

УДК 531/534:57+612.7

## ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНИКИ ТОЛКАНИЯ ЯДРА

**А. Рахикайнен\*, П. Лухтанен\*\***

\*Department of Engineering Physics and Mathematics, Institute of Mathematics, Helsinki University of Technology, PL 1000, 02015 TKK, Otakaari 1, Espoo, Finland, e-mail: ahti.rahikainen@hut.fi

\*\*KIHU – Research Institute for Olympic Sports, Helsinki, Finland

\*Кафедра инженерной физики и математики, Институт математики, Технический университет Хельсинки, Финляндия

\*\*Исследовательский институт олимпийских видов спорта, Хельсинки, Финляндия

**Аннотация.** Цель данной работы состоит в изучении техники толкания ядра и в поиске некоторых путей, способствующих победе на соревнованиях в большом спорте. Основная идея метода исследований заключается в расчете оптимальных значений характеристик, описывающих толкание ядра. Сравнивая оптимальные значения с измеренными [1], можно увидеть, насколько близок толчок к оптимальному. Также можно утверждать, что толчок ногой должен происходить прямо вверх при максимальной жесткости, сопровождаемый вращением тела. Координация толчков рукой и ногой должна быть такой, чтобы они составляли так называемую кинетическую цепь. Это означает, что для поддержания непрерывности движения завершение толчка ногой должно происходить одновременно с началом толчка рукой. Изучение движения свободной руки привело к многообещающим результатам. Так, расчеты показали, что возможно достижение намного лучшей техники толчка по сравнению с той, что используется сейчас. Идея состоит в том, чтобы использовать кинетическую энергию свободной руки для ускорения ядра во время толчка рукой. Колебательные движения свободной руки обычно происходят так, что ее раскачивание заканчивается как раз перед началом толчка рукой. Новый вариант техники позволяет эффективно использовать кинетическую энергию свободной руки для ускорения ядра. В этом случае результат выступления значительно улучшается.

**Ключевые слова:** биомеханика, спорт, толкание ядра, оптимизация.

### Введение

Эта работа опирается на результаты, представленные в работе [2], в которой вместе с работами [3-5] излагается полная последовательность движений при толчке ядра в форме математических уравнений. Исследовательский институт олимпийских видов спорта (КИУ) представил материалы по исследуемому вопросу для проведения измерений [1, 6-8]. При измерениях применялся метод трехмерного координатного представления движений, описанный в работе [9]. В этой работе рассматривается координация толчка ногой и толчка рукой, а также движение свободной руки в процессе толчка рукой. Эти исследования условно считались спортивными, поскольку были доведены до рекомендаций для тренеров [10-14]. В работе [14] изучается

параболическая траектория полета ядра и факторы, оказывающие на нее влияние. После того, как ядро покидает руку толкающего, оно движется по параболической траектории. Существуют, по крайней мере, три фактора, влияющих на дальность полета: скорость отрыва ядра, угол наклона траектории в точке отрыва и высота точки отрыва. Наиболее важный фактор, увеличивающий дальность толчка, – это скорость в момент отрыва от руки. Как показано в работе [14] дальность примерно пропорциональна квадрату скорости отрыва. Угол отрыва не так важен, но он также оказывает непосредственное влияние на результат точка. В работе [14] определен оптимальный угол отрыва, который составил  $42,3^\circ$  при высоте точки отрыва 2,1 метра (в то время как при движении по параболической траектории, соединяющей две точки поверхности земли, оптимальный угол составляет  $45^\circ$ ). Спортсмен может реализовать оптимальный угол, варьируя угол сгиба толчковой руки. Так, оптимальный угол  $42^\circ$  соответствует углу изгиба руки  $39^\circ$ . Толчок рукой с небольшим отклонением угла приводит к более эффективной толчковой силе, а, значит, результативными могут оказаться также углы  $36-39^\circ$ .

Даже минимальные отклонения в технике толкания могут оказать значительное влияние на конечную скорость отрыва ядра. С другой стороны, скорость отрыва – наиболее существенный параметр, влияющий на дальность полета. На соревнованиях разница в один метр является обычной среди профессиональных спортсменов, и наиболее важным фактором, определяющим результат, часто становится техничное исполнение толчка. Поэтому следовало бы знать, какой из факторов в наибольшей степени влияет на скорость отрыва. По технике исполнения толчка проведены два исследования: одно – по эффективности толчка ногой и другое – по влиянию вращения тела на эффективность толчка рукой. В этих работах рассмотрено много важных факторов, влияющих на скорость отрыва. В данной работе ищется оптимальный угол толчка рукой, эффективная координация толчков рукой и ногой, а также исследуется вопрос о том, как использовать кинетическую энергию свободной руки для ускорения ядра во время толчка. С помощью этого было бы возможно значительно увеличить скорость точка и, следовательно, дальность полета на 1–1,5 м. Далее описывается ход различных фаз толчка ядра и предлагается эффективная техника, опирающаяся на предшествующие исследования.

На рис. 1-3 изображена вращательная техника толчка. Фаза толчка при планирующей технике в основном должна совпадать с фазой вращения (рис. 3), когда спортсмен вращается и движется вперед на два шага. На рис. 1 представлено начало вращения. На рис. 2 спортсмен достигает скорости вращения работой ног и совершает прыжковое движение. На рис. 2B, 2C тело наклоняется, после чего, раскачивая правую руку и напрягая левую ногу, исполнитель создает скорость вращения и совершает прыжковое движение (рис. 2C, 2D). Во время этого первого шага спортсмен вращается почти по окружности и заканчивает вращение в момент начала толчка ногой, находясь спиной к направлению толчка.

Во время правильно проведенной фазы ускорения (рис. 3) ядро разгоняется до скорости отрыва толчками ногой и рукой. Ускорение ядра начинается с толчка ногой (рис. 3 D-F). После того, как проходит половина фазы толчка ногой (в момент, когда спортсмен занимает нижнее положение) и левая нога приходит в контакт с землей, скорость вращения увеличивается за счет мышц тела (рис. 3 E-F). В то же время начинается толчок рукой (рис. 3F). Толчки ногой и рукой накладываются по времени. Толчок ногой происходит приблизительно в течение половины того же времени, что и толчок рукой. Раскачивая свободную руку и правильно выбирая время остановки движения, спортсмен может получить дополнительное увеличение скорости отрыва ядра.

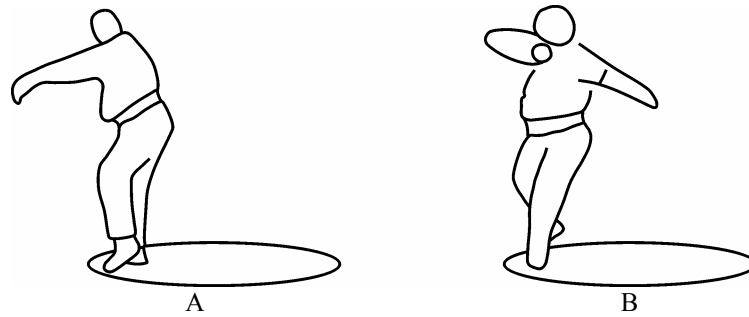


Рис. 1. Начало вращения А, приобретение начальной скорости вращения В

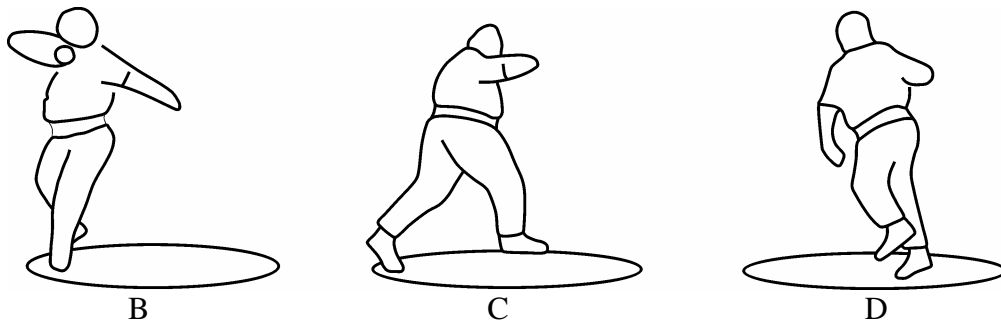


Рис. 2. Вращение тела В и прыжковое движение С, D

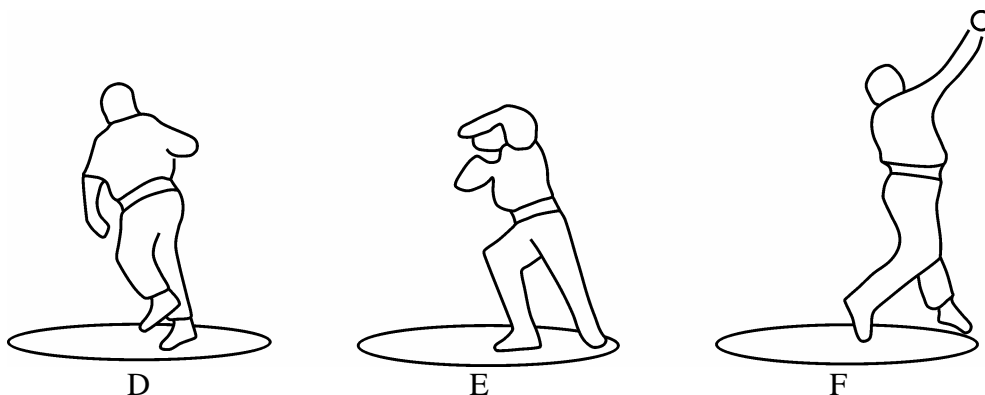


Рис. 3. Фаза толкания во вращательной технике. Толчок ногой D-F увеличивает скорость вращения тела за счет мышц E-F. Толчок рукой E-F. Движение свободной рукой D-F. Соответствующие движения техники скольжения в основе своей такие же

Во время движения при толчке ядро приобретает большую скорость в несколько этапов:

- в начале движения, когда основную роль играет начальная скорость вращения тела (рис. 1 и 2);
- в течение прыжкового движения и толчка ногой после него (рис. 3 D-F);
- в процессе увеличения скорости вращения тела за счет мышечных усилий, когда нога находится на земле (рис. 3 E-F);
- в конце толчка рукой (рис. 3 E-F) и движения свободной рукой и остановки движения.

В данной работе анализируются факторы, связанные с данными фазами разгона, и строится более эффективная техника толчка. К наиболее важным факторам, влияющим на дальность полета, относятся прыжковое движение перед толчком ногой, горизонтальная и вертикальная скорости ядра перед толчком рукой (здесь такая скорость называется переносной скоростью), координация толчков рукой и ногой,

движение свободной рукой, угол толчка рукой, увеличение скорости ядра в течение толчка, конечная скорость отрыва, угол отрыва, высота точки отрыва. Скорость вращения тела достигается наклоном тела и раскачиванием правой ногой (рис. 2). Угловая скорость вращения тела – вертикально ориентированный вектор скорости переноса, а часть энергии вращения переходит в потенциальную энергию прыжкового движения при раскачивании ногой вверх.

После прыжкового движения во время толчка ногой, когда обе ноги находятся в контакте с землей, скорость вращения тела может увеличиться за счет работы мышц (рис. 3). Скорость вращения тела, представляющая собой горизонтальную переносную скорость, значительно увеличивает конечную скорость отрыва ядра. Поэтому вращение тела – это один из наиболее важных факторов, увеличивающих скорость отрыва ядра, и толкатели ядра при выполнении толчка стремятся развить настолько большую скорость вращения, насколько это возможно. После прыжкового движения толкатель находится в начале фазы толчка ногой (рис. 3). Эта фаза начинается с замедления, упругого, затухающего движения, и когда движение доходит до нижнего положения спортсмена, начинает действовать сила отталкивания ногой. Поскольку толчковая нога касается земли, движение передается массе – происходит рессороподобное затухающее колебательное движение, которое зависит от массы спортсмена и от упругих и демпфирующих характеристик ноги. Во время этой фазы упругость сухожилий ноги и мышц преобразует достаточное количество нисходящей скорости прыжкового движения в обратную, направленную вверх скорость. Сухожилия и мышцы спортсмена работают как рессора и поглощают энергию прыжка. Во время толчка ногой поглощенная энергия высвобождается, это увеличивает направленную вверх переносную скорость, создаваемую мышцами. Усилие толчка ногой должно быть направлено строго вверх, потому что в конце толчка ноги оказываются в воздухе, и поэтому движение вперед не может быть остановлено. Наиболее важным фактором управления балансом толкающего ядра выступает направленная вверх осевая сила во время толчка ногой.

В этой работе изучается эффективная координация толчка ногой и рукой и использование кинетической энергии свободной руки для ускорения ядра во время толчка рукой. Эффективная координация толчков ногой и рукой предполагает непрерывность действия руки и ноги, образуя тем самым так называемую кинетическую цепь. Время толчка ногой по отношению к толчку рукой должно быть таким, чтобы завершение толчка ногой и начало толчка рукой происходили одновременно. Причем время должно быть таким, чтобы ускорение от толчка ногой прижимало ядро к руке и приводило к более эффективной толчковой силе, производимой рукой. Другим объектом исследования в данной статье является изучение движения свободной руки во время толчка рукой. Идея заключается в использовании кинетической энергии свободной руки для ускорения ядра во время толчка рукой. При правильном времени торможения качания свободной руки возможно перенести большую часть кинетической энергии свободной руки к ядру. Тогда можно существенно повысить уровень выступления. Техника толчка, используемая в настоящее время, не увеличивает заметно окончательную скорость отрыва ядра. Кинетическая энергия свободной руки не ускоряет ядро настолько, насколько это возможно. В этой работе рассчитывается, насколько можно улучшить результат, если движение свободной руки по времени подобрано так, что она затормаживается в начале толчка рукой, а не до него, как это происходит при традиционном выполнении толчка.

### Оптимальный угол толчка рукой

**Уравнения параболы полета ядра, дальность толчка и оптимальный угол отрыва.** Траектория ядра, дальность толчка и оптимальные углы отрыва и толчка рукой представлены в работах [14, 15]. Координатные оси в этой работе устанавливаются так, что ось  $x$  проходит в направлении толчка, ось  $z$  – вертикально вверх. Вектор скорости отрыва  $N_0$  лежит в плоскости  $xz$ . Ось  $y$  направлена перпендикулярна этой плоскости. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то единственной активной силой является гравитационная сила тяжести, придающая ускорение  $g \approx 9.807 \text{ м/с}^2$ , которое направлено вниз в отрицательном направлении оси  $z$ . Скорость  $v$  вдоль оси  $y$  всегда равна нулю, скорость  $u$  вдоль оси  $x$  остается постоянной  $N_0 \cos \alpha_0$ , а скорость  $w$  вдоль оси  $z$  уменьшается от начального значения на величину  $gt$ . Отличные от нуля компоненты скорости ядра равны

$$u(t) = N_0 \cos \alpha_0 = \text{const}, \quad (1)$$

$$w(t) = N_0 \sin \alpha_0 - gt. \quad (2)$$

Когда ядро движется по траектории полета, координата  $x$  увеличивается с течением времени, а координата  $z$  сначала увеличивается из-за начальной скорости, а после уменьшается из-за ускорения, вызванного гравитацией. Таким образом, выражения для координат имеют следующий вид

$$x(t) = x_0 + t \cdot N_0 \cos \alpha_0, \quad (3)$$

$$z(t) = z_0 + t \cdot N_0 \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} gt^2. \quad (4)$$

Используя эти уравнения, можно вычислить дальность полета в вакууме в зависимости от произвольного значения угла отрыва

$$X = \frac{N_0}{g} \cos \alpha_0 \left[ \sin \alpha_0 + \sqrt{\sin^2 \alpha_0 + \frac{2gz_0}{N_0^2}} \right] + x_0. \quad (5)$$

Оптимизация угла отрыва  $\alpha_0$  в зависимости от скорости отрыва  $N_0$  была описана в работе [15] (формула (6)). Однако скорость отрыва  $N_0$  не остается постоянной, если изменяется угол отрыва  $\alpha_0$ , а также изменяются высота  $z_0$  и дальность точки отрыва  $x_0$ , но эти изменения настолько малы, что они пропущены в уравнении (6):

$$\alpha_{opt} = \arctg \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2z_0 g}{N_0^2}}} \right]. \quad (6)$$

В дальнейшем оптимизация угла отрыва  $\alpha_0$  относительно дальности полета ядра  $X$  будет выполнена с помощью более точного метода. Сила  $F$ , действующая на ядро, и дальность толчка связаны с длиной плечевого сустава  $L$  и вычисляются с помощью измеренных значений, представленных в работе [1]. С использованием этих значений численно находится оптимальный угол отрыва  $\alpha_{opt}$ . На значение величины  $F$  влияют скорость ядра и внутреннее трение мышц и сухожилий, но в данной работе эти

факторы не рассматриваются, поскольку производимый ими эффект почти один и тот же при различных углах отрыва. Следовательно, они существенно не влияют на величину оптимального угла отрыва. Поэтому здесь ради простоты сила  $F$  считается постоянной. Сила  $F$  не является независимой от угла толчка рукой  $\beta_0$ , и она становится больше при меньших углах отрыва. Влияние этого фактора оценивается в конце раздела. Насколько хорошо сочетаются значения величин, использованные в уравнении (6), и значения, принятые в данной работе?

**Сложение векторов скоростей толчка ногой и рукой.** На рис. 4 показана сила, развиваемая рукой  $F$ , сила тяжести ядра  $mg$  и суммарная сила  $F_\beta$ , действующая на ядро.

Мышечная сила толкателя ядра равна

$$F = \sqrt{(mg + F_\beta \sin \beta_0)^2 + F_\beta^2 \cos^2 \beta_0}, \quad (7)$$

а сила, действующая на ядро,

$$F_\beta = -mg \sin \beta_0 + \sqrt{F^2 - m^2 g^2 \cos^2 \beta_0}. \quad (8)$$

Фазы развития скорости ядра, создаваемой при толчке ногой и рукой, представлены на рис. 5. Горизонтальная переносная скорость, приобретаемая за счет вращения спортсмена, представлена вектором  $\mathbf{n}_v$ ; вертикальная переносная скорость создается при толчке ногой и распрямлении тела и представлена вектором  $\mathbf{n}_p$ . Увеличение скорости, развиваемой при толчке рукой, показано вектором скорости  $\mathbf{K}$ , а скорость отрыва ядра равна вектору скорости  $\mathbf{N}_0$ .

Следуя рис. 5, можно записать следующие соотношения

$$N_0 \sin \alpha_0 = K \sin \beta_0 + n_p, \quad (9)$$

$$N_0 \cos \alpha_0 = K \cos \beta_0 + n_v, \quad (10)$$

а углы толчка рукой и скорость отрыва

$$\beta_0 = \arctg \left( \frac{N_0 \sin \alpha_0 - n_p}{N_0 \cos \alpha_0 - n_v} \right), \quad (11)$$

$$\alpha_0 = \arctg \left( \frac{K \sin \beta_0 + n_p}{K \cos \beta_0 + n_v} \right), \quad (12)$$

$$N_0 = \sqrt{(K \cos \beta_0 + n_v)^2 + (K \sin \beta_0 + n_p)^2}. \quad (13)$$

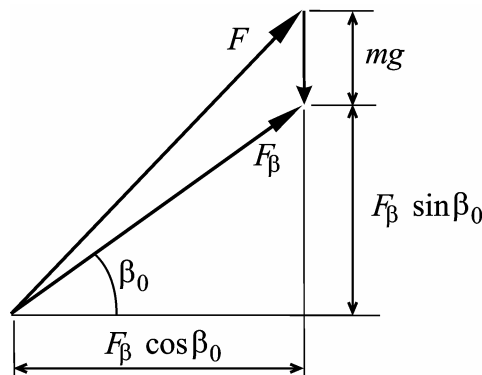


Рис. 4. Сила тяжести ядра  $mg$  уменьшает силу, которую развивают мышцы при толчке

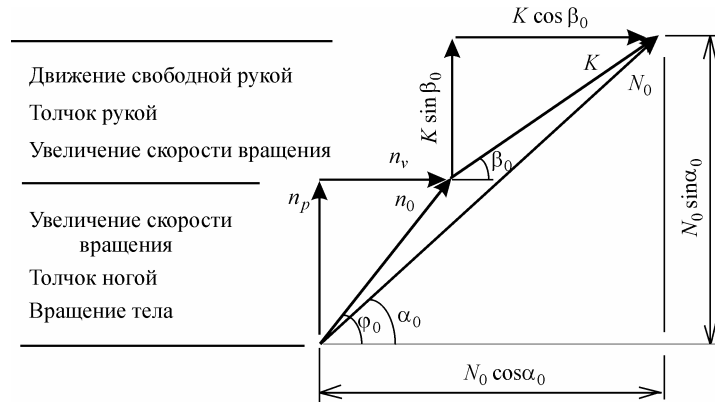


Рис. 5. Развитие скорости ядра во время толчков ногой и рукой

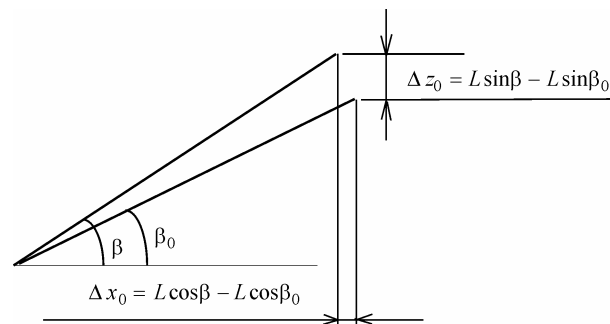


Рис. 6. Влияние изменения угла толчка рукой  $\Delta\beta_0 = \beta - \beta_0$  на точку отрыва  $x_0$

Влияние изменения угла толчка рукой  $\Delta\beta_0 = \beta - \beta_0$  на точку отрыва  $x_0$  представлено на рис. 6. Угол  $\beta_0$  вычисляется по измеренному углу отрыва  $\alpha_0$  (см. работу [1]) с помощью формулы (11). На рис. 6  $L$  означает длину распрямленной руки.

Координаты точки отрыва находятся по рис. 6

$$x_0(\beta) = x_0(\beta_0) + L \cos \beta - L \cos \beta_0, \quad (14)$$

$$z_0(\beta) = z_0(\beta_0) + L \sin \beta - L \sin \beta_0. \quad (15)$$

Кривая скорости во время толчка, полученная в работе [1], показана на рис. 7. Ускорение ядра уменьшается к концу толчка рукой (вдоль части А), поскольку максимальная мышечная мощность постоянна, и потому толчковая сила обратно пропорциональна скорости ядра, а также потому что внутреннее трение руки затормаживает движение. В работе [16], в которой представлено скорректированное определение скорости отрыва при толчке, соответствующем рис. 7, получена скорость отрыва ядра, равная  $N_0 = 13,46$  м/с. Время толчка рукой  $T_K$  можно получить по кадрам видеозаписи толчка. Таким же образом можно получить движение ядра, и возможно различить, на каком кадре записи начинается толчок рукой и на каком рука теряет контакт с ядром. Рассчитанное таким образом время составило  $T_K = 0,11$  сек. В этой точке по кривой скорости определяется скорость перед толчком рукой, т.е. переносная скорость, которая в данном случае равна  $n_0 = 6,5$  м/с. Поскольку факторы, замедляющие увеличение скорости, практически одни и те же при различных значениях угла толчка рукой  $\beta_0$ , оптимальный угол отрыва  $\alpha_0$  можно вычислить при постоянном, равном среднему, значении ускоряющей силы  $F$ . Тогда кривая скорости проходит вдоль прямой В (рис. 7). Угол наклона переносной скорости  $\varphi_0 = \arctg(n_p/n_v)$  измеряется по траектории движения ядра, полученной на основе измерений вычисленных ранее данных (Исследовательский институт олимпийских

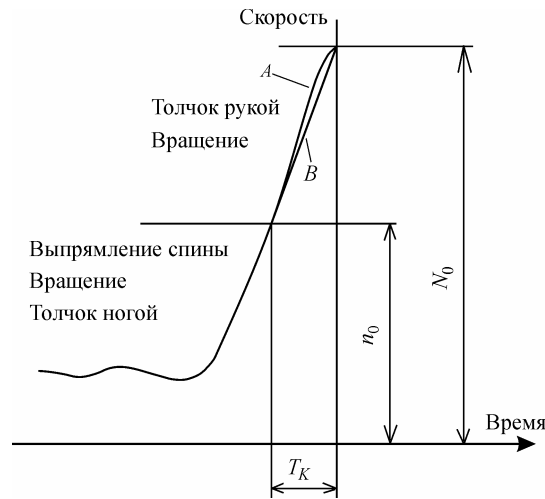


Рис. 7. Скорость ядра во время толчков ногой и рукой. Время толчка рукой  $T_K = 0,11$  сек, скорость до толчка рукой  $n_0 = 6,5$  м/с и скорость отрыва  $N_0 = 13,46$  м/с

видов спорта, Технический университет, Хельсинки). Угол наклона переносной скорости составляет  $\varphi_0 = 44,1^\circ$ , а ее горизонтальная и вертикальная составляющие вычисляются по формулам

$$n_p = n_0 \sin \varphi_0, \quad (16)$$

$$n_v = n_0 \cos \varphi_0. \quad (17)$$

По значениям скорости отрыва  $N_0$ , горизонтальной и вертикальной составляющим переносной скорости  $n_v$  и  $n_p$  с помощью формулы (13) может быть вычислено увеличение скорости  $K$ , вызванное толчком рукой,

$$K = -\cos \beta_0 \cdot n_v - \sin \beta_0 \cdot n_p + \sqrt{(\cos \beta_0 \cdot n_v + \sin \beta_0 \cdot n_p)^2 + N_0^2 - n_v^2 - n_p^2}. \quad (18)$$

Уравнение движения ядра во время толчка рукой при постоянной толчковой силе (включая центробежную силу) имеет вид

$$\frac{F_\beta}{m} = \frac{dv}{dt} = k = const, \quad (19)$$

$$\Rightarrow v = kt. \quad (20)$$

Длина траектории толчка  $L$  по отношению к суставу спортсмена может быть получена интегрированием

$$\frac{ds}{dt} = kt, \quad (21)$$

$$\Rightarrow \int_0^L ds = \int_0^T kt dt, \quad (22)$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} k T_K^2. \quad (23)$$

Толчковая сила, длина траектории толчка и увеличение скорости во время толчка рукой представлены следующими формулами



$$F_{\beta} = \frac{K}{T_K} m, \quad (24)$$

$$L = \frac{F_{\beta} T_K^2}{2m}, \quad (25)$$

$$K = \sqrt{\frac{2L F_{\beta}}{m}}. \quad (26)$$

### Численное определение оптимального угла толчка рукой и угла наклона переносной скорости

Оптимизация угла отрыва  $\alpha_0$  производится так, что дальность толчка определяется по измеренным значениям параметров при реальном толчке. Впоследствии угол толчка рукой при действительном толчке  $\beta_0$  изменяется пошагово на величину  $\Delta\beta_0$ , а дальность толчка вычисляется при новом угле толчка рукой  $\beta = \beta_0 + \Delta\beta_0$ . Используя различные углы толчка рукой, находится максимальная дальность толчка и определяется оптимальный угол толчка рукой.

В работе [16] были получены скорость  $N_0$  и угол  $\alpha_0$  отрыва при реальном толчке. Переносная скорость  $n_0$  вычисляется по графику на рис. 7. Горизонтальная  $n_v$  и вертикальная  $n_p$  переносные скорости вычисляются по уравнениям (16) и (17). Угол толчка рукой определяется по формуле (11), а увеличение скорости во время толчка рукой  $K$  вычисляется по формуле (18). Время толчка рукой  $T_K = 0,11$  сек определяется как и на рис. 7. Масса ядра  $m = 7,27$  кг. Сила и длина траектории при толчке рукой вычисляются по формулам (24) и (25), а сила, действующая на ядро, задается уравнением (7). Толчковая сила считается постоянной.

После этого вычисляется дальность толчка  $X$  при различных углах толчка  $\beta = \beta_0 + \Delta\beta_0$ , используя указанные выше значения толчковой силы  $F$  и длину толчка. Угол толчка рукой  $\beta_0$  определяется по измеренному углу отрыва  $\alpha_0$ .

В зависимости от угла толчка рукой  $\beta = \beta_0 + \Delta\beta_0$  записываются функции для координат точки отрыва  $x_0$  и  $z_0$  (см. уравнения (14) и (15))

$$x_0(\beta) = x_0(\beta_0) + L \cos \beta - L \cos \beta_0, \quad (27)$$

$$z_0(\beta) = z_0(\beta_0) + L \sin \beta - L \sin \beta_0, \quad (28)$$

для скорости отрыва  $N_0$  (см. уравнения (8), (26) и (13))

$$F_{\beta}(\beta) = -mg \sin \beta + \sqrt{F^2 - m^2 g^2 \cos^2 \beta}, \quad (29)$$

$$K = \sqrt{\frac{2L_{\beta} F_{\beta}(\beta)}{m}}, \quad (30)$$

$$N_0(\beta) = \sqrt{(K(\beta) \cos \beta + n_v)^2 + (K(\beta) \sin \beta + n_p)^2}, \quad (31)$$

для угла отрыва  $\alpha_0(\beta)$  (см. уравнение (12))

$$\alpha_0(\beta) = \operatorname{arctg}\left(\frac{K(\beta) \sin \beta_0 + n_p}{K(\beta) \cos \beta_0 + n_v}\right), \quad (32)$$

для дальности толчка (см. уравнение (5))

$$X(\beta) = \frac{N_0(\beta)^2}{g} \cos \alpha_0(\beta) \left[ \sin \alpha_0(\beta) + \sqrt{\sin^2 \alpha_0(\beta) + \frac{2g z_0(\beta)}{N_0(\beta)^2}} \right] + x_0(\beta). \quad (33)$$

Оптимальный угол наклона переносной скорости вычисляется таким же образом, как и оптимальный угол отрыва. Дальность толчка  $X$  определяется для различных значений угла наклона переносной скорости  $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$ , где  $\varphi_0$  – его значение для реального толчка. Полученные во время толчка рукой увеличение скорости  $K$ , угол толчка  $\beta$ , а также переносная скорость  $n_0$  являются постоянными величинами для измеренных параметров.

Тогда в зависимости от ее угла наклона  $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$  выражаются горизонтальная и вертикальная компоненты переносной скорости (см. уравнения (16) и (17))

$$n_p(\varphi) = n_0 \sin \varphi, \quad (34)$$

$$n_v(\varphi) = n_0 \cos \varphi, \quad (35)$$

угол отрыва  $\alpha_0$  (см. уравнение (12))

$$\alpha_0(\varphi) = \operatorname{arctg}\left(\frac{K \sin \beta_0 + n_p(\varphi)}{K \cos \beta_0 + n_v(\varphi)}\right), \quad (36)$$

скорость отрыва  $N_0$  (см. уравнение (13))

$$N_0(\varphi) = \sqrt{(K \cos \beta + n_v(\varphi))^2 + (K \sin \beta + n_p(\varphi))^2}, \quad (37)$$

дальность полета (см. уравнение (5))

$$X(\varphi) = \frac{N_0(\varphi)^2}{g} \cos \alpha_0(\varphi) \left[ \sin \alpha_0(\varphi) + \sqrt{\sin^2 \alpha_0(\varphi) + \frac{2g z_0(\beta)}{N_0(\varphi)^2}} \right] + x_0. \quad (38)$$

В работе [1] с помощью описанной выше методики проанализирован реальный толчок. Угол толчка рукой оптимизируется с точки зрения максимальной дальности толчка, при этом вычисляется соответствующий угол отрыва. Измеренная дальность толчка оказалась равной 20,75 м (см. [1]). Более точное определение начальных параметров толчка приведено в работе [16], в которой экспериментально найдены следующие значения: скорость отрыва  $N_0 = 13,46$  м/с, угол отрыва  $\alpha_0 = 40,1^\circ$  и точка отрыва  $x_0 = 0,05$  м и  $z_0 = 2,29$  м. В соответствии с вычислениями, связанными с рис. 7, время толчка составляет  $T_K = 0,11$  сек, а переносная скорость равна  $n_0 = 6,5$  м/с. Дальность толчка вычисляется при данных начальных значениях, исключая сопротивление воздуха, она составляет 20,65 м. Сопротивление воздуха снижает дальность приблизительно на 15 см, см. работу [14]. Если же учесть сопротивление воздуха, то вычисляемая дальность толчка равна 20,50 м, что соответствует измеренному значению 20,75 м. Разница в значениях в основном возникает из-за неточности экспериментально определяемой скорости отрыва. Дальность измеряемого толчка 20,75 м соответствует расчетной скорости отрыва  $N_0 = 13,55$  м/с, что является лучшей оценкой скорости отрыва. Различие между экспериментальным и расчетным

значениями скорости отрыва дает характерную оценку точности измерений, используемых в данной работе. Однако оптимальные значения углов отрыва и толчка рукой таковы, что эти неточности на них не влияют.

Оптимальный угол толчка рукой  $\beta_{opt}$  вычисляется с помощью уравнений (27)-(33). Процедура оптимизации выполнялась при следующих начальных значениях:  $\alpha_0 = 40,1^\circ$ ,  $\varphi_0 = 44,1^\circ$ ,  $\beta_0 = 36,4^\circ$ . Используя численные расчеты, были определены оптимальные углы толчка рукой  $\beta_0 = 39^\circ$  и отрыва  $\alpha_0 = 41,5^\circ$ . Дальность толчка, соответствующая полученным оптимальным углам, составила 20,78 м, что на 3 см дальше, чем результат действительного толчка. Значит, толчок происходил при оптимальных значениях углов. Значение оптимального угла толчка рукой приблизительно находится в диапазоне  $\beta_{opt} \in [36^\circ, 42^\circ]$ . Дальность толчка в пределах данного интервала отличается не более чем на 4 см от результатов толчка при оптимальных углах. В любом случае угол толчка рукой должен быть не меньше  $35^\circ$ , потому что ниже данной отметки результаты резко снижаются. Соответствующие значения угла отрыва находятся в диапазоне  $\alpha_{opt} = 40^\circ - 43^\circ$ . Причем оптимальный угол толчка рукой вычисляется в предположении того, что при его различных значениях максимальная толчковая сила остается одной и той же. Однако в действительности низкие значения этого угла более эффективны, поскольку спортсмен способен развить большую мышечную силу. Поэтому оптимальный угол находится около значения  $36^\circ$ .

Оптимальный угол наклона переносной скорости  $\varphi_{opt}$  определяется с помощью уравнений (34)-(38). Используя процедуру численной оптимизации, было найдено его оптимальное значение  $43,5^\circ$ , которое соответствует дальности толчка 20,74 м. Поэтому угол наклона переносной скорости измеренного толчка оказался близким к оптимальному. При значениях угла наклона  $\varphi$  переносной скорости в пределах  $[42^\circ, 45^\circ]$  дальность толчка максимум на 1 см отличается от дальности при оптимальном значении  $\varphi_{opt}$ . Поэтому оптимизация угла наклона переносной скорости оказалась несущественной. Увеличение вертикальной и горизонтальной составляющих переносной скорости, полученное при максимальной толчковой силе ноги и при максимальной скорости вращения, приводит к возникновению такого ее угла наклона, который достаточно близок к оптимальному.

Оптимизация угла толчка рукой угла наклона переносной скорости также описана в работе [15]. В части «Оптимизация дальности полета ядра относительно угла толчка рукой» получены оптимальный угол  $\beta_{opt} = 38,81^\circ$  и соответствующий угол отрыва  $\alpha_{opt} = 40,74^\circ$ . Угол наклона переносной скорости составил  $\varphi_{opt} \approx 43,0^\circ$ . В части «Оптимизация дальности полета ядра относительно угла отрыва» выведено уравнение (6) для оптимального угла отрыва. При начальных значениях действительного толчка такая формула позволяет получить значение  $\alpha_0 = 41,9^\circ$ . Оптимизация привела к значению угла отрыва  $41,5^\circ$ . Значит, можно утверждать, что формула позволяет достаточно хорошо находить оптимальный угол отрыва.

### Эффективная координация толчков рукой и ногой

Увеличение скорости, создаваемой во время толчков ногой и рукой, показано на рис. 8. Толчок ногой, направленный вверх, и распрямление тела образуют

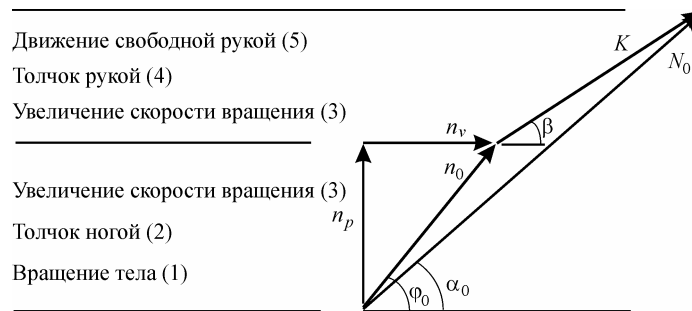


Рис. 8. Увеличение скорости, создаваемого за счет движения свободной рукой (5), толчка рукой (4), увеличения скорости вращения (3), толчка ногой (2), вращения тела (1)

вертикальную переносную скорость  $\mathbf{n}_p$ . Горизонтальная переносная скорость  $\mathbf{n}_v$  создается за счет вращения тела. Результирующая этих сил приводит к появлению переносной скорости  $\mathbf{n}_0$ . Движение спортсмена не может быть направлено вперед, поскольку в конце выполнения толчка нога оказывается в воздухе, и отсутствует контакт с землей для того, чтобы остановить движение. Поэтому толчок ногой должен быть направлен только вверх.

На рис. 8 показаны вектор скорости толчка ядра, переносная скорость  $\mathbf{n}_0$ , увеличение скорости толчка рукой  $\mathbf{K}$  и их результирующая – скорость отрыва  $\mathbf{N}_0$ . Кажется, суммирование векторов подразумевает, что переносная скорость  $\mathbf{n}_0$  и увеличение скорости толчка рукой  $\mathbf{K}$  должны были бы привести к наилучшему результату, если бы они оказались обращенными в одном направлении. Однако в действительности это не так. Из-за влияния других факторов лучший результат достигается, если сумма переносной скорости и увеличения скорости во время толчка рукой направлена немного выше результирующего вектора  $\mathbf{N}_0$ . Как показал численный анализ, оптимальные значения представленного толчка таковы: переносная скорость  $\varphi = 42 - 45^\circ$ , угол толчка рукой  $\beta = 39^\circ$  и оптимальный угол отрыва  $\alpha_0 = 41,5^\circ$ . Если же угол толчка рукой меньше, например при начальных значениях  $\varphi = 44^\circ$ ,  $\beta = 34^\circ$  и  $\alpha_0 = 40^\circ$ , дальность толчка становится на 8 см меньше. Угол отрыва  $\alpha_0 = 40^\circ$  также эффективен, но при более низких значениях результат толчка резко ухудшается. Использование нижних значений углов толчка рукой лучше из-за того, что спортсмен при этом способен развить большую мышечную силу. С другой стороны, при широко раскрытом угле толчка рукой опора спортсмена более устойчива, поскольку тогда большая часть толчковой силы  $\mathbf{F}$  направлена по ноге к земле. Использование вертикальной составляющей силы реакции земли более целесообразно, чем горизонтальной, которая вызывается инерцией вращающегося тела, поскольку это снижает скорость вращения тела. Спортсмену нужно попробовать толчки с различными углами, чтобы понять, насколько они ему подходят, найти тот угол, который будет наилучшим для него, и позволит развить максимальную толчковую силу. По данным первичного эксперимента можно судить о том, что толчковая сила одинакова при углах толчка рукой меньших, чем угол  $\beta = 30^\circ$ , выше которого сила уменьшается по мере увеличения угла. Влияние угла толчка рукой может быть различным для разных спортсменов. Поэтому нужно некоторое тестирующее оборудование для измерения силы толчка рукой при различных углах. Обладая таким устройством, спортсмен мог бы практиковаться в движениях руки, имитируя реальный толчок; и в то же время измеряющие и записывающие устройства следили бы за совершаемыми движениями.

Выполнение толчков рукой и ногой выполняется следующим образом: когда спортсмен ступил на землю после прыжка, толчковая (правая) нога затормаживает его движение, направленное вниз. Это эксцентрическая фаза толчка ногой. В течение этого времени возникают эффекты от упругой силы, создаваемой сухожилиями ноги, от внутреннего трения в ноге и от массы спортсмена и ядра (таблица 1). Когда эта часть движения подходит к концу, начинается движение вверх. Это концентрическая фаза толчка ногой. В течение этого периода, помимо выше указанных сил, действует и ускоряющая мышечная сила, в роли которой выступает упругая сила действия сухожилий ноги. В то же время высвобождается энергия, накопившаяся в сухожилиях во время торможения, а потенциальная энергия прыжка, предшествующего толчку ногой, вызывает направленную вверх скорость. К внешним факторам, увеличивающим эффективность толчка ногой, относится то, что давление в мышцах, создаваемое движением вниз, увеличивает мышечную толчковую мощность. Толчок рукой начинается во время концентрической фазы. В работах [1, 6] рассмотрен толчок рукой, выполняемый с помощью двух различных техник. Спортсмен может иметь настолько сильную хватку ядра, что оно вообще не может двигаться. В этом случае угол сгиба в локте непрерывно увеличивается по мере продвижения руки. Другая возможная техника толчка состоит в том, что ядро, испытывающее действие силы толковой ноги, немного движется. В этом случае кривая изменения угла сгиба в локте указывает на то, что он сначала уменьшается, а затем начинается соответствующая фаза толчка рукой. После этого толчок рукой действует похожим образом, как и толчок ногой во время эксцентрической и концентрической фаз. Функции мышц руки различны, и они работают не так эффективно, как мышцы и сухожилия ноги в эксцентрической фазе. Однако любое улучшение может оказаться определяющим при сравнении результатов толчков. Временной интервал силового воздействия должен начинаться в тот же момент, когда сила реакции опоры, действующая на ногу, приводит к обратному движению ядра. Разгоняющая сила, приложенная со стороны руки, увеличивается в то время, когда в толчок рукой включаются упругие силы сухожилий и мышц руки, а также созданное давление. Во время толчка рукой ускорение ядра снижается. Существуют четыре фактора, снижающих скорость ядра (см. работу [3]):

- Первый: поскольку скорость ядра увеличивается, скорость увеличения ограничивается не максимальной толковой силой, а максимальной мощностью движущих мышц, в которой сила равна мощности, деленной на скорость.
- Второй: внутреннее трение толковой руки, которое можно считать прямо пропорциональным скорости, снижает скорость ядра.
- Третий: так как спортсмен при вращательном движении поворачивается в том же направлении, в котором происходит толчок рукой, развиваемая в последнем случае сила снижается.
- Четвертый: сила реакции, вызванная толчком рукой, стремится снизить угловую скорость вращения верхней части туловища, что приводит также и к снижению скорости ядра.

Эффективным способом компенсировать эти потери в скорости на завершающем этапе толчка рукой является удержание давления в мышцах руки и их мощное действие в самом конце фазы толчка. Это снижает продолжительность периода работы рукой и лучше подходит под узкий временной коридор, в пределах которого должен произойти толчок.

При эффективной технике исполнения толчка толчок ногой скоординирован с толчком рукой так, что они работают как цельная составная кинетическая цепочка. Эффективное действие силы в рамках такой цепочки означает, что сила прикладывается в нужный, правильный момент. Во время такого быстрого движения,

как толчок ядра, невозможно осознанно наблюдать за протеканием процесса движения и улавливать, в какой момент выгоднее приложить силу. Кинетические органы чувств спортсмена, выполняющего данное упражнение, регулируют движение, поэтому он должен научиться слышать собственные ощущения, чтобы суметь контролировать движение. Для того, чтобы выучить правильные движения, необходима практика. Помимо толковых упражнений на поле освоение техники может происходить психологически, которое включает два существенных момента: расслабление и полная концентрация мысли на одном предмете. При этом важно следить, проверять, контролировать мысли и чувства спортсмена.

Таблица 1

Силы, действующие во время толчка рукой и ногой.  
Эксцентрическая фаза 1-3 и концентрическая фаза 1-4

Фаза	Сила	Причина
1	Сила упругого деформирования (соответствующая силе рессоры в машине)	Сухожилия
2	Затухающее движение, замедляющая движение сила (соответствующая амортизатору машины)	Трение в сухожилиях и мышцах
3	Силы инерции (сопротивление изменению скорости)	Масса
4	Сила, развиваемая спортсменом (соответствует силе тяги машины)	Мышечная сила, ускоряющая движение

### Движение свободной рукой

**Влияние запаздывания свободной руки на скорость отрыва ядра.** Правильно выбранное время движения свободной рукой во время толчка другой рукой приводит к увеличению скорости ядра. Последующий технический анализ показывает, что движение свободной руки является наиболее важным фактором, на который можно было бы повлиять, чтобы улучшить результат толчка. Движение свободной рукой можно изучать на основе покадровой видеосъемки, которая имеется в уже указанной работе [7]. Такие кадры показывают движения, совершаемые свободной рукой во время толчков ногой и рукой. Однако последовательные шаги движения представлены в данной работе не в полном объеме, и для более точного исследования Исследовательским институтом олимпийских видов спорта были предоставлены исходные видеоматериалы по реальному толчку. В представленных покадровых изображениях временной интервал между снимками составлял 0,02 сек, так что процесс движения можно было отследить достаточно точно. Движение свободной руки начиналось одновременно с толчком ногой после того, как правая нога вступала в контакт с поверхностью земли. Как только начинается движение, свободная рука немного сгибается, выдвигаясь вперед спортсмена, после чего она движется с размахом в его сторону. Как только свободная рука заканчивает размах, ее движение замедляется. В этот момент скорость верхней части туловища, толкающая рука и ядро ускоряются из-за кинетической энергии, высвободившейся от движения свободной руки. Когда спортсмен завершает поворот в сторону толчка, начинает работать толчковая рука, и увеличение угловой скорости тела приводит к возрастанию скорости ядра.

Исследуя ряд изображений толчка, можно отметить, что размах свободной руки начинается и заканчивается перед толчком рукой. Поэтому кинетическая энергия

свободной руки по большей части переносится на вращение туловища, что не может существенно увеличить скорость ядра. Момент для начала размаха свободной рукой можно выбирать произвольно, и нет необходимости выдерживать такое время размаха, чтобы он заканчивался до начала толчка рукой. Было бы хорошо распределить время размаха так, чтобы его завершение совпадало с началом толчка рукой. В этом случае кинетическая энергия движения свободной руки могла бы эффективно использоваться при толчке рукой. Обе руки напрямую связаны друг с другом, и кинетическая энергия свободной руки передается посредством костной системы верхней половины туловища к толчковой руке и к ядру. Во время толчка рукой, когда рабочая нога находится на земле, с помощью мышц тела поддерживается угловая скорость верхней половины туловища. Это компенсирует эффект от сил реакции толчка рукой, который стремится снизить скорость вращения верхней половины туловища.

Начальное положение для толчка рукой показано на рис. 9 [5]. Угловая скорость свободной руки вокруг вертикальной оси (точка, обозначенная крестом) в этом положении замедляется. Одновременно с этим момент количества движения свободной руки переносится на вращение толкающего ядро и на само ядро, увеличивая его скорость отрыва.

Следующие вычисления показывают, насколько получаются результаты лучше, если замедление свободной руки начинается немного позднее.

Численные значения получены из Приложения «Численные вычисления». Во-первых, вычисляется изменение угловой скорости свободной руки. Момент инерции тела толкающего ядро относительно оси вращения  $X$  в положении, указанном на рис. 9, составляет  $I_k = 2,13 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , а изменение угловой скорости свободной руки (угловая скорость в показанном положении (рис. 9) вычитается из угловой скорости после замедления) составляет  $\Delta\omega = 13,1 \text{ рад/с}$ . Тогда снижение момента количества движения свободной руки равно  $\Delta L_k = \Delta\omega \cdot I_k = 27,9 \text{ кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{рад/с}$ .

Возрастание скорости ядра в начале толчка ядра вычисляется следующим образом: момент инерции спортсмена от талии и вверх (включая обе руки, верхнюю часть туловища и ядро) в начале толчка рукой составляет величину  $I_1 = 5,13 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Уменьшение момента количества движения свободной руки приводит к увеличению момента количества движения самого спортсмена и, следовательно, к увеличению угловой скорости толкающего и ядра  $\Delta\omega_1 = \Delta L_k / I_1 = 5,44 \text{ рад/с}$ . В начале толчка рукой последнее по-прежнему находится у щеки спортсмена, и его расстояние до оси вращения составляет  $r_1 = 0,25 \text{ м}$ . Поэтому скорость отрыва возрастает на  $\Delta N_{01} = r_1 \cdot \Delta\omega_1 = 1,36 \text{ м/с}$ .

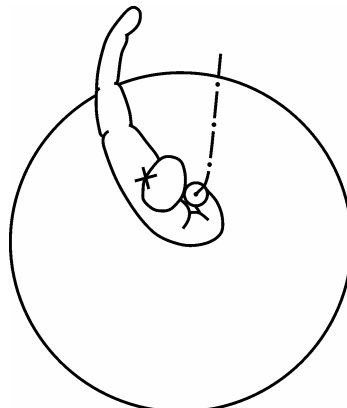


Рис. 9. Запаздывание свободной руки при этом толчке происходит в начале толчка рукой. Траектория ядра во время толчка рукой отмечена прерывистой линией

Увеличение скорости отрыва ядра благодаря снижению угловой скорости свободной руки вычисляется для периода времени толчка рукой, когда ядро отделяется от щеки спортсмена и его расстояние до оси вращения увеличивается. Если замедление свободной руки распланировано по времени так, что оказывается в конце фазы толчка рукой, ядро извлечет большее увеличение скорости из снижения момента количества движения свободной руки. Через 0,04 секунды после начала толчка рукой расстояние от ядра до оси вращения увеличивается на 10 см и составляет  $r_2 = 0,35$  м. Момент инерции толкающего, соответствующий этому положению, равен  $I_2 = 5,58$  кг·м<sup>2</sup>, и, следовательно, увеличение его угловой скорости составляет  $\Delta\omega_2 = \Delta L_k / I_2 = 5,0$  рад/с, а рост скорости ядра –  $\Delta N_{02} = r_2 \cdot \Delta\omega_2 = 1,75$  м/с.

Расчеты показывают, что, правильно выбирая время движения свободной рукой, можно перенести большую часть ее момента количества движения на увеличение скорости отрыва ядра. Задержка начала движения свободной руки на 0,04 с приводит к тому, что скорость ядра возрастает на 0,39 м/с. Такое изменение приводит к увеличению дальности толчка на 1,06 м (в представленном исследовании она увеличилась с 20,79 м до 21,85 м). Для того, чтобы поднять скорость отрыва настолько, насколько это возможно, движение свободной руки должно быть максимально быстрым, траектория движения должна быть широкой, и когда движение завершается, рука должна быть отведена назад.

### Заключение

**Оптимальный угол толчка рукой.** Согласно результатам вычислений оптимальный угол толчка рукой составляет приблизительно  $\beta_{opt} = 36^\circ - 42^\circ$ . Дальность толчка в данных пределах не более чем на 4 см отличается от результатов при оптимальном значении угла. В любом случае угол толчка рукой должен быть не менее  $35^\circ$ , поскольку ниже этого значения дальность толчка резко сокращается. Соответствующие значения угла отрыва лежат в пределах  $\alpha_{opt} = 40^\circ - 43^\circ$ . Оптимальный угол толчка рукой вычисляется в предположении того, что максимальная толчковая сила не изменяется для различных значений углов. Однако в действительности нижние значения углов толчка рукой наиболее эффективны, поскольку тогда спортсмен может развить большую мышечную силу. Поэтому оптимальный угол толчка находится приблизительно около  $36^\circ$ . При углах наклона вектора переносной скорости  $\varphi = 42^\circ - 45^\circ$  дальность толчка отличалась не более чем на 1 см от результата при оптимальном значении. Поэтому оптимизация угла наклона вектора переносной скорости оказалась несущественной. Вертикальная составляющая вектора переносной скорости возникает при толчке ногой вверх от земли. Горизонтальная составляющая возникает из-за вращения тела спортсмена. Использование максимальной силы ног и максимальной скорости вращения приводит к углу наклона, достаточно близкому к оптимальному.

**Координация толчков рукой и ногой.** Техника исполнения толчка рукой бывает двух видов. Спортсмен может иметь настолько сильную хватку ядра, что оно вообще не может двигаться. В этом случае угол сгиба в локте увеличивается непрерывно по ходу толчка рукой. Другая возможная манера толчка заключается в том, что ядро, подверженное воздействию давящей силы толчковой ноги, может немного двигаться. В этом случае кривая угла сгиба в локтевом суставе показывает, что угол сперва уменьшается и только затем собственно начинается рабочая фаза толчка рукой. После



этого толчок рукой действует примерно так же, как эксцентрическая и концентрическая фазы толчка ногой. Функции мышц руки различаются: они не действуют настолько же эффективно, как мышцы и сухожилия ног в эксцентрической фазе, однако, любое преимущество может оказаться решающим при подведении результатов толчка. При правильном подборе времени эффективным может оказаться колебательное движение. Время действия силы должно быть таким, чтобы оно начиналось в тот же момент, когда сила реакции опоры вызывает обратное движение ядра. Измерения указывают на то, что раскачивание перед самой фазой толчка рукой может привести к хорошим результатам. Ускоряющая сила, действующая во время толчка рукой, увеличивается, когда в ускорении ядра также участвует и упругая сила сухожилий руки. Тогда продолжительность фазы толчка рукой снижается, что лучше подходит под узкий временной коридор, в пределах которого должен произойти толчок.

Исследование кривых угла сгиба в локте показывает, что его непрерывное увеличение при толчках рукой всегда создает приблизительно схожие фазы, в то время как колебательные движения перед собственно толчком приводят как к более слабым, так и к более мощным толчковым силам. Раскачивание локтевого сгиба перед толчком может создать более эффективную толчковую силу, поскольку упругость мышц и сухожилий руки может перенести кинетическую энергию толчка ногой в толчок рукой. Другой фактор, влияющий на эффективность толчка рукой, заключается в том, что раскачивание создает давление в мышцах руки, и это увеличивает их способность развивать толчковую силу. Однако сложно реализовать удачное раскачивание перед толчком рукой. Намного реальнее развивать непрерывную максимальную толчковую силу толчка во время его выполнения, но на практике можно заучить эффективную, составную технику раскачивание-толчок рукой. Колебания ядра должны быть минимальны, чтобы избежать сложностей балансирования при вращательном движении. Временной интервал между толчками ногой и рукой необходимо корректировать таким образом, чтобы была возможность реализовать такую последовательность движений. Для этого нужна точная работа кинетических органов чувств, которые верно оценивают эффекты, производимые силами, и контролируют движение.

При эффективной технике исполнения толчок ногой скоординирован с толчком рукой так, что они функционируют как цельная составная кинетическая цепочка. Правильный момент возникновения силы определяет эффективность ее работы в данной последовательности движений. Во время такого быстрого движения, как толчок ядра, невозможно сознательно следить за происходящим и выбирать момент, наиболее подходящий для использования силы. Кинетические органы чувств спортсмена, выполняющего данное упражнение, регулируют движение, поэтому он должен научиться слышать собственные ощущения, чтобы суметь контролировать движение. Для того, чтобы выучить правильные движения, необходима практика. Помимо толковых упражнений на поле освоение техники может происходить психологически.

**Движение свободной рукой.** Движение свободной руки начинается одновременно с толчком ногой после того, как правая нога вступает в контакт с землей. Как только движение начинается, свободная рука немного согнута, располагаясь впереди спортсмена, из этой позиции рука смещается к его боку с размахом. Когда рука заканчивает размах, ее движение затормаживается. В этот момент скорость верхней части туловища вместе с толковой рукой и ядром увеличивается за счет кинетической энергии, высвободившейся из движения замедлившейся свободной руки. Едва спортсмен повернулся один раз в сторону толчка, начинает действовать рабочая рука, и увеличение угловой скорости тела приводит к росту скорости ядра. Исследуя кадровый ряд видеосъемки толчка, можно отметить, что раскачивание свободной рукой

заканчивается как раз перед началом работы толчковой руки. В этом случае кинетическая энергия свободной руки по большей части переходит к вращающемуся телу, что несущественно увеличивает скорость самого ядра. Время начала раскачивания свободной рукой можно выбрать произвольно, и нет никакой необходимости выверять его так, чтобы раскачивание заканчивалось до начала толчка рукой. Было бы полезнее начать колебание так, чтобы его завершение совпадало с началом работы толчковой рукой. В этом случае кинетическая энергия свободной руки могла бы эффективно использоваться для самого толчка. Обе руки напрямую связаны друг с другом с помощью скелета верхней половины туловища, а кинетическая энергия свободной руки передается через костную систему к рабочей руке и к ядру.

Вычисления показывают, что правильно подобранное время движения свободной руки относительно толчковой руки представляет наиболее эффективный способ увеличить конечную скорость отрыва ядра, а значит, и увеличить результат толчка. Возможно перенести большую часть момента количества движения свободной руки на скорость отрыва ядра. Так, придержав движение свободной руки на 0,04 с, можно добиться роста скорости примерно на 0,39 м/с, что соответствует улучшению дальности толчка на 1,06 м. Чтобы увеличить скорость отрыва настолько, насколько возможно, движение свободной руки должно быть максимально быстрым, размах траектории движения должен быть широким, и когда движение завершается, рука должна быть отведена назад.

### Приложение

**Численные расчеты: увеличение скорости отрыва ядра за счет затормаживания свободной руки.** Момент инерции –  $I = \int r^2 dm$ , точечная масса –  $I = r^2 m$ , момент количества движения –  $L = \omega I$ , где  $r$  – расстояние до оси вращения  $X$ ,  $m$  – вращающаяся масса,  $\omega$  – угловая скорость.

Таблица 2

Массы частей тела в соответствии с работой [2] (рис. 10)

Часть тела или ядро	% от общей массы 140 кг	Масса, кг
1	34,70	48,6
2	2,65	3,7
3	1,82	2,5
4	0,50	0,7
5	2,65	3,7
6	1,82	2,5
7	0,50	0,7
8	ядро	7,3
9	6,72	9,4

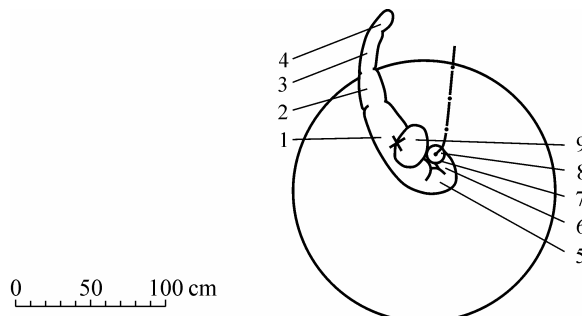


Рис. 10. Число частей тела из таблицы 2 по рис. 9, указан масштаб размеров

**Расчет момента инерции частей тела.**  $I = \int r^2 dm$ ,  $dm = \frac{dm}{dr} \cdot dr = \frac{m}{L} \cdot dr$ ,  $I = \frac{m}{L} \int r^2 dr$ ,

где  $m$  – масса части тела,  $L$  – длина части тела,  $r$  – расстояние до оси вращения.

$$I_1 = 15120 \text{ кг}\cdot\text{см}^2, I_2 = 6260 \text{ кг}\cdot\text{см}^2, I_3 = 10340 \text{ кг}\cdot\text{см}^2,$$

$$I_4 = 4700 \text{ кг}\cdot\text{см}^2, I_5 = 5310 \text{ кг}\cdot\text{см}^2, I_6 = 3590 \text{ кг}\cdot\text{см}^2,$$

$$I_7 = 720 \text{ кг}\cdot\text{см}^2, I_8 = 4540 \text{ кг}\cdot\text{см}^2, I_9 = 760 \text{ кг}\cdot\text{см}^2.$$

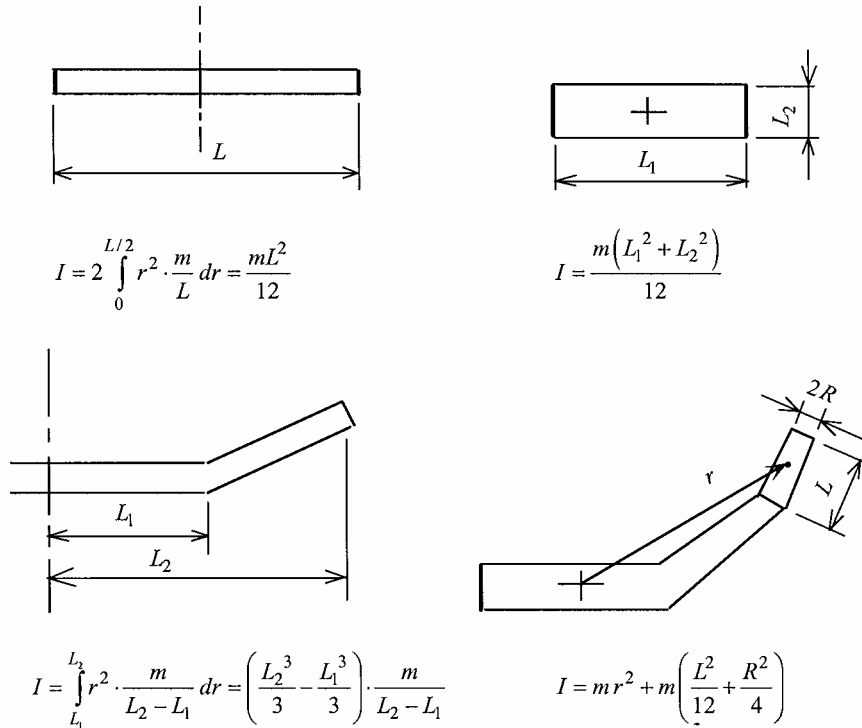


Рис. 11. Расчет моментов инерции частей тела на рис. 10

**Снижение момента количества движения свободной руки.** Произведя измерения по кадровому ряду видеосъемки толчка ядра, рассматриваемого в данной работе, было получено изменение угла положения свободной руки, которое составило около  $30^\circ$  до затормаживания и около  $15^\circ$  через  $0,02$  с после него. В этом случае снижение угловой скорости равно

$$\Delta\omega = \frac{0,262}{0,02} = 13,1 \text{ рад/с.}$$

Момент инерции частей тела перед затормаживанием

$$2 \quad 6260 \text{ кг}\cdot\text{см}^2$$

$$3 \quad 10340 \text{ кг}\cdot\text{см}^2$$

$$4 \quad 4700 \text{ кг}\cdot\text{см}^2$$

Итого, момент инерции свободной руки перед затормаживанием составляет

$$I_k = 21300 \text{ кг}\cdot\text{см}^2.$$

Снижение момента количества движения

$$\Delta L_k = \Delta\omega I_k = 13,1 \cdot 21,3 = 27,9 \text{ рад}\cdot\text{кг}\cdot\text{см}^2/\text{с.}$$

**Эффект снижения момента количества движения свободной руки в начале толчка рукой.** Увеличение скорости ядра вычисляется следующим образом: в начале толчка

рукой ядро находится напротив щеки спортсмена и его расстояние до оси вращения равно  $r_1 = 25$  см.

Часть тела или ядро	Момент инерции в начале толчка рукой, кг·см <sup>2</sup>
2-4	213000
1	15120
5	5310
6	3590
7	720
8	4540
9	760

Момент инерции толкающего ядро в этот момент составляет  $I_1 = 51340$  кг·см<sup>2</sup>.

Увеличение угловой скорости толкающего  $\Delta\omega_1 = \frac{\Delta L_k}{I_1} = \frac{27,9}{5,13} = 5,44$  рад/с.

Увеличение скорости отрыва ядра  $\Delta N_{01} = r_1 \cdot \Delta\omega_1 = 0,25 \cdot 5,44 \cdot 1 = 1,36$  м/с.

**Эффект снижения момента количества движения свободной руки во время толчка рабочей рукой.** Увеличение скорости ядра вычисляется так: как только толчковая рука начинает действовать, ядро движется от спортсмена и через 0,04 с находится уже на расстоянии 35 см до оси вращения. В этот момент времени:

момент инерции толкающего в начале толчка рукой равен	$I_1 = 51340$ кг·см <sup>2</sup> ,
момент инерции ядра в начале толчка рукой –	4470 кг·см <sup>2</sup>
момент инерции ядра при удалении на расстояние 35 см –	<u>8900 кг·см<sup>2</sup></u>
момент инерции толкающего,	
когда ядро находится на расстоянии 35 см –	$I_2 = 55770$ кг·см <sup>2</sup> .
Увеличение угловой скорости спортсмена	

$$\Delta\omega_2 = \frac{\Delta L_k}{I_2} = \frac{27,9}{5,58} = 5,0 \text{ рад/с,}$$

увеличение скорости отрыва ядра

$$\Delta N_{02} = r_2 \cdot \Delta\omega_2 = 0,35 \cdot 5,0 \cdot 1 = 1,75 \text{ м/с.}$$

Это изменение в скорости приводит к увеличению дальности толчка на 0,39 м.

### Список литературы

1. Vanttinen T., Blomqvist M., Luhtanen P., Auvinen M., Palo-kangas J., Tuominiemi J., Yrjola M., Ranta M., von Hertzen R., Holmlund U. Rotational shot put technique // Research Institute for Olympic Sports, Research Report, Jyvaskyla, Finland, 1996 (in Finnish).
2. Rahikainen A., von Hertzen R., Ranta M.A., Luhtanen P. About the optimum shot put technique // Helsinki University of Technology, Laboratory of Mechanics, Research Report. 2000. No 58. (in Finnish).
3. Rahikainen A., Luhtanen P. A new method to estimate the effect of shot putter's rotational velocity on the length of the put // Helsinki University of Technology, Laboratory of Mechanics, Research Report. 2001. No 60. 2001 (in Finnish).
4. Rahikainen A., Luhtanen P. A study of the efficiency of the leg-pushing phase in shot put // Russian Journal of Biomechanics. 2003. Vol. 7. No 1. P. 65-79.
5. Rahikainen A. The use of rotating disk in the photography of movements // Russian Journal of Biomechanics. 2003. Vol. 7. No 1. P. 47-64.

6. *Vanttinen T., Blomqvist M., Luhtanen P., Auvinen M., Palo-kangas J., Tuominiemi J., Yrjola M., Ranta M., von Hertzen R., Holmlund U.* Rotational shot put technique II // Research Institute for Olympic Sports, Research Report, Jyvaskyla, Finland, 1997 (*in Finnish*).
7. *Vanttinen T., Blomqvist M., Luhtanen P., Auvinen M., Palo-kangas J., Tuominiemi J., Yrjola M., Ranta M., von Hertzen R., Holmlund U.* Rotational shot put technique V // Research Institute for Olympic Sports, Research Report, Jyvaskyla, Finland, 1998 (*in Finnish*).
8. *Vanttinen T., Blomqvist M., Luhtanen P., Auvinen M., Palo-kangas J., Tuominiemi J., Yrjola M., Ranta M., von Hertzen R., Holmlund U.* Rotational shot put technique VI // Research Institute for Olympic Sports, Research Report, Jyvaskyla, Finland, 1999 (*in Finnish*).
9. *Luhtanen P., Blomqvist M., Vanttinen T.* A Comparison of two elite shot putters using the rotational shot put technique // IAAF quarterly, *New Studies in Athletics*. 1997. No. 4. P. 25-33.
10. *Bartonietz K.E.* Rotational Shot Put Technique: Biomechanical Findings and Recommendations for training // *Track and Field Quarterly Review*. 1994. Vol. 94. No 3. P. 18-29.
11. *Pyka I., Otrando B.* Rotational shot put // *National Strength and Conditioning Association Journal*. 1991. Vol. 13. No 1.
12. *Palm V.* Some Biomechanical Observations of the Rotational Shot Put // *Modern Athlete and Coach*. 1990. Vol. 28. No 3. P. 15-18.
13. *Stepanek J.* Comparison of the Glide and the Rotational Technique in the Shot Put // *Biomechanics in Sports V*. Proceedings of the Fifth International Symposium of Biomechanics in Sports, held in 1987 Athens, Greece. Publisher: Hellenic Sports Research Center of Athens.
14. *Lichtenberg D., Wills J.* Maximizing the range of the shot put // *Am. J. Phys.* 1978. Vol. 46. No. 5.
15. *Ranta M.A., von Hertzen R. and Holmlund U.* A dynamic model of shot put // Helsinki University of Technology, Laboratory of Theoretical and Applied Mechanics, Research Report. 1996. No 44.
16. *Ranta M.A., von Hertzen R. and Rahikainen A.* Smoothing of random errors in the analysis of throwing events // Helsinki University of Technology, Laboratory of Theoretical and Applied Mechanics, Research Report. No 55. 1999.

## ON THE OPTIMIZATION OF SHOT PUT TECHNIQUE

**A. Rahikainen, P. Luhtanen (Helsinki, Finland)**

The goal of this paper is to study the technique of shot put, and to find out some means to overcome the competition in major sport events. The basic idea of the research method is to calculate the optimal values of the characteristics of a measured shot put. By comparing the optimal values to the measured ones, we can see how close the put is to the optimal performance. Consequently, the optimal angle of arm push of the measured put in [1] is determined, and by comparing the optimal to the measured value, we can conclude that the angle of arm push employed in this put is very close to the optimal value. It is also inferred that the leg push must be performed straight upwards at maximal strength and body rotation, because at the end of the push both legs are up in the air, and therefore, the motion cannot be stopped. The coordination of the leg push and arm push must be so that they compose a so-called kinetic chain. This means that the end of the leg push and the beginning of the arm push are to be performed simultaneously to maintain the continuity of the movement. The study of the motion of the free arm yielded promising results. The calculations indicated that a much better technique is possible than what is now common practice. The idea is to use the kinetic energy of the free arm to accelerate the shot during the arm push. The swinging motion of the free arm is traditionally performed so that the swing of the free arm is completed just before the beginning of the arm push. However, effective transfer of the kinetic energy of the free arm to accelerate the shot implies that the timing of the swing should be so that the end of the swinging motion is at the beginning of the arm push. In this way the level of performance can be significantly raised. The calculations indicate that if the

end of the swing is postponed by 0.04 seconds, the length of the put increases by about 1 meter.

**Key words:** biomechanics, sport, shot pushing, optimization.

*Получено 1 сентября 2003*