

УДК 531/534:57+612.7

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ В ЭСТЕТИЧЕСКОЙ ХИРУРГИИ

А.Е. Федоров, В.А. Лохов

Пермский государственный технический университет, кафедра теоретической механики, Россия, 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., д. 29а, e-mail: fae@theormech.pstu.ac.ru

Аннотация. Рассмотрена операция по полному лифтингу кожи. Для оптимизации режима натяжения построены определяющие соотношения кожного покрова человека. Произведено обобщение соотношений для случая трехмерного напряженного состояния. Для обоснования выбранной модели проведен эксперимент по одноосному раштязжению кожного лоскута и составлена программа для расчета напряжений. Эксперимент ставился на растяжение с постоянной скоростью и с последующей релаксацией. Исходя из анализа экспериментальных данных определены некоторые параметры выбранной модели.

Ключевые слова: кожа, определяющие соотношения, реологические модели.

1. Введение

В последнее время эстетическая хирургия вышла на новый уровень развития. Оперативные методики стали более многочисленными, разнообразными и утонченными. Это обеспечивает индивидуальный подбор способа оперативной коррекции в каждом отдельном случае и не оставляет впечатления каких-либо «переделок».

На сегодняшний день наибольшим спросом пользуется операция по лифтингу кожи лица и шеи. Лифтинг, или подтяжка, является самым эффективным способом внешнего омоложения. Проблема заключается в том, что даже если женщина соблюдает правильный режим питания и занимается спортом, это позволяет сохранить юношескую фигуру, но лицо неизбежно стареет и безжалостно выдает возраст. Лифтинг помогает сохранить или сделать лицо молодым.

Описание операции. При полном лифтинге [1] устраняются «гусиные лапки» (рис. 1а - 1), морщины нижней трети лица (рис. 1а - 2, 3), подбородка и шеи (рис. 1а - 4). Разрез делается на волосистой части висков, впереди и позади уха и на волосистой части затылка. В этом случае шов незаметен и его легко можно скрыть (рис. 1б). Далее хирург сепарирует (отслаивает от подкожных тканей) кожу на довольно широкой поверхности виска, в области наружного угла глаза («гусиные лапки»), щек и шеи (рис. 1в). Отслоенная кожа натягивается кверху и кзади, а избыток ее иссекается (рис. 1г и 1д). После этого разрез тщательно ушивается.

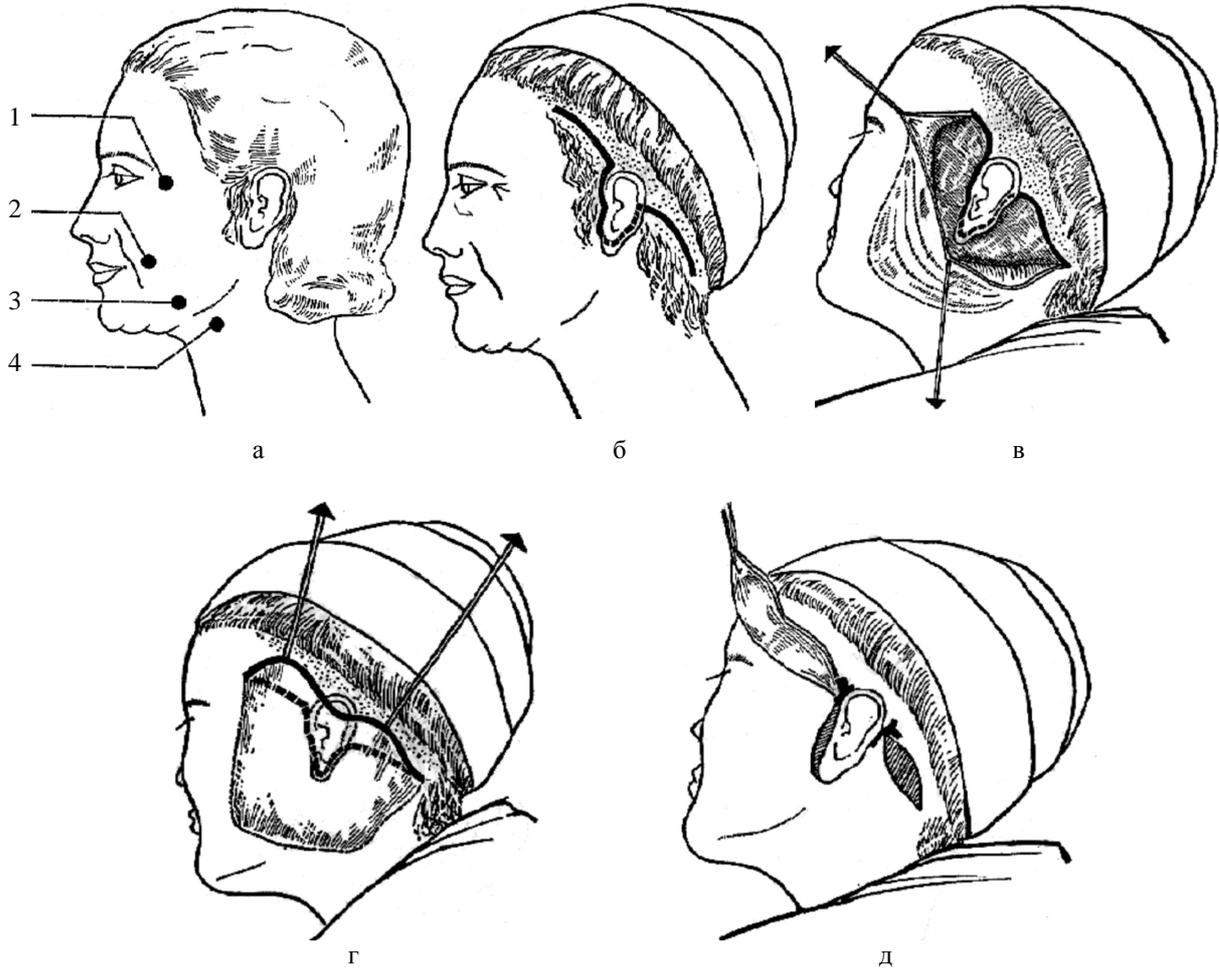


Рис. 1. Операция по полному лифтингу кожи лица

Во время операции натяжение кожи проводится вручную, следовательно, каждый хирург может по-своему оценивать и реализовывать натяжение кожи. Большинство стремится натянуть кожу как можно сильнее для получения наилучшего визуального эффекта, но сильнее – ещё не значит лучше, поскольку кожа начинает испытывать сильные внутренние перегрузки, что может в дальнейшем свести на нет весь эффект операции и причинить серьёзную травму кожной ткани.

Для обеспечения наилучшего косметического эффекта и уменьшения неблагоприятных последствий необходимо обеспечить оптимальное натяжение кожи. Недостаточное натяжение не даёт должного эффекта омоложения, поскольку ненатянутая кожа образует морщины. Чрезмерное натяжение ведёт к следующим неблагоприятным последствиям: появление келоидного рубца, развитие некроза кожи. Некроз является следствием ухудшения или прекращения питания кожи кровью. Нарушение питания связано с отсепаровкой кожи от подлежащих тканей и отсутствием кровотока от соседних тканей вследствие пережатия сосудов. Отсепаровка тканей является необходимым действием при операции и избежать её невозможно, а пережатие сосудов возможно не допустить, устанавливая необходимое натяжение кожи.

2. Построение определяющего соотношения для кожного покрова

Основная проблема заключается в установлении определяющего соотношения, адекватно описывающего поведение реальной кожи. Экспериментально доказано, что кожа – сильно нелинейный вязкоэластичный материал. Вязкоэластичность подразумевает то, что свойства кожи представляют комбинацию эластичных и вязких свойств. Поэтому ее вязкие характеристики, механические свойства зависят от времени и истории механического нагружения. Далее, усложняя рассмотрение, кожа не гомогенна и не изотропна – это композиционный материал, состоящий из дискретных частей, который имеет неоднородную структуру, вследствие чего механические свойства материала различны в разных направлениях (анизотропия). Также напряжения и деформации, которым подвержена кожа, велики, и в ряде случаев геометрически линейные соотношения не могут быть использованы.

При построении определяющего соотношения был принят ряд допущений, а именно: кожа считается изотропной, деформации малы, напряжения и деформации связаны линейно. Рассмотрено пять идеализированных механических моделей вязкоупругого поведения материала, определяемые соответствующим числом механических параметров.

2.1. Модель Максвелла. Модель Максвелла [2] является двухпараметрической и состоит из линейной комбинации упругого и вязкого элементов (рис. 2.1).

Как известно, напряжение и скорость деформации в вязкой жидкости связаны законом вязкости Ньютона:

$$\sigma = 3\eta\dot{\varepsilon}, \quad (2.1.1)$$

где η – динамическая вязкость (для выполнения условия индифферентности использовано предположение о малости градиентов перемещений).

В упругом материале напряжение и деформация связаны законом Гука:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.1.2)$$

Поведение этой системы описывается следующим уравнением:

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{3\eta} = \dot{\varepsilon}. \quad (2.1.3)$$

2.2. Модель Фойгта. Модель Фойгта [2] также является двухпараметрической, но состоит из параллельного соединения вязкого и упругого элементов (рис. 2.2).

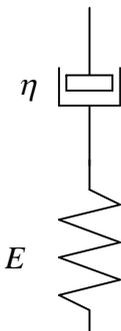


Рис. 2.1. Модель Максвелла

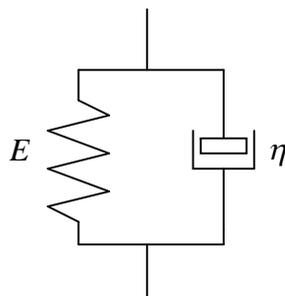


Рис. 2.2. Модель Фойгта

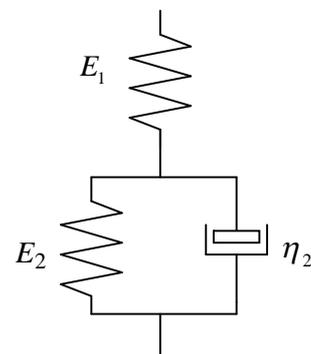


Рис. 2.3. Модель Кельвина-Зинера

Уравнение, описывающее поведение данной модели, выглядит следующим образом:

$$\sigma = E\varepsilon + 3\eta\dot{\varepsilon} = E(\varepsilon + \tau\dot{\varepsilon}), \quad (2.2.1)$$

где $\tau = 3\eta/E$.

2.3. Модель Кельвина (Зинера). Модель Кельвина [2] является трехпараметрической и состоит из последовательного соединения упругого элемента и модели Фойгта (рис. 2.3). Напряжения обеих частей равны, а полная деформация будет складываться из деформаций частей

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (2.3.1)$$

Напряжения будут соответственно равны

$$\sigma = E_1\varepsilon_1, \quad (2.3.2)$$

$$\sigma = 3\eta_2\dot{\varepsilon}_2 + E_2\varepsilon_2. \quad (2.3.3)$$

Выразим деформацию второй части из (2.3.1) и подставим в уравнение (2.3.3)

$$\sigma = 3\eta_2(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1) + E_2(\varepsilon - \varepsilon_1). \quad (2.3.4)$$

Из уравнения (2.3.2) выразим ε_1 и подставим в (2.3.4)

$$\sigma = 3\eta_2\left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E_1}\right) + E_2\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E_1}\right). \quad (2.3.5)$$

После преобразования получим уравнение, описывающее систему:

$$p_1\dot{\sigma} + p_0\sigma = q_1\dot{\varepsilon} + q_0\varepsilon, \quad (2.3.6)$$

где $p_1 = \frac{3\eta_2}{E_1E_2}$; $p_0 = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}$; $q_1 = \frac{3\eta_2}{E_2}$; $q_0 = 1$.

2.4. Модель Бюргерса. Модель Бюргерса [2] является четырехпараметрической и состоит из последовательного соединения модели Максвелла и модели Фойгта (рис. 2.4).

Для этой модели получено следующее определяющее уравнение:

$$p_2\ddot{\sigma} + p_1\dot{\sigma} + p_0\sigma = q_2\ddot{\varepsilon} + q_1\dot{\varepsilon}, \quad (2.4.1)$$

где $p_2 = \frac{3\eta_2}{E_1E_2}$; $p_1 = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{\eta_2}{E_2\eta_1}$; $p_0 = \frac{1}{3\eta_1}$; $q_2 = \frac{3\eta_2}{E_2}$; $q_1 = 1$.

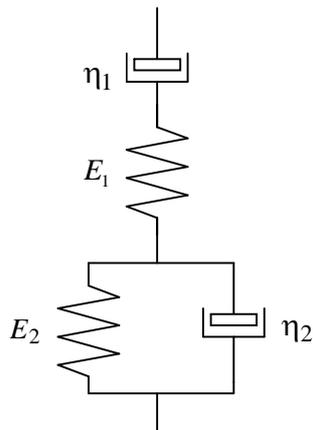


Рис. 2.4. Модель Бюргерса

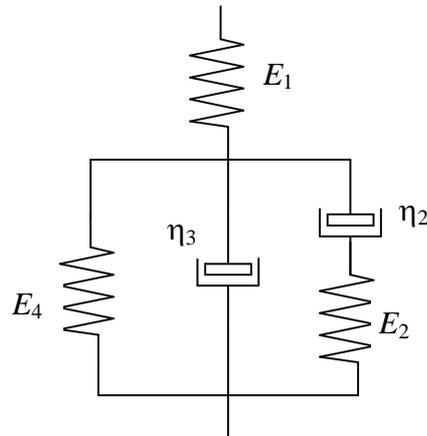


Рис. 2.5. Пятипараметрическая модель Бранкова

2.5. Пятипараметрическая модель Бранкова. Пятипараметрическая модель [2] состоит из модели Кельвина с параллельно присоединенными упругим и вязким элементами (рис. 2.5).

Поведение этой системы описывается следующим уравнением:

$$p_2 \ddot{\sigma} + p_1 \dot{\sigma} + p_0 \sigma = q_2 \ddot{\varepsilon} + q_1 \dot{\varepsilon} + q_0 \varepsilon, \quad (2.5.1)$$

где

$$p_2 = \frac{3\eta_3}{E_2 E_1}; \quad p_1 = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{E_4}{E_1 E_2} + \frac{\eta_3}{E_1 \eta_2}; \quad p_0 = \frac{E_4}{3\eta_2 E_1} + \frac{1}{3\eta_2};$$

$$q_2 = \frac{3\eta_3}{E_2}; \quad q_1 = 1 + \frac{E_4}{E_2} + \frac{\eta_3}{\eta_2}; \quad q_0 = \frac{E_4}{3\eta_2}.$$

2.6. Выбор и обоснование модели. Для представленных выше моделей (рис. 2.1–2.5) было принято следующее допущение: для уменьшения числа неизвестных жесткости упругих элементов и динамические вязкости вязких элементов были приняты одинаковыми.

Поведение моделей исследовалось на следующих примерах:

1. Деформация при постоянном напряжении.
2. Релаксация с фиксированной деформацией.

Аналогичные процессы происходят при операции во время натяжения и после фиксации кожного лоскута.

Как видно из графиков (рис. 2.6, 2.7), нарастание деформации в моделях Фойгта, Кельвина и Бранкова происходит по подобным экспоненциальным законам, однако если деформацию зафиксировать, то модель Фойгта не описывает релаксацию, а модели Кельвина и Бранкова описывают достаточно сильную релаксацию. Модели Максвелла и Бюргерса при постоянной нагрузке описывают практически линейную деформацию с одним и тем же углом наклона на диаграмме $\varepsilon(t)$, но в начальный момент времени их поведение различно: модель Максвелла описывает строго линейную зависимость, а модель Бюргерса – экспоненциальную зависимость.

Модель Максвелла вполне адекватно описывает поведение реальной кожи при растяжении, но она полностью релаксирует, что не может происходить с кожей ввиду наличия волокон коллагена. Натянутая кожа при фиксированной деформации частично релаксирует. Такое поведение дает нам модель Кельвина и модель Бранкова. Обе эти модели имеют ограниченную релаксацию, как и кожа, однако определение всех параметров пятипараметрической модели Бранкова является достаточно сложной задачей.

Из проведенного аналитического анализа моделей сделан вывод, что наиболее адекватно поведение реальной кожи описывают модель Кельвина и Бранкова. Однако далее будет рассматриваться модель Кельвина, так как она имеет небольшое число степеней свободы, что упрощает определение параметров.

Преобразуем уравнение (2.3.6). Связь между нормальными напряжениями и деформациями имеет вид [3]:

$$\dot{\sigma} + \lambda \sigma = E(\dot{\varepsilon} + \mu \varepsilon),$$

$$E = E_1, \quad \lambda = \frac{E_1 + E_2}{3\eta_2}, \quad \mu = \frac{E_2}{3\eta_2}, \quad (2.6.1)$$

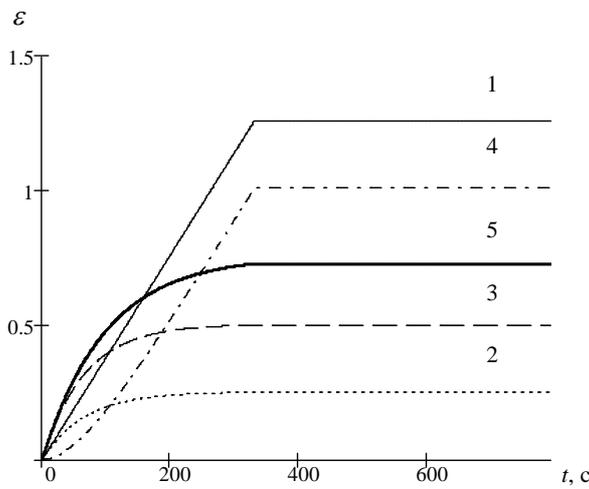


Рис. 2.6. Растяжение моделей при постоянной нагрузке с последующей фиксацией деформации: 1 — модель Максвелла; 2 — модель Фойгта; 3 — модель Кельвина; 4 — модель Бургерса; 5 — модель Бранкова

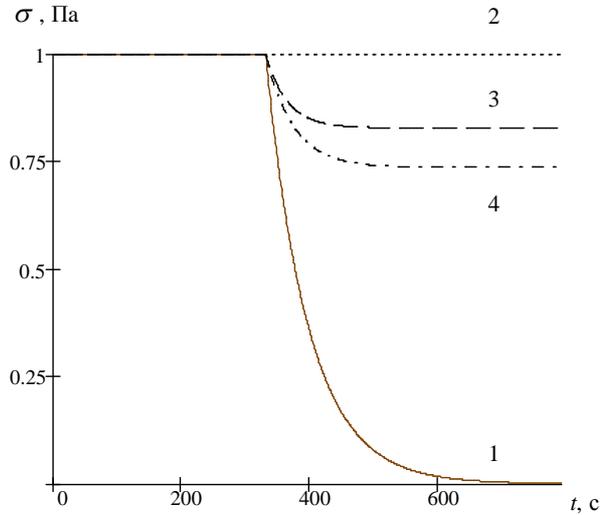


Рис. 2.7. Растяжение моделей при постоянной нагрузке с последующей релаксацией: 1 — модель Максвелла; 2 — модель Фойгта; 3 — модель Кельвина; 4 — модель Бранкова

где E – мгновенный модуль упругости, $1/\lambda < 1/\mu$ характеризуют время запаздывания системы на изменения нагрузки и деформации. Соотношение $\frac{E\mu}{\lambda}$ называется длительным модулем упругости. При длительном нагружении, когда скоростями можно пренебречь, связь между напряжениями и деформациями будет выражаться через длительный модуль упругости.

Это уравнение можно разрешить относительно напряжений и деформаций. Будем считать, например, что деформация – есть заданная функция времени. Проинтегрируем получившееся уравнение для $\sigma(t)$. Интеграл однородного уравнения

$$\sigma = C(t)e^{-\lambda t}.$$

Применяя способ вариации произвольной постоянной, найдем

$$\frac{dC(t)}{dt}e^{-\lambda t} - \lambda C(t)e^{-\lambda t} + \lambda C(t)e^{-\lambda t} = E(\dot{\varepsilon} + \mu\varepsilon),$$

$$C = E \int_{-\infty}^t (\dot{\varepsilon} + \mu\varepsilon)e^{\lambda\tau} d\tau = E \left[\varepsilon(t)e^{\lambda t} - (\lambda - \mu) \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau)e^{\lambda\tau} d\tau \right].$$

Таким образом, напряжение выражается через деформацию следующей формулой:

$$\sigma(t) = E \left[\varepsilon(t) - (\lambda - \mu) \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau)e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \right]. \quad (2.6.2)$$

Совершенно аналогичным образом можно выразить деформации через заданную функцию напряжений:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + (\lambda - \mu) \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) e^{-\mu(t-\tau)} d\tau \right]. \quad (2.6.3)$$

Нижний предел интегрирования можно принять равным нулю вместо отрицательной бесконечности, если при $t < 0$, $\varepsilon = 0$, $\sigma = 0$.

При переходе к законам объемного деформирования необходимо считать всестороннее сжатие как чисто упругое [4]. Тогда для компонент тензора девиатора напряжений имеем следующее соотношение:

$$s_{ij}(t) = 2G \left[e_{ij}(t) - (\lambda - \mu) \int_0^t e_{ij}(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \right]. \quad (2.6.4)$$

Таким образом, зная компоненты тензора девиатора напряжений, можно определить напряженное состояние материала, а напряжения будут выражаться следующим соотношением:

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{1}{3} I_1(\sigma_{ij}) \delta_{ij} + s_{ij}, \quad (2.6.5)$$

или

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{1}{3} K I_1(\varepsilon_{ij}) \delta_{ij} + s_{ij}, \quad (2.6.6)$$

где K – модуль объемного сжатия.

Вообще говоря, полученное определяющее соотношение не является индифферентным. В данном случае неиндифферентность проявляется слабо, поскольку нет вращательного движения и градиенты скоростей малы, так как при операции происходит только растяжение материала.

3. Экспериментальное определение характеристик модели

Эксперимент проводился на оборудовании Института механики сплошных сред УрО РАН. Использовалась разрывная машина с максимальным усилием 500 килограммов. Образцы использовались в течение не более двух дней после операции. Хранение образцов осуществлялось в физиологическом растворе при пониженной температуре. Перед экспериментом образцы вынимались из раствора, нагревались до комнатной температуры и после этого над ними проводились испытания. Хранение кожи в физиологическом растворе осуществлялось для продления «жизни» кожи, поскольку раствор подпитывает кожу и препятствует процессам отмирания и разложения.

Основная сложность в постановке эксперимента – это испытываемый материал. Количество лоскутов кожи было ограничено.

Постановка эксперимента осложнялась тем, что оборудование не рассчитано на испытания мягких тканей. Сложности возникали при креплении образцов в захватах. Лоскуты кожи вытягивались из захватов, а если фиксация в захватах производилась очень сильно, то лоскут пережимался. Поэтому на концы захватов были приспособлены хирургические зажимы, они достаточно жестко фиксировали кожу и не позволяли ей перемещаться в зажимах при нагрузках. Ввиду мягкости ткани в начальный момент растяжения было неизвестно, какие показания показывает датчик,

поскольку происходит затягивание захватов, растягивание и уплотнение элементов конструкции машины. Перечисленные факторы вносят искажения в показания тензодатчика.

3.1. Математическое исследование релаксации и ползучести кожи. Согласно выбранной модели можно построить математическую модель релаксации кожи. Эксперимент проводится на одноосное растяжение образца. При таком виде нагружения тензор напряжений имеет только одну ненулевую компоненту нормального напряжения, обозначенную как σ .

Эксперимент проводился в два этапа:

1. Растяжение образца с постоянной скоростью и последующая фиксация растяжения.
2. Релаксация напряжений при фиксированной деформации.

Таким образом, можно будет определить два из трех коэффициентов модели Кельвина. Для определения недостающего коэффициента необходим эксперимент на ползучесть.

Растяжение с постоянной скоростью. Необходимо решить уравнение

$$\dot{\sigma} + \lambda\sigma = E(\dot{\varepsilon} + \mu\varepsilon), \quad E = E_1, \quad \lambda = \frac{E_1 + E_2}{3\eta_2}, \quad \mu = \frac{E_2}{3\eta_2} \quad (3.1.1)$$

при следующих условиях:

$$\varepsilon = vt, \quad \dot{\varepsilon} = v,$$

где v – скорость деформирования. Определяющее соотношение (3.1.1) принимает вид

$$\dot{\sigma} + \lambda\sigma = Ev(1 + \mu t). \quad (3.1.2)$$

Начальное условие

$$\sigma|_{t=0} = \sigma_0, \quad (3.1.3)$$

где σ_0 - начальное напряжение.

Общее решение уравнения (3.1.2) является суммой общего решения однородного уравнения и частного решения уравнения с правой частью. Общее решение ищется путем составления характеристического уравнения, а частное решение ищется по виду правой части.

$$\begin{aligned} \sigma' &= Ce^{-\lambda t}, \\ \sigma'' &= At + B. \end{aligned}$$

Тогда общее решение будет

$$\sigma = Ce^{-\lambda t} + \frac{Ev\mu}{\lambda}t + \frac{Ev}{\lambda} - \frac{Ev\mu}{\lambda^2}. \quad (3.1.4)$$

С учетом начального условия (3.1.3) найдем константу C

$$C = \sigma_0 + \frac{Ev\mu}{\lambda^2} - \frac{Ev}{\lambda}. \quad (3.1.5)$$

Подставив (3.1.5) в (3.1.4), получим следующее решение

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\lambda t} + \frac{Ev}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) + \frac{E\mu}{\lambda} vt. \quad (3.1.6)$$

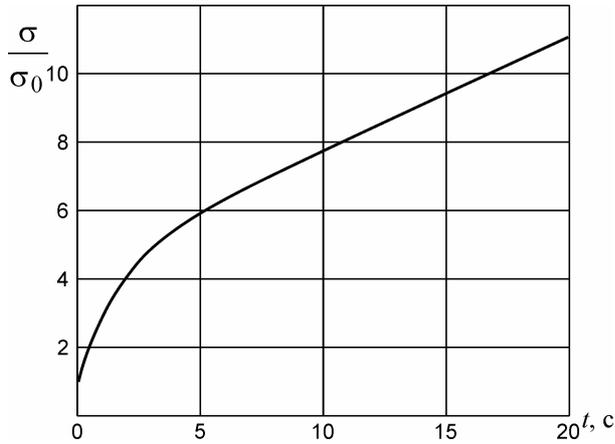


Рис. 3.1. Растяжение с постоянной скоростью

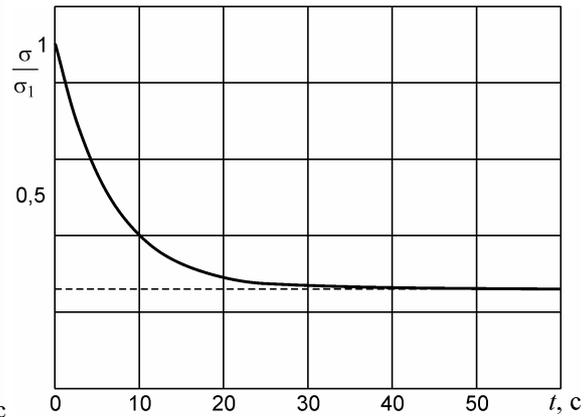


Рис. 3.2. Релаксация напряжений при фиксированной деформации

С возрастанием времени слагаемые, содержащие экспоненту, стремятся к нулю. Тогда зависимость между напряжением и деформацией становится линейной (рис. 3.1), коэффициентом пропорциональности которой является длительный модуль упругости, равный

$$E^* = \frac{E\mu}{\lambda} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}.$$

Релаксация происходит при постоянной деформации ε_0 . Уравнение (3.1.1) можно преобразовать с учетом сказанного:

$$\dot{\sigma} + \lambda\sigma = E\mu\varepsilon_0. \quad (3.1.7)$$

Начальным условием для уравнения (3.1.7) будет выражение нагрузки, σ_1 образующееся в конце этапа нагружения:

$$\sigma|_{t=0} = \sigma_1. \quad (3.1.8)$$

Решение уравнения (3.1.7) с начальным условием (3.1.8) будет иметь вид:

$$\sigma(t) = \sigma_1 e^{-\lambda t} + E^* \varepsilon_0 (1 - e^{-\lambda t}), \quad (3.1.9)$$

где $\frac{1}{\lambda}$ - время запаздывания.

При возрастании времени напряжение, определяемое по формуле (3.1.9), выходит на постоянный уровень, определяемый длительным модулем упругости и начальной деформацией (рис. 3.2):

$$\sigma \xrightarrow{t \rightarrow \infty} E^* \varepsilon_0 = \sigma_2. \quad (3.1.10)$$

Ползучесть происходит при постоянном напряжении. Таким образом, уравнение (3.1.1) имеет вид:

$$\dot{\varepsilon} + \mu\varepsilon = \frac{\lambda}{E} \sigma_0, \quad (3.1.11)$$

где σ_0 – приложенное напряжение.

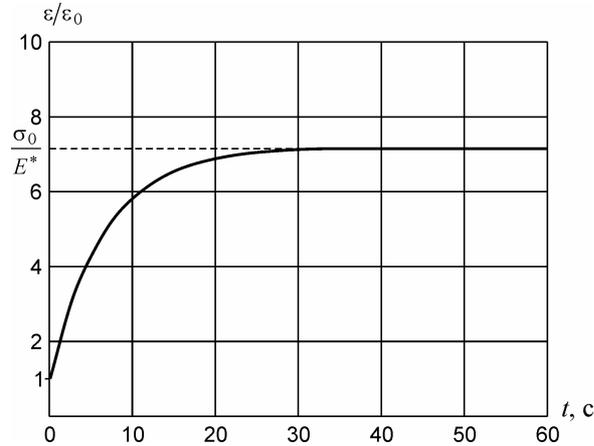


Рис. 3.3. Ползучесть при напряжении σ_0 и начальной деформации ε_0

Начальным условием для уравнения (3.1.11) будет выражение начальной деформации, которая присутствовала в теле,

$$\varepsilon|_{t=0} = \varepsilon_0, \quad (3.1.12)$$

где ε_0 – начальная деформация.

Решение уравнения (3.1.11) с учетом (3.1.12) будет иметь вид:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\mu t} + \frac{\sigma_0}{E^*} (1 - e^{-\mu t}). \quad (3.1.13)$$

При возрастании времени деформация, определяемая по формуле (3.1.13), выходит на постоянный уровень, равный σ_0/E^* (рис. 3.3).

3.2. Результаты эксперимента. Из проведенного эксперимента удалось найти длительный модуль упругости E^* и коэффициент λ . Величины для длительного модуля упругости усреднены для случая растяжения и релаксации одного образца. Для определения длительного модуля упругости с экспериментального графика растяжения-релаксации снимались следующие данные: деформация образца после фазы растяжения σ_1 и напряжение в конце фазы релаксации σ_2 . Таким образом $E^* = \sigma_2/\varepsilon_0$ (рис. 3.2). Коэффициент λ вычислялся следующим образом: по экспериментальной кривой определялось экспериментальное напряжение в образце в различные моменты времени, а теоретическое напряжение вычислялось по формуле (3.1.10) для того же момента времени. Исходя из минимума суммы квадратов разности между экспериментальными и теоретическими величинами, был подобран коэффициент λ . Результаты приведены в табл. 1.

Истинный модуль упругости E определить не удалось, так как не был проведен эксперимент на ползучесть. Поэтому для определения деформации была использована программа с использованием метода конечных элементов. В первом приближении отсепарированный кожный лоскут был представлен прямоугольником размером $a \times b$ (рис. 3.4), где a – глубина отсепаровки, b – длина разреза. Толщина лоскута принята единичной. Коэффициент $\mu < \lambda$ был проварьирован в диапазоне от 0,02 до 0,08 Па и получены результаты для истинного модуля упругости E и деформации ε_y . Как видно из табл. 2, максимально возможные деформации находятся в диапазоне $0,2 \div 0,4\%$.

Таблица 1

Экспериментальные значения длительного модуля упругости и коэффициента λ для модели Кельвина

| Номер образца | Длительный модуль упругости E^* , Па | λ , c^{-1} |
|---------------|--|----------------------|
| 1 | $1,265 \cdot 10^6$ | 0,027 |
| 2 | $7,405 \cdot 10^5$ | 0,017 |
| 3 | $2,148 \cdot 10^6$ | 0,017 |
| 4 | $1,476 \cdot 10^6$ | 0,002 |
| 5 | $3,571 \cdot 10^6$ | 0,048 |
| 6 | $2,364 \cdot 10^6$ | 0,058 |
| 7 | $3,744 \cdot 10^6$ | 0,113 |
| 8 | $1,143 \cdot 10^7$ | 0,127 |
| 9 | $4,173 \cdot 10^6$ | 0,215 |
| 10 | $5,044 \cdot 10^6$ | 0,196 |

Таблица 2

Численные значения коэффициента μ , модуля упругости и максимально возможной деформации

| μ , c^{-1} | Модуль упругости E , Па | Деформация ε_y , % |
|------------------|---------------------------|--------------------------------|
| 0,08 | $4,4 \cdot 10^6$ | 0,40 |
| 0,07 | $5 \cdot 10^6$ | 0,36 |
| 0,06 | $5,8 \cdot 10^6$ | 0,32 |
| 0,05 | $7 \cdot 10^6$ | 0,29 |
| 0,04 | $8,8 \cdot 10^6$ | 0,26 |
| 0,03 | $1,17 \cdot 10^7$ | 0,24 |
| 0,02 | $1,7 \cdot 10^7$ | 0,2 |

Среднее значение длительного модуля упругости составляет $E^* = \frac{E\mu}{\lambda} = 3,91 \cdot 10^6$ Па, среднеквадратическое отклонение $E^* = 3,09 \cdot 10^6$ Па, погрешность $E^* = 81\%$, среднее значение коэффициента $\lambda = 0,09 c^{-1}$, среднеквадратическое отклонение $\lambda = 0,076 c^{-1}$, погрешность $\lambda = 84\%$.

Разброс данных, по-видимому, вызван особенностями строения кожи отдельного человека.

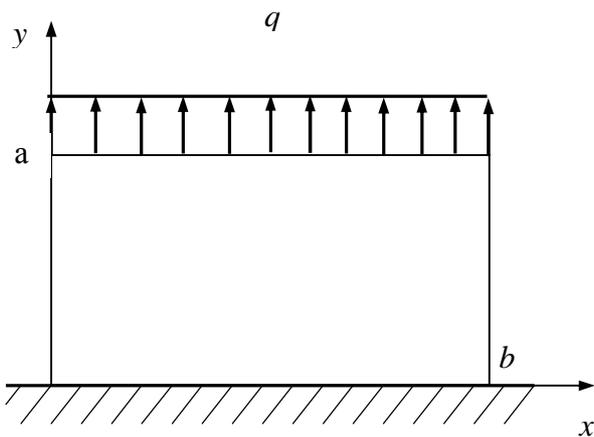


Рис. 3.4. Принципиальная схема задачи

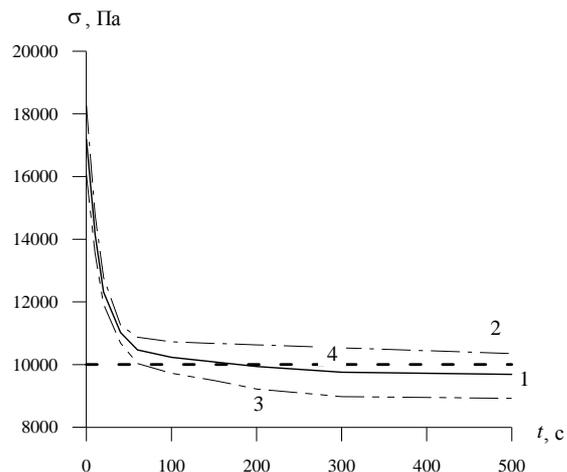


Рис. 4.1. Релаксация напряжений при операции: 1 — оптимальная релаксация; 2 — перенатяжение; 3 — недостаточное натяжение; 4 — σ_{max}

4. Постановка задачи оптимизации

При послеоперационной реабилитации в коже происходит релаксация напряжений. От протекания этого процесса во многом зависит косметический эффект операции. Из экспериментальных данных известно, что питание кожи потоком крови прекращается при нормальном напряжении $\sigma_{\max} = 10 \text{ кПа}$ [5]. Однако, если кожу натянуть именно с такой нагрузкой, то в процессе релаксации напряжение спадет, и кожа начнет снова морщиниться. Чтобы это не случилось, нужно задавать большие напряжения в коже, при этом не следует злоупотреблять, поскольку кожа при чрезмерном натяжении не сможет релаксировать ниже σ_{\max} . Целью подобной оптимизации является подбор таких напряжений и задаваемых деформаций, при которых достигается максимальный косметический эффект и в то же время напряжения в коже спадают ниже σ_{\max} .

Критерий оптимального натяжения задан следующим образом: необходимо, чтобы напряжения в коже с течением времени становились достаточными для возобновления кровотока, но в то же время не становились меньше некоторого уровня напряжений:

$$\sigma_{\min} \leq \sigma(t \rightarrow \infty) < \sigma_{\max} . \quad (4.1)$$

Необходимо при этом учесть, что при длительном перенапряжении $\sigma > \sigma_{\max}$ кожа без питания кровью начинает мертветь. Поэтому необходимо ввести ещё одно требование:

$$\sigma(T_k) \leq \sigma_{\max} , \quad (4.2)$$

то есть за необходимый промежуток времени T_k напряжения в коже спадают и питание восстанавливается. Эта величина из клинических наблюдений принята равной трем минутам. Таким образом, задача состоит в определении такого начального напряжения σ_1 (рис. 3.2), при котором выполняются условия (4.1) и (4.2).

Для оценки этого напряжения был смоделирован процесс релаксации при следующих параметрах: $E = 7 \cdot 10^6 \text{ Па}$, $\lambda = 0,09 \text{ с}^{-1}$, $\mu = 0,05 \text{ с}^{-1}$.

Так как каждый хирург натяжение кожи производит вручную, то эффект операции всегда разный. Как видно из графика (рис. 4.1), необходимо создавать избыточное напряжение в коже, чтобы после релаксации получить максимальный косметический эффект. Если кожу перетянуть (линия 2), то после релаксации напряжения будут больше σ_{\max} , сосуды останутся закрытыми и начнет развиваться некроз ткани, а если натяжение окажется недостаточным, то кожа снова образует морщины (линия 3).

5. Выводы

В работе рассмотрена одна из наиболее востребованных операций косметической хирургии. Эффект операции во многом зависит от опыта хирурга, который складывается путем проб и ошибок и, как следствие, страданий пациентов. Поэтому остро стоит необходимость сформулировать объективную методику подтяжки кожи. Для этого построена математическая модель кожи человека как линейно

вязкоупругого материала. Проведен теоретический и экспериментальный анализ существующих реологических моделей вязкоупругого тела и выбрана та модель, которая хорошо согласуется с экспериментальными результатами и имеет достаточно небольшое число параметров (модель Кельвина). Найденные параметры модели позволяют детально изучить процесс релаксации напряжений в коже, что соответствует периоду восстановления кожи после операции. Сформулированы условия оптимального натяжения кожи и найден оптимальный режим релаксации напряжений. Рассмотрены случаи, когда хирург перетягивает и недотягивает кожу, и показано, что математическое моделирование кожи позволяет объективизировать процесс натяжения кожи.

Определение всех параметров модели позволит дать хирургам конкретные рекомендации, а именно ответить на вопрос, с какой силой и сколько времени необходимо производить натяжение кожи, чтобы получить оптимальный эффект операции.

Список литературы

1. *Субиран Ж.М.* Косметическая хирургия. Ростов-на-Дону: Феникс, 1995.
2. *Бранков Г.* Основы биомеханики. М.: Мир, 1981.
3. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
4. *Циглер Ф.* Механика твердых тел и жидкостей: Пер. с англ. М.; Ижевск: Изд-во РХД, 2002.
5. *Ming Zang, Roberts V.C.* The effect of shear forces, externally applied to skin surface, on underlying tissues // J. Biomechanics Engineering. 1993. Vol. 15. P. 451-456.

ON THE APPLICATION OF THEORY OF VISCOELASTICITY IN AESTHETIC SURGERY

A.E. Fedorov, V.A. Lokhov (Perm, Russia)

An operation of full lifting and constitutive relations for the skin tissue are considered. The extension of these relations to the spatial case is performed. For substantiating selected rheological model the uniaxial experiments have been conducted and the program for stress analysis has been developed. The experiments are carried out under such conditions of stretching at constant rate and relaxation. Some parameters of chosen model are defined by experimental data analysis.

Key words: skin, constitutive relations, rheological models.

Получено 10 сентября 2003