена вперед в среднесагиттальной плоскости, перпендикулярно ей вправо была направлена ось y . Ось z была перпендикулярна осям x и y и была направлена вертикально, то есть перпендикулярно к окклюзионной плоскости верхних зубов. Окклюзионная плоскость была определена как

плоскость, проходящая через первый резец (I1) и первый моляр (M1). Данная система отсчёта наиболее часто употребляется при определении координат точек прикрепления мышц к черепу.

Мышечные силы (\mathbf{F}_i) сбалансированы суставными реакциями, которые возникают в правом и левом ВНЧС (\mathbf{R}_j), и силами кусания (\mathbf{F}_b). Далее, в данной работе считаются априорно известными по величине, направлению и точке приложения статические нагрузки на нижнюю челюсть (силы кусания), то есть здесь с силой кусания можно обращаться как с независимой величиной, варьируемой по перечисленным выше параметрам. Заданная сила кусания будет компенсироваться мышечными силами и суставными реакциями. В качестве неизвестных переменных величин будут выступать мышечные силы и суставные реакции.

Таким образом, так как все силовые факторы в жевательной системе являются скомпенсированными, имеет место статическое равновесие нижней челюсти. Условия статического равновесия можно записать в виде уравнений (1) и (2):

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^2 \mathbf{R}_j + \mathbf{F}_b = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i + \sum_{j=1}^2 \mathbf{M}_j + \mathbf{M}_b = 0, \quad (2)$$

где N – число рассматриваемых мышц; \mathbf{R}_1 – реакция в правом ВНЧС; \mathbf{R}_2 – реакция в левом ВНЧС. Необходимо отметить, что, поскольку направление суставных реакций в ВНЧС заранее неизвестно, то реакция в каждом суставе будет представлена в виде трёх взаимно перпендикулярных базисных компонент. Также следует отметить, что анатомическая информация, использованная при составлении уравнений (1), (2), была взята из различных источников [12–14].

Данная система уравнений будет иметь единственное решение, когда число неизвестных переменных меньше или равно шести. Шести уравнений статического равновесия нижней челюсти недостаточно, чтобы найти все неизвестные величины: мышечные силы и сопутствующие им суставные реакции. Таким образом, жевательная система человека является механически избыточной и не может быть просто описана уравнениями статического равновесия; получена статически неопределимая задача, для которой обычными алгебраическими методами нельзя получить однозначное решение. Соотношения между силой кусания и мышечными силами не являются единственными. Отсюда следует, что существует бесконечное число возможных комбинаций жевательных мышц, которые могут быть вовлечены для создания одной и той же силы кусания. Следовательно, необходимо сделать данную систему статически определимой. Для этого можно либо использовать какие-нибудь методы снижения числа неизвестных до числа уравнений или определяющие соотношения, которые позволили бы повысить число уравнений до числа неизвестных системы, либо применить некоторые методы оптимизации для раскрытия статической неопределённости данной системы [11].

В настоящее время основным путем раскрытия статической неопределённости системы уравнений является оптимизация. Метод оптимизации позволяет получить единственное решение системы без выравнивания числа уравнений и неизвестных или каких-либо других видоизменений системы. Оптимизация – это математический метод для решения статически неопределимых систем уравнений, где используется критерий оптимизации – целевая функция, которая подвергается набору ограничений. Целевая функция является математическим выражением; она описывает некоторое оптимальное

состояние рассматриваемой системы. Целевая функция подвергается минимизации или максимизации и подчиняется ряду ограничений в форме неравенств или равенств, которыми обычно являются уравнения статического равновесия системы [15].

Существует целый ряд целевых функций, с помощью которых производится решение статически избыточных систем уравнений [1, 11, 14, 16, 17]. В частности, наиболее распространёнными целевыми функциями являются линейные критерии оптимизации. В данной работе был использован критерий оптимизации, берущий за свою основу идею поиска минимального значения напряжения для мышцы с наибольшим напряжением. Работоспособность данного критерия была подтверждена в работе [1].

Идея данного критерия состоит в следующем. В случае, когда жевательная система развивает определённую по направлению (желаемую) силу кусания, количество возможных вариантов вовлечения жевательных мышц в процесс кусания ограничивается. Когда величина силы кусания увеличивается, область возможных вариантов вовлечения каждой мышцы в создание данной силы уменьшается. Уменьшение происходит из-за неспособности отдельных мышечных элементов производить силы, которые превышают максимальную мышечную силу данного элемента. Когда достигается максимальная сила кусания, ограниченная область мышечных вовлечений сокращается до единственного варианта.

Окончательная целевая функция, которая должна быть минимизирована, выражалась следующим соотношением

$$f(F_i) = \max_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{F_i}{F_{i,max}} \right) \rightarrow \min, \quad (3)$$

где $F_{i,max}$ – максимальная мышечная сила i -й мышцы, которая определяется как

$$F_{i,max} = KA_i. \quad (4)$$

Здесь $K = 37 \text{ Н}\cdot\text{см}^{-2}$ – удельная мышечная сила; A_i – физиологическое поперечное сечение i -й мышцы.

Из вида целевой функции следует, что необходимо осуществлять поиск минимума среди континуума максимальных значений (задача на минимакс). Целевая функция для данной задачи является дискретной функцией. Но данная дискретная функция может быть преобразована в линейную целевую функцию (5) с N дополнительными линейными ограничениями (6)

$$f(F_i) = \mu, \quad (5)$$

$$\frac{F_i}{F_{i,max}} \leq \mu. \quad (6)$$

Таким образом, от первоначальной дискретной задачи оптимизации с шестью ограничениями осуществляется переход к линейной задаче оптимизации, в которой целевая функция уравнения (5) должна быть минимизирована, удовлетворяя условиям $N+6$ линейных ограничений уравнений (1), (2) и (6) с двумя дополнительными условиями.

1. Мышечная сила должна быть больше или равняться нулю. Данное ограничение обусловлено следующим обстоятельством: с точки зрения механики сухожильно-мышечные комплексы следует рассматривать как односторонние связи, так как они

способны сопротивляться растяжению и, подобно гибким нитям, выключаются из работы при появлении в них сил осевого сжатия.

2. Суставные реакции по оси x должны действовать в заднем направлении; суставные реакции по оси z должны действовать в нижнем направлении. Данное ограничение может быть использовано, потому что при кусании наибольшее число мышц действует вперед и вверх, таким образом, суставная реакция должна противодействовать мышечным силам, чтобы поддерживать статическое равновесие.

В работе [1] показано, что целевая функция (5) является выпуклой функцией, а ограничения (1), (2) и (6) ограничивают выпуклое непустое множество. Следовательно, данная задача может быть решена симплекс-методом для линейного программирования, причём задача должна иметь оптимальное решение.

Окончательно решаемая задача может быть сформулирована следующим образом:

$$\begin{aligned}
 f(F_i) = \mu &\rightarrow \min, \\
 \sum_{i=1}^N F_{i_x} + \sum_{j=1}^2 R_{j_x} + F_{b_x} &= 0, \\
 \sum_{i=1}^N F_{i_y} + \sum_{j=1}^2 R_{j_y} + F_{b_y} &= 0, \\
 \sum_{i=1}^N F_{i_z} + \sum_{j=1}^2 R_{j_z} + F_{b_z} &= 0, \\
 \sum_{i=1}^N M_{i_x} + \sum_{j=1}^2 M_{j_x} + M_{b_x} &= 0, \\
 \sum_{i=1}^N M_{i_y} + \sum_{j=1}^2 M_{j_y} + M_{b_y} &= 0, \\
 \sum_{i=1}^N M_{i_z} + \sum_{j=1}^2 M_{j_z} + M_{b_z} &= 0; \\
 F_{i_x} \geq 0, F_{i_y} \geq 0, F_{i_z} \geq 0, R_{j_x} \geq 0, R_{j_y} \geq 0, R_{j_z} \geq 0; \\
 \frac{F_i}{F_{i,\max}} &\leq \mu,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где $F_{i,\max} = KA_i$, $i=1..N$, $j=1,2$.

Необходимо отметить существующие различия между данной работой и работой [1]. В работе [1] была описана трехмерная модель жевательной системы человека, которая включала 18 неизвестных: 16 мышечных сил и 2 суставные реакции. Цель работы [1] заключалась в определении максимальной силы кусания и суставных реакций в данной точке кусания для различных положений этой точки. Усилия в мышцах в данной работе не определялись. Цель настоящей работы заключалась в определении мышечных сил и суставных реакций при априорно заданной силе кусания.

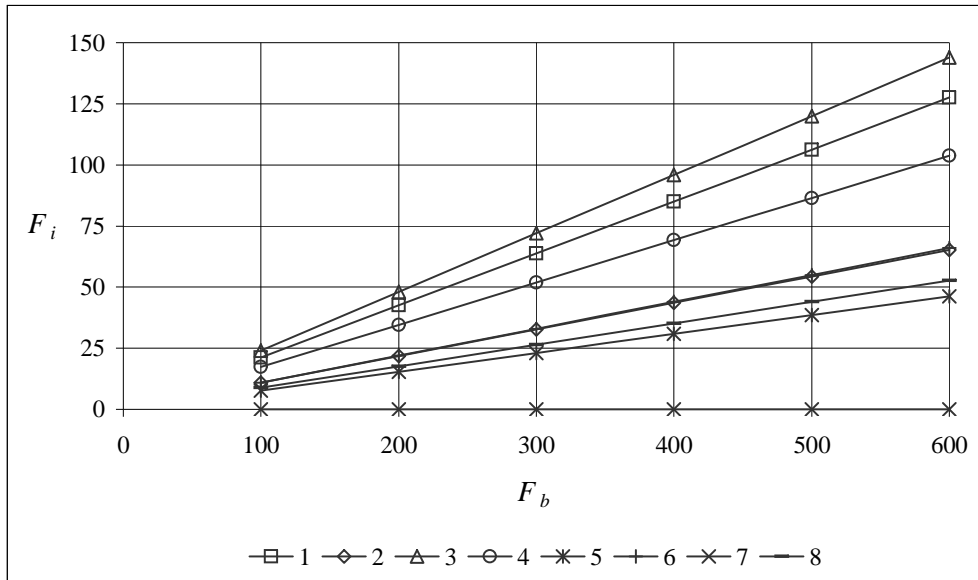


Рис. 1. Зависимости мышечных сил от силы кусания при симметричном кусании на М2. Обозначения: 1 и 2 – поверхностная и глубокая жевательные мышцы; 3 и 4 – передняя и задняя височные мышцы; 5 и 6 – передняя и задняя медиальные крыловидные мышцы; 7 и 8 – верхняя и нижняя головки латеральной крыловидной мышцы

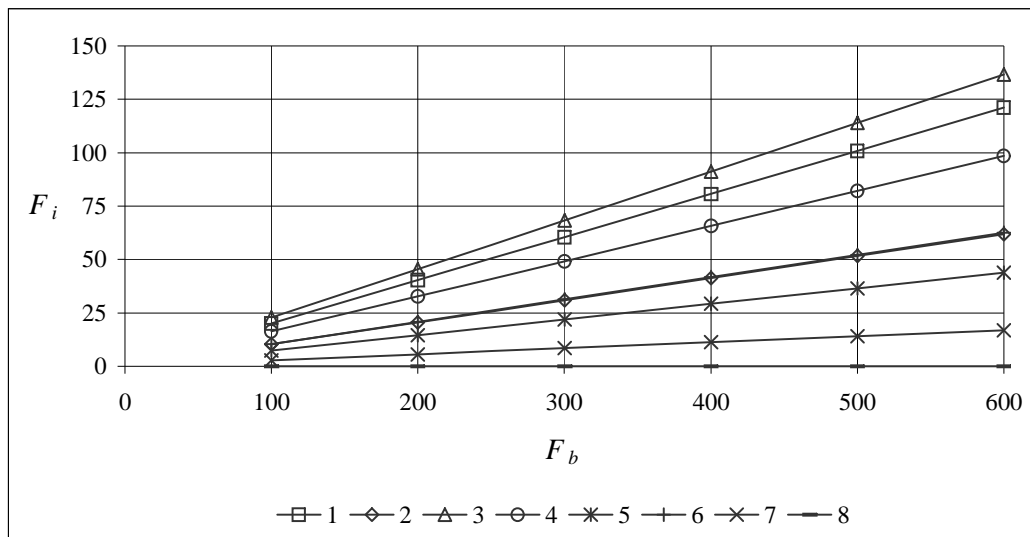


Рис. 2. Зависимости мышечных сил от силы кусания при несимметричном кусании на М1. Обозначения: см. рис. 1

Было рассмотрено два положения точки кусания: вертикальное симметричное кусание на резцах (M2) и вертикальное несимметричное кусание на правом первом моляре (M1). Для сравнения полученного решения с существующими данными [18] была также решена задача о симметричном кусании на правом первом моляре (M1).

Решение производилось при помощи математического пакета *Mathematica 4.0*. В данном математическом пакете была использована стандартная функция оптимизации задачи линейного программирования.

Результаты

В результате решения задачи оптимизации были получены наборы сил, возникающих в мышцах, и сопутствующие реакции в ВНЧС для определённой по точке приложения, величине и направлению силы кусания. Все силовые факторы определялись при силе кусания, изменяющейся от 100 до 600 Н с шагом 100 Н.

Для визуализации полученных результатов были построены графики зависимостей исследуемых силовых факторов от силы кусания. Силы, возникающие в правосторонних поднимающих мышцах при кусании на резцах, показаны на рис. 1. Силы, возникающие в правосторонних поднимающих мышцах при кусании на первый правый моляр, показаны на рис. 2. Как видно из графиков, полученные зависимости имеют линейный вид.

Подробное описание полученных результатов представлено в следующем разделе.

Обсуждение

Для проверки адекватности полученных данных было проведено сравнение решений, полученных при помощи описанной модели, с данными, полученными в работах [14, 18]. В данных литературных источниках удалось встретить как экспериментальные, так и расчётные данные, позволяющие судить о величине мышечных сил, реакций в ВНЧС или силе кусания.

В работе [18] было найдено косвенное подтверждение полученных результатов. Целью работы [18] было описание совместной деятельности жевательной мускулатуры при различных определенных априорно статических условиях нагрузки нижней челюсти. Было необходимо описать уровни вовлечения жевательных мышц, выполняющих разнообразные изометрические двигательные задачи. Для каждой мышцы, пациента и направления силы кусания (7 пациентов × 8 мышц × 6 направлений силы – всего 336 случаев) величины электромиографической активности и силы кусания были связаны функциональной зависимостью. Для сил, превышающих 50 Н, была обнаружена линейная зависимость электромиографической активности мышц от силы и построены графики этих зависимостей; для каждого графика при силе кусания 300 Н (ЭМГ₃₀₀) были определены тангенсы углов наклона данных линейных зависимостей.

На рис. 3, 4 показаны гистограммы, отражающие углы наклона для различных мышц для расчётных данных, полученных в данной работе, и наибольшее и наименьшее значения углов наклона, полученных в работе [18]. Небольшие расхождения могут являться следствием неточности измерений, отличием в расположении точки кусания при симметричном и одностороннем кусаниях (в работе [18] рассматривалось кусание на вторые премоляры), а также индивидуальной анатомией жевательной системы.

В работе [14] была построена математическая модель, основанная на методе оптимизации. В экспериментах были использованы три группы пациентов. Для раскрытия статической неопределённости системы были применены методы нелинейной (квадратичной) оптимизации. Были использованы две целевые функции. В

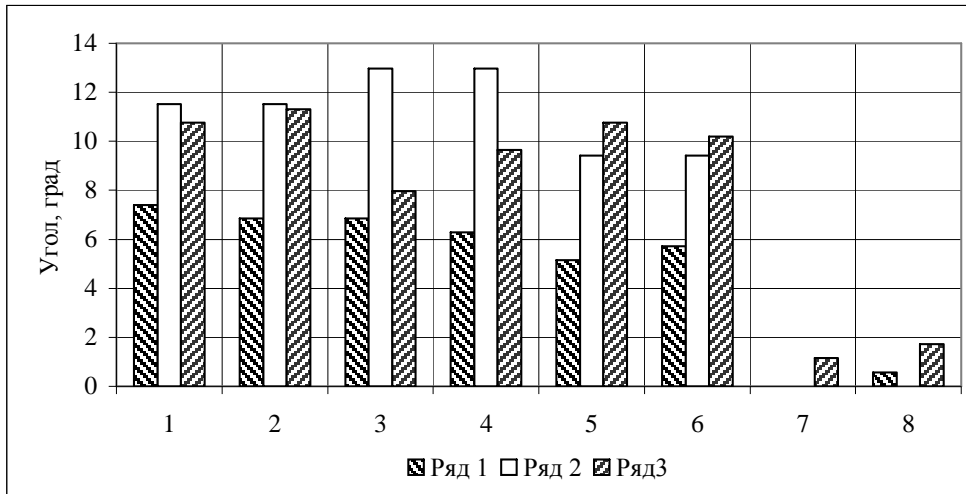


Рис. 3. Сравнение углов наклона зависимостей мышечных сил от силы кусания 300 Н при симметричном кусании. Обозначения: 1 и 2 – правосторонняя и левосторонняя жевательные мышцы; 3 и 4 – правосторонняя и левосторонняя передние височные мышцы; 5 и 6 – правосторонняя и левосторонняя задние височные мышцы; 7 и 8 – правосторонняя и левосторонняя двубрюшные мышцы (переднее брюшко); Ряд 1 и Ряд 3 – наибольшие и наименьшие значения углов наклона работы [18]; Ряд 2 – результаты представленной работы

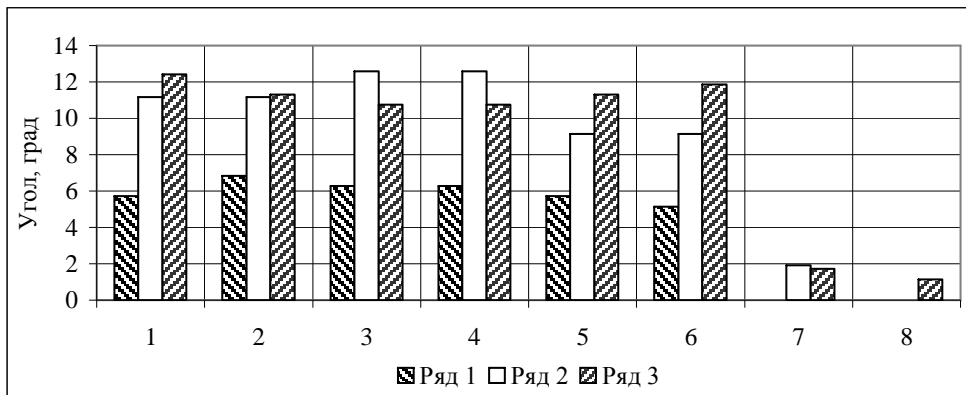


Рис. 4. Сравнение углов наклона зависимостей мышечных сил от силы кусания 300 Н при симметричном кусании. Обозначения: см. рис. 3

одной из них была минимизирована сумма квадратов отношения мгновенной мышечной силы к максимальной мышечной силе $f(F_i) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{F_i}{F_{i,max}} \right)^2$ (A1); в другой

была минимизирована общая мышечная сила в квадрате $f(F_i) = \sum_{i=1}^N F_i^2$ (A2). Для

каждой целевой функции были получены два решения. Одно решение было получено путём введения в систему уравнений экспериментально оцененных сил жевательных и височных мышц, что позволяло уменьшить число неизвестных, и дальнейшей оптимизации. Другое решение было получено при оптимизации исходной системы уравнений, где все мышечные силы были в качестве неизвестных величин. Значения суставных реакций были рассчитаны и затем усреднены для каждого мышечка. Левосторонние и правосторонние мышечные силы были также усреднены

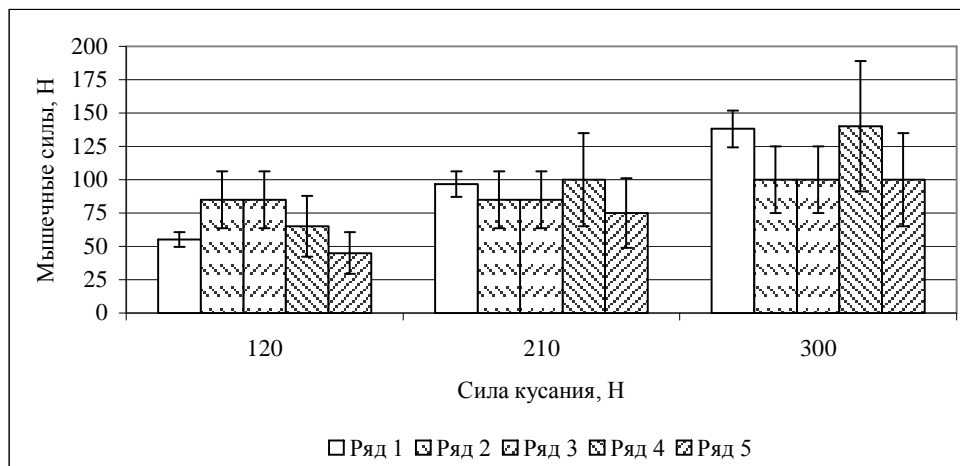


Рис. 5. Сравнение средней величины силы височной мышцы для каждого метода решения для различных сил кусания (120, 210 и 300 Н). Обозначения: Ряд 1 – результаты данной работы; Ряд 2 – целевая функция А1; Ряд 3 – целевая функция А2; Ряд 4 – целевая функция А2, где все мышечные силы неизвестны; Ряд 5 – целевая функция А1, где все мышечные силы неизвестны

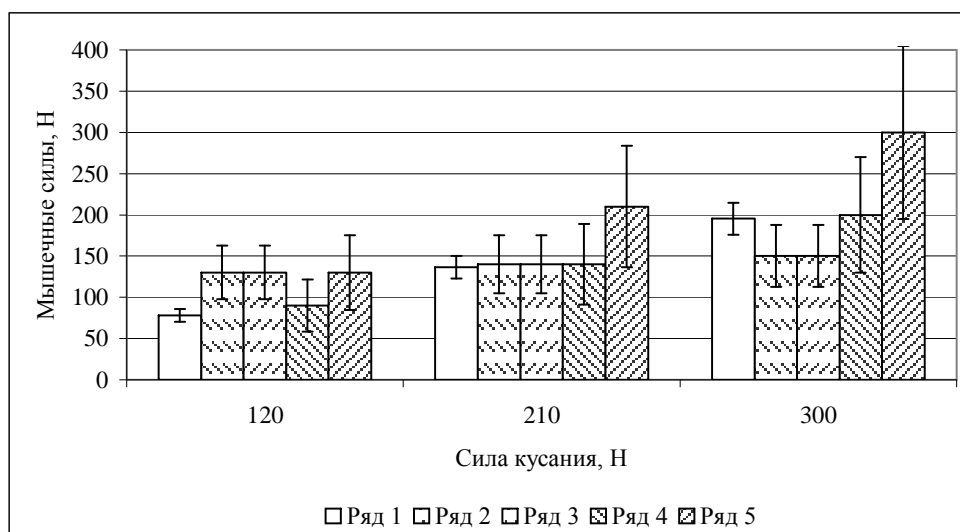


Рис. 6. Сравнение средней величины силы жевательной мышцы для каждого метода решения для различных сил кусания. Обозначения: см. рис. 5

для каждой мышцы. Результаты, полученные из четырёх описанных выше моделей, показаны на рис. 5, 6 и 7. На данных рисунках также производится сравнение результатов работы [14] с результатами, полученными в данной работе.

Как видно из рис. 5–7, данные авторов согласуются с данными работы [14] в той или иной мере. Наибольшей схожести полученные в данной работе результаты достигаются при сравнении их с четвёртой колонкой в каждой из индивидуальных групп пациентов для височной, жевательной и суставной сил. Совпадение результатов может быть следствием схожести целевых функций (А1) и (3). Однако для других методов решения в работе [14] также нет значительных различий с результатами данной работы; эти результаты попадают в величину среднего отклонения данных работы [14].

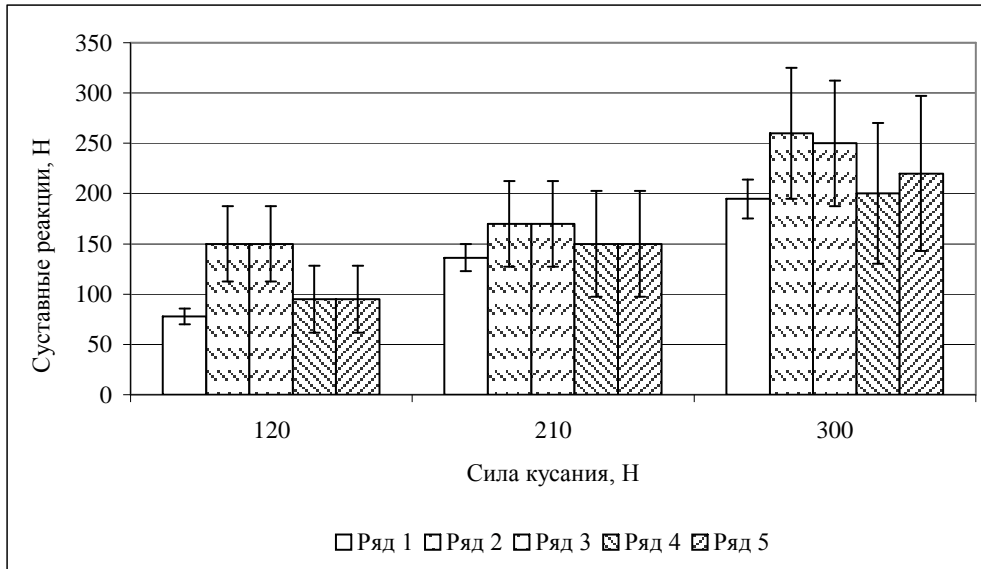


Рис. 7. Сравнение средней величины суставной реакции для каждого метода решения для различных сил кусания. Обозначения: см. рис. 5

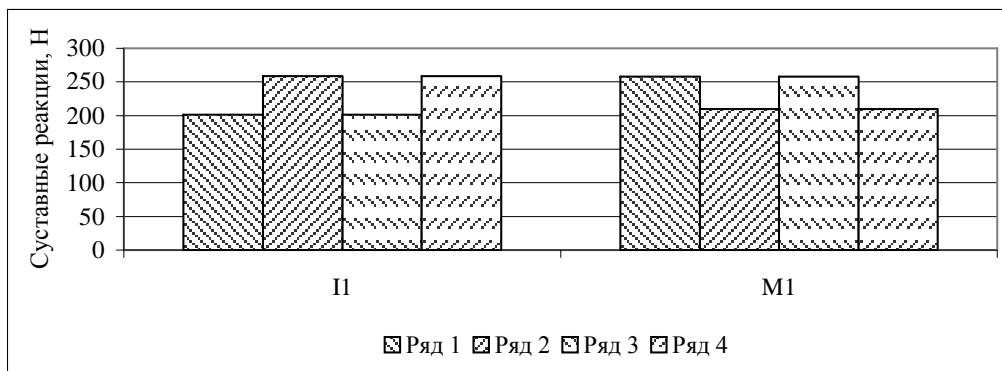


Рис. 8. Сравнение суставных реакций, полученных в данной работе для правого и левого ВНЧС с аналогичными данными работы [1] при симметричном кусании на П1 и М1 для силы кусания 300 Н. Обозначения: Ряд 1 – результаты данной работы для правого ВНЧС; Ряд 2 – результаты работы [1] для правого ВНЧС; Ряд 3 – результаты данной работы для левого ВНЧС; Ряд 4 – результаты работы [1] для левого ВНЧС

Результаты работы [1] показали, что для каждой точки кусания силы кусания могут быть произведены в широком диапазоне величин и направлений. Изменение направления силы кусания оказывает влияние на величину и направление суставной реакции. Рис. 8 позволяет сравнить суставные реакции, полученные в данной работе и работе [1] для симметричного вертикального кусания на П1 и М1.

Рис. 8 показывает, что полученные в данной работе суставные реакции отличаются не столь существенно от суставных реакций работы [1]. Существующие отличия можно объяснить различными исходными анатомическими данными и неизвестными силовыми факторами, включёнными в уравнения статического равновесия нижней челюсти.

Можно также отметить, что модель была подвергнута анализу чувствительности выходных параметров (мышечных сил и реакций в ВНЧС) к изменению входных параметров (анатомических данных). Полученные результаты позволили сделать вывод об устойчивости описанной модели [19].

В заключение можно отметить, что, по мнению авторов, полученные результаты доказывают, что описанная модель является достаточно точной. Полученные мышечные усилия и суставные реакции в ВНЧС соответствуют физиологическим данным: при симметричном и одностороннем кусании деятельными являются те мышцы, об активности которых свидетельствуют физиологи и стоматологи. Таким образом, описанная модель для определения усилий в жевательной системе человека является адекватной и ее можно применять в практических целях, например, в стоматологии.

Заключение

В дальнейшем для проверки адекватности описанной модели планируется осуществление эксперимента, заключающегося в измерении электромиографической активности на доступных поверхностных мышцах с одновременным измерением силы кусания с последующим построением графиков зависимостей электромиографической активности от величины силы кусания и расчётом величины силы, которая возникает в данной мышце при данной электромиографической активности и силе кусания.

Для получения данных о силовых факторах, возникающих при кусании у разных людей, в дальнейшем необходимо определять исходные анатомические данные индивидуально для каждого пациента. Индивидуальные наборы анатомической информации увеличили бы точность оценки мышечных сил и уменьшили ошибки в вычислениях суставных реакций конкретных пациентов. Такая математическая модель позволила бы клиницистам использовать эту информацию для индивидуального подхода при проектировании протезов ВНЧС и зубов, а также при разработке новых методологий лечения заболеваний жевательного аппарата человека. Индивидуальные наборы анатомической информации позволят осуществлять более точный расчёт напряжённо-деформированного состояния нижней челюсти. Также использование математической моделей в дальнейшем позволило бы точнее продублировать естественные движения ВНЧС, которое, как известно, не является вращательным, а также определить порядок активации жевательной мускулатуры в процессах жевания и кусания, что в перспективе также может быть использовано в области протезирования.

Список литературы

1. A three-dimensional mathematical model of the human masticatory system predicting maximum possible bite forces / J.H. Koolstra, T.M.G.J. van Eijden, W.A. Weijs, M. Naeije // *Journal of Biomechanics*. – 1988. – Vol. 21, No. 7 – P. 563–576.
2. *Бажанов, Н.Н.* Стоматология / Н.Н. Бажанов. – М.: Медицина, 1970.
3. *Билич, Г.Л.* Анатомия человека: Книга 1 / Г.Л. Билич, М.Р. Сапин. – М.: Издательский дом ОНИКС, 1998.
4. Жевательный аппарат человека как специализированная многоблочная биомеханическая система и её функционально-адаптивные механизмы / Е.Ю. Симановская, М.Ф. Болотова, Ю.И. Няшин, А.П. Осипов // *Российский журнал биомеханики*. – 1999. – Том. 3, № 2. – С. 112–113.
5. Functional adapto-compensating mechanism of the masticatory apparatus as a special biomechanical system / E.Y. Simanovskaya, M.Ph. Bolotova, Y.I. Nyashin, M.Y. Nyashin // *Russian Journal of Biomechanics*. – 1999. – Vol. 3, No. 3. – P. 3–11.
6. Mechanical pressure as generator of growth, development and formation of the dentofacial system / E.Y. Simanovskaya, M.Ph. Bolotova, Y.I. Nyashin // *Russian Journal of Biomechanics*. – 2001. – Vol. 5, No. 3. – P. 14–17.
7. Masticatory adaptation of the human dentofacial system / E.Y. Simanovskaya, M.Ph. Bolotova, Y.I. Nyashin, M.Y. Nyashin // *Russian Journal of Biomechanics*. – 2002. – Vol. 6, No. 2. – P. 15–21.

8. Биомеханические основы лечения зубочелюстных аномалий / А.Н. Еловицова, Е.Ю. Симановская, Л.М. Гвоздѣва, Ю.И. Няшин // *Стоматология*. – 2002. – № 3. – С. 51–54.
9. Reviews and Perspectives of Use of Biomechanical Methods in Children Stomatology / E.Y. Simanovskaya, Y.I. Nyashin // *Russian Journal of Biomechanics*. – 2003, Vol. 7. – No. 3. – P. 10–21.
10. Biomechanical significance of the instantaneous center of rotation: the human temporomandibular joint / P.G. Grant // *Journal of Biomechanics*. – 1973. – Vol. 6, No. 10. – P. 109–113.
11. *Зациорский, В.М.* Нахождение усилий мышц человека по заданному движению / В.М. Зациорский, Б.И. Прилуцкий // *Современные проблемы биомеханики: Сб. науч. тр. / ИПФ РАН – Н. Новгород, 1992.*
12. Three-dimension analysis of the human bite-force magnitude and moment / T.M.G.J. van Eijen // *Journal of Biomechanics*. – 1991. – Vol. 36, No. 7. – P. 535–539.
13. Application and validation of a three-dimensional mathematical model of the human masticatory system *in vivo* / J.H. Koolstra, T.M.G.J. van Eijden // *Journal of Biomechanics*. – 1988. – Vol. 25, No. 2. – P. 173–187.
14. A three-dimensional mathematical model of temporomandibular joint loading / B. May, S. Saha, M. Saltman // *Journal of Biomechanics*. – 2001. – Vol. 16. – P. 389–393.
15. *Ногин, В.Д.* Основы теории оптимизации / В.Д. Ногин. – М.: Высш. шк., 1986.
16. Optimization of muscle-force sequencing in human locomotion / A. Pedotti, V. Krishnan // *J. Math. Biosciences*. – 1978. – Vol. 38. – P. 57–76.
17. A physiologically based criterion of muscle force prediction in locomotion / R. Crowninshield, R. Brand // *Journal of Biomechanics*. – 1981. – Vol. 14. – P. 793–801.
18. Coactivation of jaw muscles: recruitment order and level as a function of bite force direction and magnitude / T.M.G.J. van Eijden // *Journal of Biomechanics*. – 1990. – Vol. 23, No. 5. – P. 475–485.
19. *Арсов, Я.Б.* Оптимизация процессов технологии металлов методами планирования экспериментов / Я.Б. Арсов, Ф.С. Новик. – М.: Машиностроение, 1980.

DETERMINATION OF FORCES ORIGINATING IN THE HUMAN MASTICATORY SYSTEM

**A.A. Kichenko, A.Y. Shumikhin, V.M. Tverier, Y.I. Nyashin,
E.Y. Simanovskaya, A.N. Elovcova (Perm, Russia)**

A mathematical model permitting to determine the force factors operating in the human mandible is represented at different masticatory forces. The model takes into account the static redundancy of the human masticatory system by methods of optimization. As criterion of optimization the nonlinear (minimax) objective function is proposed. The nonlinear problem of optimization is further reduced to a successive iterative solution of linear problems by a simplex-method. The dependences of muscle forces and concomitant joint reactions from biting force are obtained. Comparison of obtained data to the similar force factors obtained from number of other articles testify to reliability of proposed model. Analysis of sensitivity also is made, which shows stability of the model to input data. Hereinafter introduced model could be used at description of stress-strain state of the mandible and in field of a prosthetic repair.

Key words: human masticatory system, masticatory muscles, optimization, force factors, state redundancy.

Получено 26 ноября 2004