

УДК 531/534:57+612.7

## РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА БОЛЬШЕБЕРЦОВОЙ КОСТИ В НЕПОВРЕЖДЕННОМ СОСТОЯНИИ И С УСТРОЙСТВАМИ ВНЕШНЕЙ ФИКСАЦИИ

Л.Б. Маслов

Ивановский государственный энергетический университет, кафедра теоретической и прикладной механики, лаборатория биомеханики, 153003, Россия, Иваново, ул. Рабфаковская, д. 34, e-mail: leonid-maslov@mail.ru, maslov@tipm.ispu.ru

**Аннотация.** Рассмотрены вопросы динамического моделирования биомеханических систем, состоящих из большеберцовой кости человека и устройств внешней фиксации в виде простейшей рамной конструкции и аппарата Илизарова. Использован метод конечных элементов, реализованный в виде программного кода *MechanicsFE* на основе 20-узловых изопараметрических элементов. Численный вибрационный анализ позволил определить как основные низшие резонансные частоты и формы колебаний системы, так и амплитудно-частотные характеристики системы в различных точках на поверхности кости и фиксатора. Различные варианты механических параметров регенерирующей костной ткани в зоне перелома были рассмотрены для математического моделирования сращения кости. Значения резонансных частот и формы колебаний, полученные в результате вибрационного анализа неповрежденной кости и кости в аппарате внешней фиксации, могут служить теоретическим фундаментом для разработки вибрационных резонансных методов диагностики состояния костной мозоли после перелома и проведенной хирургической операции.

**Ключевые слова:** большеберцовая кость, костная мозоль, конечные элементы, колебания, резонанс, диагностика.

### Введение

В медицинской практике лечения переломов конечностей широкое применение нашли аппараты внешней фиксации в виде различных вариантов аппарата Илизарова, жестко скрепляющие костные отломки и образующие вместе с костью единую биомеханическую систему. Врач использует рентгеновское оборудование, мануальные ощущения о жесткости кости и информацию о болевых ощущениях пациента во время хождения без нагрузки для того, чтобы получить представление о механической прочности регенерирующей ткани. Эта оценка достаточно субъективна, основана на собственном опыте, поскольку все перечисленные методики, включая рентгеновское обследование, не позволяют получить результат в числовом виде. Кроме того, рентгеновские снимки не дают ясного ответа на вопрос о прочности костной мозоли, т.к. на снимках сращение становится заметным спустя несколько недель после начала клинического заживления, позволяющего легкое хождение [1]. Поэтому разработка недорогих и точных устройств для перманентного контроля физиологического

состояния поврежденных тканей и диагностики степени консолидации костных отломков является актуальной задачей.

Значительное число публикаций, начиная с середины восьмидесятых годов, было посвящено приложениям вибрационных технологий для исследований и диагностики твердых тканей опорно-двигательного аппарата. Существенные результаты были получены группой ученых из Бельгии и Дании [1–3]. Исследования состояния перелома проводились с использованием двух экспериментальных установок: импульсно-частотной и вибрационно-резонансной. В первом случае колебания генерировались посредством удара молоточком по свободной нижней конечности, вывешенной и согнутой в коленном суставе. Резонансные частоты определялись с помощью преобразования Фурье. Во втором случае установившиеся колебания тканей нижней конечности, опертой на неподвижное основание в области голеностопного сустава и большеберцовой бугристости, возбуждались электромагнитным вибратором. Резонансные частоты определялись по максимуму амплитуды колебаний. Накатсуши и др. [4] применили импульсно-частотный метод для вибрационного исследования сухой большеберцовой кости и четырех изолированных влажных костей при свободных граничных условиях. В отмеченных работах была предложена физическая модель перелома кости, и зависимость значений резонансных частот от стадий сращения отломков была исследована [3–4]. Робертс и Стил [5] обращали внимание, что развитие неинвазивных механических тестов для мониторинга заживления перелома затруднено тем, что соотношения между геометрией кости, условиями измерений и прочностью костной мозоли не изучены достаточно хорошо. В их исследовании балочная теория была использована для анализа влияния размера и расположения перелома, граничных условий и жесткости костной мозоли на механические свойства кости, такие как резонансные частоты, жесткость на изгиб и кручение. Для проверки аналитических моделей были проведены экспериментальные тесты на специально изготовленных стержнях. В результате было показано, что механические свойства кости в начальный период восстановления возрастают достаточно быстро до 30–70% жесткости неповрежденной кости в зависимости от конфигурации. Впоследствии этот рост резко замедляется. Представленный авторами аналитический метод был предложен для клинического использования для разработки индивидуализированных моделей кости, перелома и условий фиксации с целью идентификации ранних стадий заживления. Отмечено, что хотя на поздних стадиях заживления перелома изменения механических свойств кости довольно малы, метод может быть использован с известной долей осторожности не только на ранних стадиях.

Современные клинические исследования ясно показывают, что резонансные частоты могут быть использованы для оценки состояния перелома длинных трубчатых костей. Хотя эти исследования подтверждают наличие определенной корреляции между резонансными частотами и жесткостью кости, природа этого соотношения еще недостаточно изучена. Необходимо отметить, что понимание физической природы влияния жесткости костной мозоли на резонансные частоты кости очень важно, поскольку позволило бы установить объективный критерий для определения жесткости кости в период сращения по ее вибрационным характеристикам.

Попытки математического анализа элементов опорно-двигательного аппарата человека известны со второй половины восьмидесятых годов. Детальный анализ динамики скелета человека на основе механики твердых тел представлен в работе [6]. В статье [7] дается описание одномерной конечно-элементной модели изолированной большеберцовой кости и исследованы ее собственные частоты в зависимости от различного вида граничных условий и различных значений упругих модулей компактной и губчатой костной ткани. В противоположность клиническим

экспериментам, в которых геометрия и физико-химические свойства костной мозоли не могут быть произвольно изменены, а точность вибрационных измерений подвержена влиянию значительного числа факторов, конечно-элементный анализ позволяет проводить отдельные изучения эффекта изменения размеров и свойств костной мозоли на резонансные частоты изолированной кости. Численный анализ может рассматриваться как средство для интерпретации клинических вибрационных измерений. В работе [8] разработана достаточно реальная трехмерная конечно-элементная модель изолированной неповрежденной большеберцовой кости и предложена механическая модель костной мозоли. В первом случае костная мозоль располагается в середине диафиза, во втором случае на расстоянии две третьих длины кости дистально от колена. В серии вычислений для моделирования заживления перелома предполагалось, что модуль Юнга костной мозоли принимает различные значения от 0,1 до 100% нормального значения модуля упругости компактной ткани. При этом меньшие значения модуля упругости регенерата соответствуют ранним стадиям заживления, соответствующим образованию в зоне перелома слабо организованной неминерализованной ткани, в то время как большие значения модуля упругости характеризуют поздние стадии восстановления, когда возникает пространственная устойчивая ориентация волокон коллагена и соответствующая степень минерализации ткани.

Запатентованный метод активной резонансной вибрационной диагностики (РВД) был разработан для анализа механических повреждений мягких тканей голени человека, таких как сухожилия и мышцы [9–10]. Метод позволяет определить физиологическое состояние тканей посредством анализа отклика диагностируемой системы на локальное вибрационное воздействие. Был разработан экспериментальный стенд для физического моделирования диагностики процесса остеосинтеза большеберцовой кости аппаратом внешней фиксации в виде плоской рамной конструкции. Проведена серия экспериментов на четырех образцах кости с фиксатором. Получены амплитудно-частотные характеристики, или резонансные кривые, целой и разрезанной кости и биомеханической системы “кость-фиксатор” [11]. Лабораторные данные свидетельствуют о возможности применения метода, но не являются однозначными ввиду наличия многих факторов, влияющих на резонансные частоты и вид амплитудно-частотных характеристик, что требует дополнительных теоретических исследований.

Таким образом, для дальнейшей разработки метода и аппаратной реализации необходимо получить вид амплитудно-частотных характеристик идеальной биомеханической системы, определить резонансные частоты и формы колебаний, выявить взаимосвязь физико-механических характеристик кости в зоне перелома с изменениями динамических свойств системы. Такой подход дает возможность разделить сложную многофакторную проблему на две подзадачи, одна из которых – влияние заданного натяга и жесткости соединений фиксатора на количественные характеристики и вид резонансных кривых, а другая – влияние процесса регенерации ткани в зоне перелома на те же самые параметры. В представленной работе рассмотрена вторая сторона описанной проблемы.

### Материалы и методы

**Алгоритм решения.** Для решения сформулированной выше задачи использовался метод конечных элементов [5] и компьютерное моделирование остеосинтеза большеберцовой кости аппаратом внешней фиксации в виде простой

рамной конструкции. В основу математической модели биомеханической системы положены динамические трехмерные уравнения линейной теории вязкоупругости согласно реологической модели Кельвина-Фойгта [12]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_V = \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^S,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \theta \mathbf{E} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + 2\eta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензоры напряжений и деформаций;  $\mathbf{e}$  – девиатор тензора деформаций  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\theta}{3} \mathbf{E}$ ;  $\mathbf{E}$  – единичный тензор;  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{f}_V = \mathbf{f}_V(\mathbf{r}, t)$  – векторы перемещений и заданных объемных сил, зависящих от времени  $t$  и радиуса вектора точек сплошной среды  $\mathbf{r}$ ;  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\eta$  – коэффициенты Ляме и вязкость материала;  $\rho$  – плотность;  $\theta$  – объемная деформация;  $\nabla$  – дифференциальный оператор Гамильтона.

Приведенная дифференциальная постановка задачи теории вязкоупругости эквивалентна вариационной постановке в виде принципа возможных перемещений:

$$\int_V \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_V dV + \int_S \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_S dS + \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}_{inert} dV = \delta \pi,$$

где  $\delta \mathbf{u}$  – вектор возможных перемещений точек сплошной среды; интегралы слева представляют собой работы внешних объемных и поверхностных сил, а также сил

инерции  $\mathbf{f}_{inert} = -\rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2}$  на возможных перемещениях;  $\delta \pi$  – виртуальная работа

внутренних сил при деформации тела:

$$\delta \pi = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} dV.$$

Для численного решения этого уравнения применена стандартная процедура конечно-элементной дискретизации по пространственным переменным с использованием 20-узлового изопараметрического элемента [13]. С учетом вида определяющего соотношения, записанного в матричной форме с использованием матриц упругих и вязких модулей  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{S}$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{S} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

получено следующее матричное дифференциальное уравнение по времени:

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} + \mathbf{R} \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}(t),$$

где  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$  – глобальные векторы узловых перемещений и узловых сил как функции от времени,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{R}$  – глобальные матрицы жесткости, масс и диссипации.

Дальнейшее преобразование основано на стандартном подходе, используемом в линейной теории упругих колебаний [14]. Предположим, что внешняя нагрузка изменяется во времени по гармоническому закону, что может быть записано в виде:

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F} e^{i\omega t}, \quad \mathbf{F} \in \text{Re},$$

где  $\mathbf{F}$ ,  $\omega$  – амплитуда и круговая частота силы,  $i$  – мнимая единица.

Тогда частное решение, соответствующее установившимся вынужденным колебаниям системы, ищем в аналогичном виде:

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U} e^{i\omega t}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + i\mathbf{U}_2,$$

где  $\mathbf{U}$  – глобальный вектор комплексных амплитуд узловых перемещений;  $\mathbf{U}_1$  и  $\mathbf{U}_2$  – соответственно действительная и мнимая части.

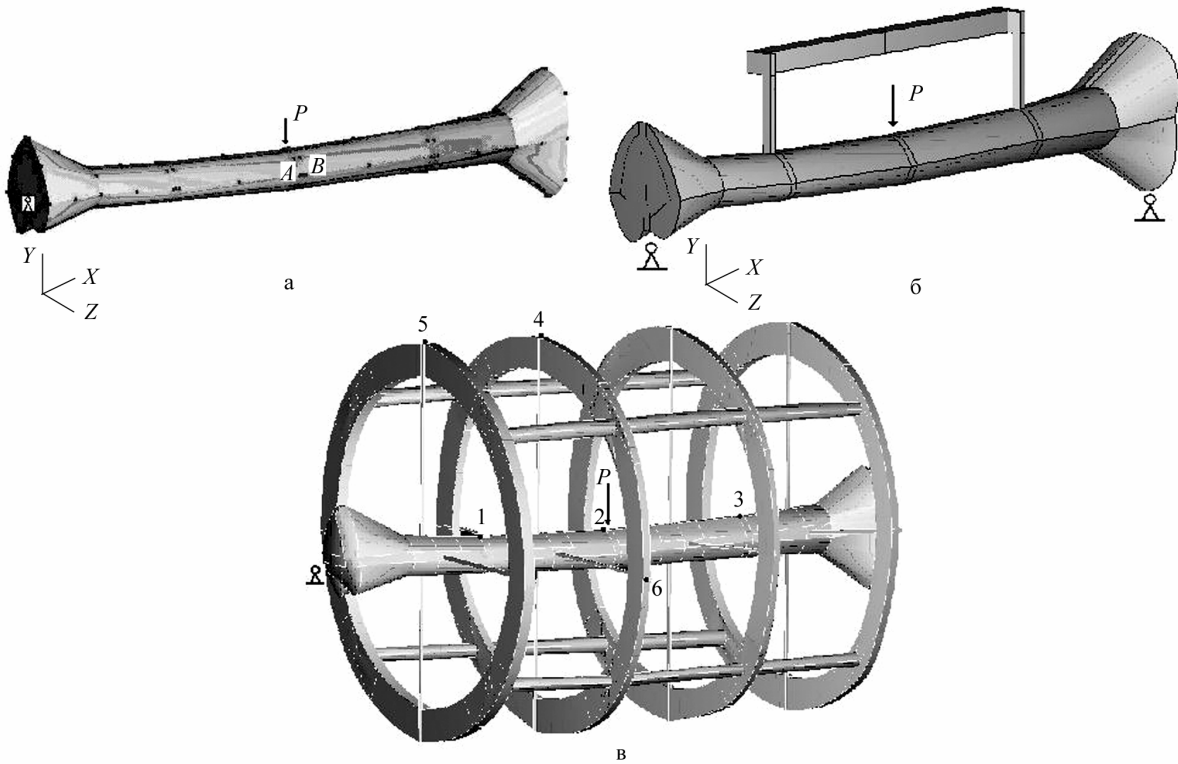


Рис. 1. Конечно-элементные модели: а – целой большеберцовой кости; б – биомеханической системы, составленной из кости и плоской рамной конструкции; в – биомеханической системы, составленной из кости и аппарата Илизарова

Подставляя выражения силы и перемещения в дифференциальное уравнение, получим систему комплексных алгебраических уравнений относительно вектора комплексных амплитуд узловых перемещений:

$$(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{R}i\omega + \mathbf{K})\mathbf{U} = \mathbf{F}.$$

После решения последней системы амплитудные значения узловых ускорений вычисляются согласно следующей формуле:

$$\mathbf{a} = \omega^2 \sqrt{\mathbf{U}_1^2 + \mathbf{U}_2^2}.$$

Представленный алгоритм реализован в виде авторского программного кода *MechanicsFE* и позволяет рассчитывать вязкоупругие установившиеся колебания механических конструкций под действием внешней гармонической силы.

**Конечно-элементные модели кости и фиксатора.** На основе данных непосредственных измерений геометрических размеров выбранного экземпляра большеберцовой кости была разработана ее трехмерная конечно-элементная модель (рис.1а). Основные геометрические размеры кости следующие: длина вдоль продольной оси  $X$  равна 360 мм, характерный диаметр среднего сечения 25 мм, наибольшие размеры головок по поперечным осям  $Y$  и  $Z$  – 57×43 и 74×52 мм. В качестве граничных условий было принято шарнирное опирание в плоскости ( $XY$ ) путем наложения кинематических связей на узловые точки, лежащие на средней линии, на поверхности проксимального и дистального отделов кости. Это соответствует физиологически возможным поворотам кости в сагитальной плоскости ( $XY$ ).

Известно, что если концентрация напряжений не рассматривается, то небольшого числа конечных элементов достаточно для описания упругих колебаний. Принимая во внимание, что в модели применены элементы высокого порядка с квадратичной

аппроксимацией перемещений, то только 62 конечных элемента было использовано. Глобальное число степеней свободы модели кости составило 1242.

Рассматривались два типа внешних фиксирующих устройств [15]. Первый фиксатор представлял собой плоскую рамную конструкцию, имеющую следующие размеры: длина 180 мм, высота выступающей из кости части 47 мм, диаметры составляющих фиксатор стержней 4 и 8 мм. Материал фиксатора (сплав нержавеющей стали) характеризуется модулем упругости  $E = 206$  ГПа, модулем сдвига  $G = 80$  ГПа и плотностью  $\rho = 7000$  кг/м<sup>3</sup>. Модель большеберцовой кости с фиксирующим устройством содержит 152 гексаэдральных 20-узловых элемента и имеет 3003 степени свободы (рис. 1б).

В качестве второго типа фиксатора рассматривалась модель аппарата Илизарова. Базовая длина устройства равна 264 мм, внешний и внутренний диаметры колец равны соответственно 250 и 214 мм, толщина колец 6 мм, диаметр скрепляющих стержней 6 мм, диаметр спиц 2,5 мм. Материал фиксатора характеризуется модулем упругости  $E = 206$  ГПа, модулем сдвига  $G = 80$  ГПа и плотностью  $\rho = 7900$  кг/м<sup>3</sup>. Глобальное число конечных элементов модели составляло 348 элементов, глобальное число степеней свободы 10128. Для того чтобы уменьшить эти значения, была разработана упрощенная модель фиксирующего устройства, не содержащая круговых отверстий в кольцах. В этом случае модифицированная модель описывалась 46 конечными элементами и 1320 степенями свободы. Для того чтобы сохранить неизменными инерционные и жесткостные параметры колец, рассматривался материал со следующими эффективными свойствами:  $E_{ef} = 170$  ГПа,  $G_{ef} = 65$  ГПа,  $\rho_{ef} = 7484$  кг/м<sup>3</sup>. Две компьютерные модели (кости и аппарата Илизарова) были объединены в одну с глобальным числом конечных элементов, равным 402, и глобальным числом степеней свободы, равным 9336 (рис. 1в).

Материал кости рассматривался как кусочно-однородная изотропная сплошная среда, имеющая следующие характеристики для компактной ткани [7, 16]: модуль упругости  $E = 18700$  МПа, модуль сдвига  $G = 6680$  МПа, плотность  $\rho = 1850$  кг/м<sup>3</sup>; для спонгиозной ткани: модуль упругости  $E = 500$  МПа, модуль сдвига  $G = 200$  МПа, плотность  $\rho = 800$  кг/м<sup>3</sup>. При этом эпифизы (головки) большеберцовой кости, физиологически состоящие из порообразной губчатой ткани, покрытой тонким кортикальным слоем, целиком моделировались конечными элементами, имеющими физико-механические характеристики спонгиозной ткани. Диафиз (средняя часть) кости рассматривался как полый цилиндр сложной пространственной формы, образованный компактной тканью, без учета слоя спонгиозной ткани и заполняющего внутреннее пространство костного мозга.

**Экспериментальное оборудование.** Последний механический параметр костной ткани, существенно влияющий на амплитуду колебаний и вид резонансных кривых, – это вязкость  $\eta$ . Был разработан лабораторный вибрационный стенд для записи и анализа амплитудно-частотных характеристик длинных трубчатых костей. Устройство состоит из платформы для закрепления кости и вибратора (рис. 2а). Кость устанавливается на платформу и шарнирно фиксируется в области эпифизов. Возбуждение механических колебаний осуществляется электродинамическим вибратором посредством штока, расположенного перпендикулярно оси кости. Частота и амплитуда колебаний изменяются с помощью звукового генератора и усилителя. Для измерения вибрации используется датчик-акселерометр, установленный на поверхности кости. Выходной сигнал от исследуемого объекта автоматически регистрируется после предварительного усиления. В результате на выходе получается амплитудно-частотная характеристика кости.

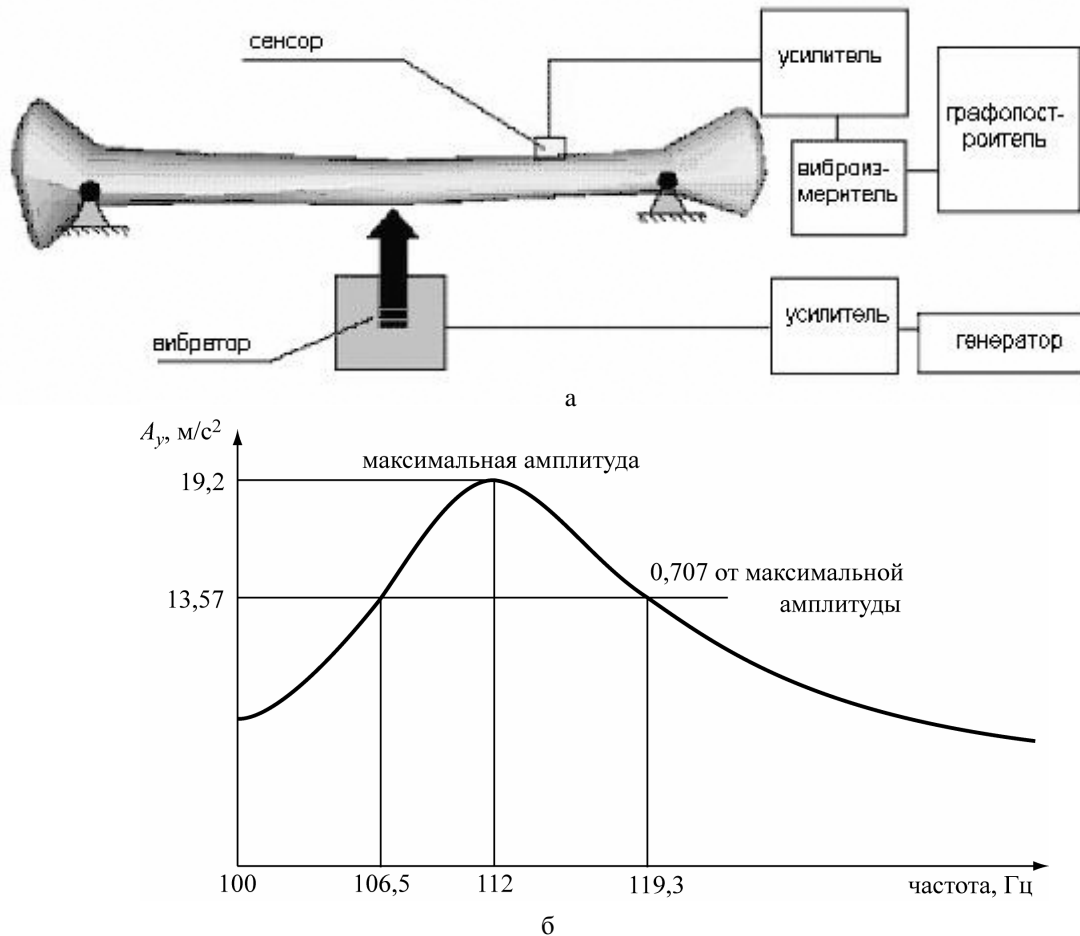


Рис. 2. Схема экспериментального стенда для снятия амплитудно-частотных характеристик кости (а) и экспериментально полученная резонансная кривая кости (б)

**Моделирование процесса восстановления кости.** Для исследования процесса восстановления целостности кости в зоне перелома узкий слой толщиной 4 мм в среднем сечении кости между точками *A* и *B* (рис. 1а) моделировался конечными элементами с различными вариантами физико-механических характеристик регенерирующей ткани. Были рассмотрены следующие случаи:

- Заполнение места перелома мягкой гелеобразной тканью с параметрами  $E = 5$  кПа,  $G = 1.67$  кПа,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>; данный случай моделирует начальный период регенерации кости – до 20 дней после хирургической операции [17].
- Образование хрящевой ткани с параметрами  $E = 3,78 \div 50$  МПа,  $G = 1,3 \div 1,67$  МПа,  $\rho = 900$  кг/м<sup>3</sup>, соответствующие ориентировочно пятидесятому дню сращения кости [17].
- Образование спонгиозной ткани с параметрами  $E = 500$  МПа,  $G = 200$  МПа,  $\rho = 800$  кг/м<sup>3</sup>.

Приведенные выше варианты описывают начальный период заживления кости, а также могут быть интерпретированы как патологические случаи остеосинтеза, такие как замедленная консолидация, образование “ложных суставов” и нестабильность соединения, распознавание которых даже при использовании рентгенологической аппаратуры не является однозначным.

Кроме этого, был рассмотрен физиологически нормальный процесс оссификации костной ткани, т.е. образование компактной костной ткани с различной степенью минерализации: 12, 20 и 29 содержания основного кальцийсодержащего

вещества – гидроксиапатита, при норме приблизительно 42 % [16]. Из литературных источников [16] известна взаимосвязь содержания кальция в компактной костной ткани с модулем Юнга. В соответствии с этим были рассмотрены следующие варианты физико-механических характеристик регенерата:

- $V_a = 12 \%$ ,  $E = 1500$  МПа,  $G = 517$  МПа,  $\rho = 1100$  кг/м<sup>3</sup>;
- $V_a = 20 \%$ ,  $E = 4000$  МПа,  $G = 1397$  МПа,  $\rho = 1400$  кг/м<sup>3</sup>;
- $V_a = 29 \%$ ,  $E = 9000$  МПа,  $G = 3170$  МПа,  $\rho = 1700$  кг/м<sup>3</sup>.

Все данные суммированы в таблице.

## Результаты

**Определение вязкости костной ткани.** Конечно-элементный анализ биомеханической системы был проведен согласно подходу, рассмотренному выше. Стационарные колебания возбуждались гармонической силой приложенной на малом участке поверхности в среднем сечении кости в направлении оси  $Y$ . Значение силы было принято равным 0,32 Н во всех рассматриваемых случаях. Были получены резонансные кривые целой большеберцовой кости. Исследование амплитудно-частотной характеристики шарнирно-опертой большеберцовой кости показало наличие низшей собственной частоты, равной 210 Гц (рис. 3а). Первая форма колебаний совпадает со статическим прогибом кости и соответствует поперечным колебаниям кости в сагиттальной плоскости ( $XY$ ).

Для определения значения вязкости костной ткани был исследован образец кости на лабораторном вибрационном оборудовании, описанном выше. Была получена резонансная кривая целой большеберцовой кости (рис. 2б). Затем, изменяя значение вязкости в пределах от 0 до 0,1 МПа·с и осуществляя тестовые вычисления с помощью программы *MechanicsFE*, мы пытались добиться приблизительного соответствия между экспериментальными и расчетными резонансными кривыми (рис. 3а). При этом в качестве основного числового параметра, определяющего диссипативные свойства биомеханической системы, был принят частотный диапазон на уровне 0,707 максимальной амплитуды:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1,$$

где  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  – частоты, соответствующие уровню 0,707 от максимальной амплитуды, т.е. амплитуды на резонансной частоте.

На основе данного подхода была определена вязкость костной ткани. Полученное значение составило  $\eta = 0,05$  МПа·с.

Для дальнейших исследований было необходимо определить значения вязкости регенерата в зоне перелома. В литературе были найдены только два значения для мягких биологических сред, представленные в таблице как варианты I и IIa [15]. Для того, чтобы вычислить значения вязкости для других случаев, был построен интерполяционный полином Лагранжа по трем точкам (варианты I и IIa и Норма согласно табл.) в следующих координатах:

$$e = \lg E_r,$$

$$d = -\lg\left(\frac{\eta_r}{G_r}\right).$$



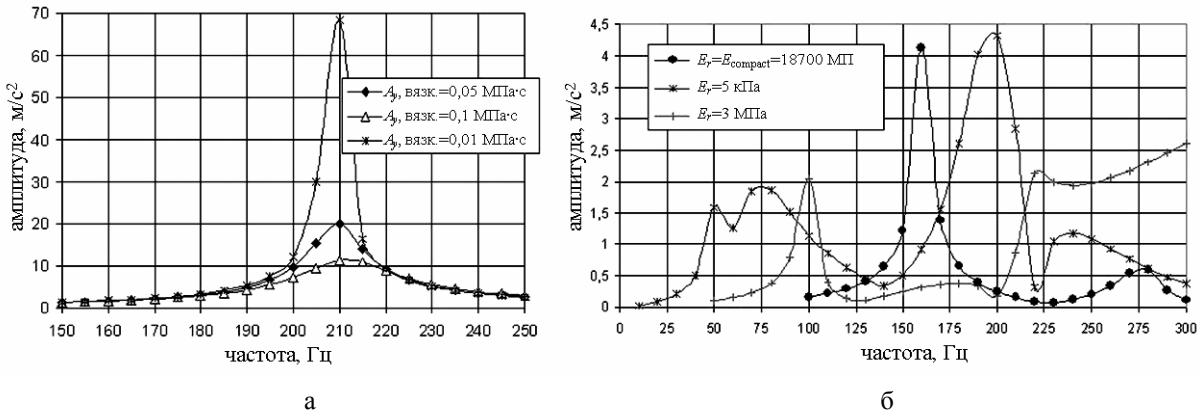


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики в средней точке на поверхности кости: а – в случае неповрежденной кости; б – в случае кости с рамным фиксирующим устройством для различных значений модуля упругости костной мозоли

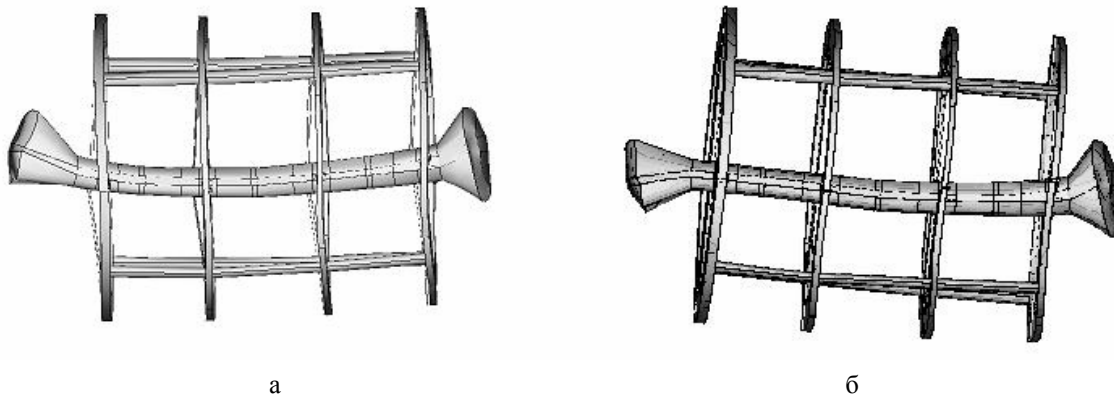


Рис. 4. Нижние изгибные формы колебаний системы «кость–аппарат Илизарова» сагиттальной плоскости: а – первая изгибная форма (101 Гц), б – вторая изгибная форма (170 Гц)

Таблица

Значения низших резонансных частот колебаний системы “кость-фиксатор” в зависимости от состояния костного регенерата в зоне перелома

Варианты	Модуль Юнга $E_r$ , МПа	Модуль сдвига $G_r$ , МПа	Плотность $\rho_r$ , кг/м <sup>3</sup>	Вязкость $\eta_r$ , МПа·с	1-я резонансная частота, Гц	2-я резонансная частота, Гц
I	0,005	0,00167	1000	$5 \cdot 10^{-5}$	50	173
II а	3,87	1,3	900	$5,4 \cdot 10^{-4}$	98	214
II б	50	17	850	$1,93 \cdot 10^{-3}$	131	229
III	500	200	800	$7,4 \cdot 10^{-3}$	149	250
A	1500	517	1100	$1,16 \cdot 10^{-2}$	158	268
B	4000	1397	1250	$2,04 \cdot 10^{-2}$	159	273
C	9000	3170	1500	$3,32 \cdot 10^{-2}$	160	274
Норма	18700	6678	1850	$5 \cdot 10^{-2}$	161	276

По известной трехточечной интерполяционной формуле Лагранжа:

$$d(e) = \frac{(e - e_2)(e - e_3)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} d_1 + \frac{(e - e_1)(e - e_3)}{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)} d_2 + \frac{(e - e_2)(e - e_1)}{(e_3 - e_2)(e_3 - e_1)} d_3$$

были получены значения вязкости для остальных физиологических случаев (табл.).

**Большеберцовая кость с аппаратами внешней фиксации.** Наложение аппарата внешней фиксации в виде плоской рамной конструкции на кость приводит к снижению первой частоты до значения 161 Гц и появлению в исследуемом диапазоне 0–300 Гц второй частоты, равной 276 Гц (рис. 3б). Первая форма колебаний в целом сохраняет свой вид, а вторая близка к крутильным колебаниям системы. Это доказывает превалирование инерционных параметров фиксатора, несмотря на повышение жесткости всей системы в плоскости (ХУ).

Результаты исследования влияния физико-механических характеристик восстанавливающейся костной ткани на значения резонансных частот для шести вариантов представлены в таблице, а также на рис. 3б для двух случаев минимальных значений модуля упругости костной мозоли.

Амплитудно-частотные характеристики системы «кость – аппарат Илизарова» были исследованы в шести точках, показанных на рис. 1в, три из которых расположены на поверхности кости, а оставшиеся выбраны на поверхности колец фиксатора. Численный анализ показал, что две точки, расположенные на поверхности кости, с номерами 2 (средняя точка около области приложения силы) и 3 (проксимальный отдел кости) дают наиболее информативные результаты. Для сравнения представлены также резонансные кривые в одной из точек на поверхности кольца фиксатора. Две расчетные формы колебаний представлены на рис. 4.

Результаты исследования влияния ослабленных механических характеристик костной мозоли на резонансные свойства полной биомеханической системы в случаях, рассмотренных выше, представлены на рис. 5.

## Обсуждение

Исследование амплитудно-частотных характеристик шарнирно-опертой изолированной большеберцовой кости показало наличие низшей резонансной частоты, равной 210 Гц (рис. 3а), и первой формы колебаний, совпадающей со статическим прогибом кости в сагиттальной плоскости (ХУ). Заметим, что в одномерной конечно-элементной модели большеберцовой кости [7] первая собственная частота при сходных граничных условиях и механических свойствах была равна 225 Гц.

Другое заключение можно сделать из сравнения полученных результатов с экспериментальными данными, представленными в работах [1–3]. В первой статье резонансно-вибрационным методом исследовалась влажная большеберцовая кость, закрепленная по концам с помощью тяжелых конических стержней во фронтальной плоскости. Явно выраженный резонансный пик наблюдался на частоте 332 Гц по амплитудно-частотной характеристике перемещений. Такое большое различие между экспериментальными и теоретическими результатами может быть объяснено определенными различиями в граничных условиях и более коротким расстоянием между фиксируемыми точками: 295 мм в эксперименте и 360 мм в расчетах. Для поперечных изгибных колебаний однородной балки значение собственной частоты может быть записано следующим образом [14]:

$$f = \alpha \sqrt{\frac{EI}{\rho FL^4}},$$

где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от номера моды колебаний и граничных условий,  $E$  – модуль Юнга,  $I$  и  $F$  – момент инерции и площадь поперечного сечения,  $\rho$  – плотность материала и  $L$  – длина балки.

Из формулы следует, что резонансная частота балки обратно пропорциональна квадрату ее длины. Следовательно, пересчитав экспериментальное значение резонансной частоты, равное 332 Гц для балки длиной 360 мм, мы получим значение, равное 222,9 Гц, что очень близко к нашим результатам.

Необходимо отметить, что значительное снижение модуля упругости регенерата  $E_r$  до значения модуля упругости спонгиозной ткани 500 МПа приводит к заметному снижению обеих основных частот. При очень малых значениях модуля упругости регенерата  $E_r = 5$  кПа и  $E_r = 3,87$  МПа наблюдается не только резкое уменьшение первой и второй резонансных частот, но и качественное изменение вида резонансных кривых (рис. 3б). В обоих случаях резонансная амплитуда  $A_z$  становится больше чем  $A_y$ . В случае  $E_r = 5$  кПа в основной резонансной зоне возникают дополнительные субрезонансные пики, характерные для мягких биологических тканей. В частности, при многочисленных экспериментальных исследованиях *in-vivo* вынужденных колебаний системы “ахиллово сухожилие - трехглавая мышца” с целью диагностики подкожных разрывов ахиллова сухожилия все резонансные кривые отличались наличием нескольких соседних пиков [10]. Другая интересная особенность колебаний наиболее ослабленной биомеханической конструкции состоит в заметном различии амплитуд колебаний двух близких точек  $A$  и  $B$  на поверхности кости слева и справа от моделируемого места перелома. Такая ситуация наблюдалась на графиках амплитудно-частотных характеристик только при очень малом модуле упругости регенерата. Увеличении его до 3,87 МПа приводило к почти одинаковым значениям амплитуд перемещений и ускорений в точках  $A$  и  $B$ . Вид резонансных кривых для ускорений  $A_y$  и  $A_z$  при значении модуля упругости регенерата  $E_r = 500$  МПа приближается к форме резонансных кривых системы “кость-фиксатор” без костной мозоли.

Изменение модуля упругости регенерата в пределах 5000–10000 МПа, связанное с постепенным увеличением доли минеральных веществ регенерата, также влияет на собственные частоты, но в значительно меньшей степени (табл. 1). Анализ форм колебаний не выявил принципиальных отличий по сравнению с аналогичными формами биомеханической конструкции без костной мозоли.

Наложение на кость устройства внешней фиксации в виде аппарата Илизарова уменьшает значение амплитуд ускорения и существенно изменяет форму резонансных кривых биомеханической системы. Это вызывает уменьшение первой резонансной изгибной частоты до значения 101 Гц и появление в исследуемом диапазоне второй изгибной формы колебаний на частотах 170–180 Гц (рис. 5). Основная форма колебаний кости сохраняет свою простую изгибную форму, в то время как аппарат Илизарова движется как почти абсолютно твердое тело вдоль вертикальной оси  $Y$  (рис. 4а). Следующая мода соответствует второй изгибной форме колебаний кости (рис. 4б), однако внешняя механическая конструкция влияет на вибрации системы таким образом, что резонансная зона становится более сглаженной и компоненты ускорения в различных направлениях не имеют одного ярко выраженного резонансного пика, как это имеет место в случае первой изгибной моды на частоте 101 Гц. Заметим, что

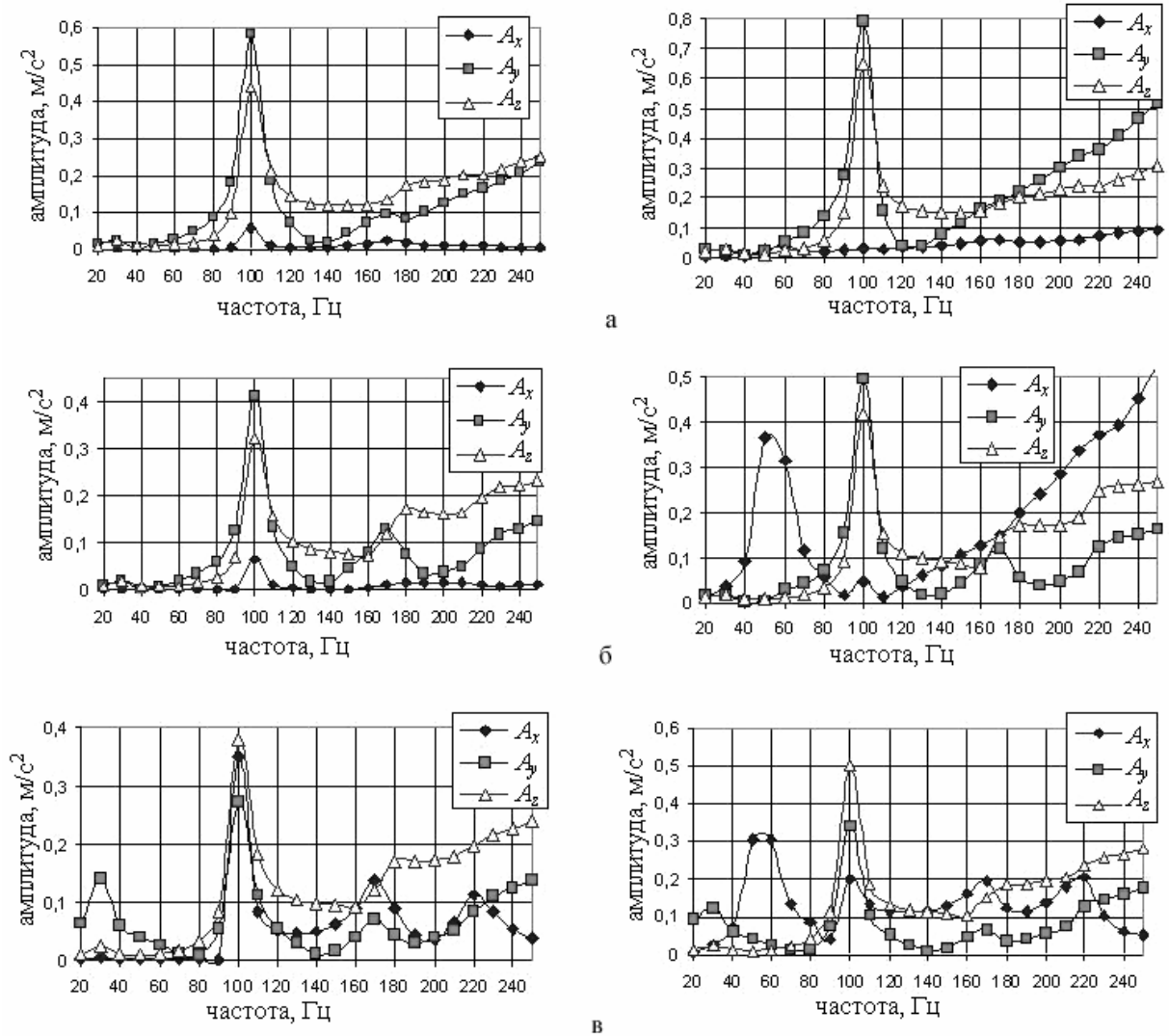


Рис. 5. Амплитудно-частотные характеристики системы «кость–аппарат Илизарова»: а – в средней точке 2 на поверхности кости; б – в проксимальной точке 3 на поверхности кости; в – в точке 6 на поверхности кольца фиксатора (рис. 1в). Результаты для «бездефектной» системы

$E_r = E_{\text{compact}} = 18700$  МПа показаны слева, результаты для системы с костной мозолью

$E_r = 5$  кПа показаны справа

первый небольшой резонансный пик около значения 30 Гц на амплитудно-частотной характеристике полной системы (рис. 5) связан только с крутильным движением колец вокруг кости и не представляет интереса для дальнейших исследований.

Можно отметить, что резонансные кривые, полученные в различных точках на поверхности кости и фиксатора, практически одинаковы за исключением компоненты  $A_x$ . Предполагается, это вызвано тем, что модель построена как единое твердое тело таким образом, что ни кость, ни фиксатор не могут двигаться относительно друг друга. В реальном случае, возможно, спицы фиксирующего устройства могут совершать малые перемещения относительно кости, так что амплитудно-частотные характеристики, регистрируемые в различных точках биомеханической конструкции, должны быть различны.

Исследование показало, что при наличии костной мозоли значительное уменьшение модуля упругости регенерата  $E_r$  до значения 5 кПа, соответствующего модулю упругости мягких тканей, не приводит к заметному уменьшению обеих основных резонансных частот, как это могло бы ожидать (рис. 5). Численный анализ

форм колебаний в этом случае также не выявил существенных отличий по сравнению с аналогичными формами «бездефектной» биомеханической конструкции. Из рисунка видно, что имеют место резонансные пики практически на тех же самых частотах в диапазоне 100–170 Гц, как это наблюдалось в предыдущем случае системы без костной мозоли. Данный факт доказывает, что внешнее фиксирующее устройство обладает жесткостью, достаточной для того, чтобы малая область, моделирующая перелом кости, не оказывала значительного влияния на жесткость всей системы. Таким образом, для практического применения метода резонансной диагностики необходимо учитывать данную особенность и слегка ослаблять аппарат во время вибрационного обследования.

Тем не менее, полученные результаты позволяют сделать заключение о физиологическом состоянии ткани в зоне перелома путем анализа резонансных амплитуд и форм резонансных кривых. Например, сравнение компонент  $A_y$  в точке 2 (рис. 5а) для «бездефектной» кости с аппаратом Илизарова и биомеханической конструкции при наличии костной мозоли показывает, что резонансный пик, соответствующий второй изгибной моде, исчезает, что приводит к монотонному возрастанию амплитуды колебаний в данном частотном диапазоне. Анализ компоненты  $A_x$  в точке 3 на поверхности большеберцовой кости и в точке 6 на кольце показывает наличие значительного увеличения амплитуды в низкочастотном диапазоне 40–60 Гц.

### Заключение

В данной работе стационарный анализ поперечных вынужденных колебаний биомеханической системы рассматривался при наличии вязкости костной ткани и материала фиксатора. Заметим, что в случае малой диссипации в системе собственные частоты совпадают с резонансными частотами вынужденных колебаний и, следовательно, они могут быть легко определены путем исследования амплитудно-частотных характеристик объекта. При этом основные собственные частоты и формы колебаний могут быть определены без решения общей проблемы об исследовании колебаний. Другая причина использования подобного подхода состояла в том, что с практической точки зрения – разработки и обоснования методики резонансной вибрационной диагностики стабильности остеосинтеза большеберцовой кости путем анализа поперечных колебаний системы, возбуждаемых электромеханическим вибратором – наибольший интерес представляют те частоты и формы колебаний, которые возникают при заданном внешнем воздействии со стороны вибратора, а также вид соответствующих амплитудно-частотных характеристик системы. При этом, поскольку в реальных условиях для регистрации амплитудно-частотных характеристик используются датчики-акселерометры, то в качестве исследуемого параметра выступает виброускорение соответствующих точек модели при рассмотрении стационарных колебаний. Отметим, что резонансные кривые, построенные по перемещениям, в целом соответствуют кривым, построенным по ускорениям соответствующих точек.

Математическое моделирование биомеханической системы, образованной большеберцовой костью и аппаратом внешней фиксации, позволило определить основные частоты и формы колебаний системы. Полученные результаты могут служить теоретическим фундаментом для разработки вибрационных методов диагностики физиологического состояния костной ткани в зоне перелома. В частности, патологические случаи несращения кости – образование хрящевой или спонгиозной

костной ткани вместо компактной, а также неполная репозиция костных отломков и заполнение места дефекта мягкими тканями – могут быть распознаваемы в процессе лечения путем регистрации и анализа амплитудно-частотных характеристик вынужденных упругих колебаний голени. Определение модуля Юнга регенерата на различных стадиях роста и оссификации может быть осуществлено тем же способом, хотя в данном случае зависимость собственных частот от упругих характеристик костной ткани в узкой зоне перелома менее выражена. Тем не менее, такой подход – активной резонансной вибродиагностики – может быть предложен для диагностики остеопороза, т.е. вымывания солей кальция из костной ткани, например, в результате длительной иммобилизации.

### Благодарности

Автор благодарит профессора В.И. Шапина, заведующего кафедрой теоретической и прикладной механики Ивановского государственного энергетического университета, и профессора С.Е. Львова, заведующего кафедрой травматологии, ортопедии и военно-полевой хирургии Ивановской государственной медицинской академии, за многочисленные технические и медицинские консультации и поддержку.

### Список литературы

1. *Christensen A.B., Ammitzboll F., Dyrbye C., Cornelissen M., Cornelissen, P., Van Der Perre G.* Assessment of tibial stiffness by vibration testing in situ. I. Identification of mode shapes in different supporting conditions // *J. Biomechanics*. 1986. V. 19. № 1. P. 53-60.
2. *Cornelissen P., Cornelissen M., Van Der Perre G., Christensen A.B., Ammitzboll F., Dyrbye C.* Assessment of tibial stiffness by vibration testing in situ. II. Influence of soft tissues, joints and fibula // *J. Biomechanics*. 1986. V. 19. № 7. P. 551-561.
3. *Cornelissen M., Cornelissen P., Van Der Perre G., Christensen A.B., Ammitzboll F., Dyrbye C.* Assessment of tibial stiffness by vibration testing in situ. III. Sensitivity of different modes and interpretation of vibration measurements // *J. Biomechanics*. 1987. V. 20. № 4. P. 333-342.
4. *Nakatsuchi Y., Tsuchikane A., Nomura A.* The vibrational mode of the tibia and assessment of bone union in experimental fracture healing using the impulse response method // *Med. Eng. Phys.* 1996. V. 18. № 7. P. 575-583.
5. *Roberts S.G., Steele C.R.* Efficacy of monitoring long-bone fracture healing by measurement of either bone stiffness or resonant frequency: numerical simulation // *J. Orthop. Res.* 2000. V. 18. № 5. P. 691-697.
6. *Zinkovsky A.V., Sholuha V.A., Ivanov A.A.* Mathematical Modeling and Computer Simulation of Biomechanical Systems. Singapore: World Scientific, 1996.
7. *Адамович И.С., Диевбернс У.К.* Некоторые задачи динамики большеберцовой кости человека // *Совр. пробл. биомеханики*. 1989. Т. 6. С. 99-111.
8. *Lowet G., Dayuan X., Der Perre G.* Study of the vibrational behaviour of a healing tibia using finite element modeling // *J. Biomechanics*. 1996. V. 29. № 8. P. 1003-1010.
9. *Мальшев И.В., Ноздрин М.А., Шапин В.И., Щавелев В.Л.* Стенд для вибродиагностики ахиллова сухожилия. Патент РФ № 2077266, Б.И. 1997. №11. С. 77-79.
10. *Maslov L.B., Shapin V.I.* Vibromechanical diagnostic criteria for the achilles tendon acute tears // *Russian J. Biomechanics*. 2000. V. 4. № 1. P. 62-70.
11. *Маслов Л.Б., Блескин Е.В., Вихрев С.В., Потехин С.П., Шапин В.И., Львов С.Е., Кураев А.В.* Исследование вынужденных колебаний биомеханической системы “кость-фиксатор” // *Материалы V рос. конф. по биомех. “Биомеханика-2000”*. Н.Новгород, 2000. С. 53-54.
12. *Циглер Ф.* Механика твердых тел и жидкостей. Москва-Ижевск: Изд-во РХД, 2002.
13. *Zienkiewicz O.C.* The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill, 1971.
14. *Timoshenko S., Young D.H., Weaver W.* Vibration Problems in Engineering. New York: Wiley & Sons Publishers, 1974.
15. *Образцов И.Ф., Адамович И.С., Барер А.С.* Проблемы прочности в биомеханике. М., 1988.

16. Янсон Х.А. Биомеханика нижней конечности человека. Рига: Зинатне, 1975.
17. Pfafrod C.S., Vitinesh V.M., Laizans Y.B. Principles of great strain theory for mechanical behaviour description of bone regenerate in second fracture healing // Int. conf. "Trends in human biomechanics research and applications in medicine and surgery". Riga, 1986. P. 579-583.

## **RESONANT PROPERTIES OF THE INTACT TIBIA AND THAT WITH EXTERNAL FIXATIVE DEVICES**

**L. Maslov (Ivanovo, Russia)**

Dynamic simulation of the biomechanical systems consisting of the human tibia and external fixative devices as the simplest frame construction and Ilizarov apparatus is considered. The finite element method implemented as the program code MechanicsFE on the basis of 20-nodal isoparametric elements is utilised for the computer analysis. The numerical vibration analysis has allowed to calculate both the lowest resonant frequencies and modes and amplitude–frequency characteristics of the systems at the various points on the surface of the bone and fixator as well. Different variants of the mechanical parameters of the regenerative osseous tissue in the fracture zone were considered for mathematical simulation of the bone healing. The values of resonant frequencies and modes obtained by vibration analysing intact tibia and fractured bone with external fixative apparatus can be used as theoretical fundament for developing resonance methods for physiological state diagnostics of the bone callus healing after fracture and surgery operation.

**Key words:** tibia, callus, finite elements, vibrations, resonance, diagnostics.

*Получено 21 июня 2003*