

УДК 539.3: 537.633.9

**А.А. Паньков**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Пермь, Россия

## **ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТЬ И ЭФФЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ПЬЕЗОКОМПОЗИТОВ**

Получено новое решение связанной краевой задачи электромагнитоупругости в обобщенном сингулярном приближении статистической механики композитов на основе новых решений для сингулярных составляющих вторых производных функций Грина для однородной трансверсально-изотропной пьезоэлектромагнитной среды с эллипсоидальным зерном неоднородности. На основе анализа корреляционных функций квазипериодических структур и решения связанной краевой задачи электромагнитоупругости методом периодических составляющих получены уточненные решения для тензоров эффективных электромагнитных и термоупругих свойств композитов с пьезоэлектрическими и пьезомагнитными фазами. Проведен численный расчет и анализ влияния на действительные и мнимые части эффективных коэффициентов электромагнитной связи полидисперсных магнитоэлектрических пьезокомпозитов с максвелл-вагнеровской релаксацией величины наполнения, инверсии свойств фаз и частоты электрического поля.

**Ключевые слова:** пьезокомпозит, электромагнитоупругость, максвелл-вагнеровская релаксация, эффективные свойства, квазипериодическая структура

**A.A. Pan'kov**

Perm National Research Politechnic University, Perm, Russian Federation

## **ELECTRO MAGNETIC ELASTICITY AND EFFECTIVE PROPERTIES OF PIEZOCOMPOSITES**

New decision of stochastic connected boundary-volume problem of electro-magnetic elasticity by generalized singular approach of statistical mechanical of composites is received on base of the new decisions for singular parts of second derived Green's function for uniform transversal-isotropic piezo electro-magnetic media. The specified decisions for tensors of effective electromagnetic and thermoelastic properties of composites with piezoelectric and piezomagnetic phases received on the basis of the analysis of correlation functions of quasiperiodic structures and on the basis of the solution of stochastic boundary-volume problem of the theory of electromagnetic thermoelasticity by method of periodic components. Numerical calculation and the analysis of influence on the real and imaginary parts of effective electro-magnetic factor of polydisperse magnetoelectric piezocomposites with maksvell-wagner relaxation of volume fraction, inversion of properties of phases and frequencies of the electric field is carried out.

**Key words:** piezocomposite, electro-magnetic elasticity, maxwell-wagner relaxation, effective properties, quasiperiodic structure.

## Введение

Пьезоактивные материалы благодаря своим уникальным физико-механическим свойствам находят широкое применение в различных областях науки и техники, в основном в акустике, вычислительной технике, радиоэлектронике и управляющих системах [1, 2]. Одним из новых классов пьезоматериалов являются композиты с пьезоактивными элементами структуры. Поведение и свойства пьезокомпозита обуславливаются сложным взаимодействием (посредством взаимосвязанных полей различной физической природы) большого числа образующих структуру материала элементов. Пьезоактивные композиты находят применение в тех случаях, когда традиционные пьезоэлектрики и пьезомагнетики (кристаллы, керамика, сплавы) не обеспечивают необходимого комплекса пьезомеханических характеристик, например механической прочности. Возможность оптимизации и управления структурой пьезокомпозитов открывает путь создания новых пьезоматериалов с наперед заданными электро- и магнитомеханическими свойствами. В результате взаимодействия на микроуровне пьезоактивных элементов структуры могут возникать *качественно новые эффекты* по сравнению с однородными пьезоматериалами [3,4].

Статья носит обзорный характер и отражает исследования автора [5–9] по изучению свойств и закономерностей поведения пьезоэлектромагнетиков на основе развития современных методов решения стохастических связанных краевых задач электромагнитоупругости для неоднородных стохастических сред с пьезоактивными элементами структуры.

### 1. Упругие композиты

Ранее в [5] в сингулярном приближении метода периодических составляющих получено решение для тензора эффективных упругих свойств квазипериодического композита в виде

$$\mathbf{C}^* = p\mathbf{C}^{p*} + (1-p)\mathbf{C}^{s*} \quad (1)$$

через тензор  $\mathbf{C}^{p*}$  эффективных упругих свойств композита с идеальной периодической структурой и обобщенное сингулярное приближение [10] для тензора  $\mathbf{C}^{s*}$  эффективных упругих свойств,  $p \in (0;1)$  – коэффициент периодичности,

$$p \equiv (v_{11} - v_1^2) / (v_1 (1 - v_1)), \quad (2)$$

рассчитывается через одноточечные смешанные моменты

$$v_{11} = \langle i_1^p(\mathbf{r}) i_1(\mathbf{r}) \rangle \quad (3)$$

индикаторных функций включений в квазипериодической  $i_1(\mathbf{r})$  и периодической  $i_1^p(\mathbf{r})$  средах. Отметим, что геометрический смысл величины  $v_{11}$  – это относительное объемное содержание области пересечения включений при мысленном наложении квазипериодической структуры на идеальную периодическую структуру. Выполняются равенства  $\langle i_1 \rangle = \langle i_1^p \rangle = v_1$ , где  $v_1$  – величина относительного объемного содержания включений в периодической и квазипериодической структурах, оператор осреднения по представительной области  $V$

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{V} \int_V \dots dV. \quad (4)$$

Сингулярное приближение [10] при решении стохастической краевой задачи теории упругости для микронеоднородной области основано на учете у второй производной функции Грина лишь сингулярной составляющей, пропорциональной обобщенной дельта-функции Дирака. Тензор  $C^{s*}$  в (1) соответствует микронеоднородной среде, у которой полностью отсутствует корреляция упругих свойств в различных ее точках.

В [6, 7] проведен анализ двухточечных корреляционных функций для квазипериодической [6] и предельно полидисперсной [11] структур и сделан вывод о том, что нормированные корреляционные функции полидисперсной (рис. 1, б) статистической смеси близки к виду специальных корреляционных функций, используемых в методе периодических составляющих при решении стохастической краевой задачи теории упругости особенно при высоких величинах наполнения композита включениями. В результате в [7] было получено уточненное решение для тензора эффективных упругих свойств  $C^*$  композита с квазипериодической структурой:

$$C^* = pC^{p*} + (1 - p)C^{sc*} \quad (5)$$

через тензор  $C^{p*}$  эффективных упругих свойств композита с идеальной периодической структурой, и тензор  $C^{sc*}$  – решение обобщенного сингулярного приближения по самосогласованной схеме («self-consistent approach» [6,10,11], т.е. когда тензор упругих свойств «среды сравнения» [10] приравнен к  $C^{sc*}$ ,  $p \in (0;1)$  – коэффициент периодичности, учитывающий характер и величину разупорядоченности включений в квазипериодической структуре (2), (3). Отметим, что относительные объемные содержания включений во всех трех рассматриваемых структурах: квазипериодической, периодической и полидисперсной статистической смеси равны между собой, т.е.  $v_1 = v_1^p = v_1^{sc}$ . Верхние индексы « $p$ », « $sc$ » указывают на принадлежность соответственно к периодической структуре и полидисперсной статистической смеси.

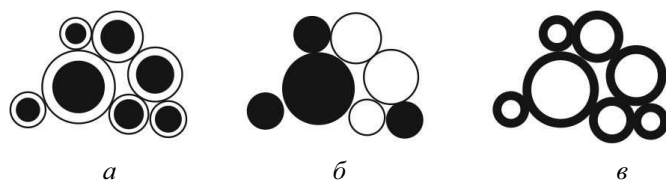


Рис. 1. Фрагменты матричных (а, б) и кластерных (в) полидисперсных структур

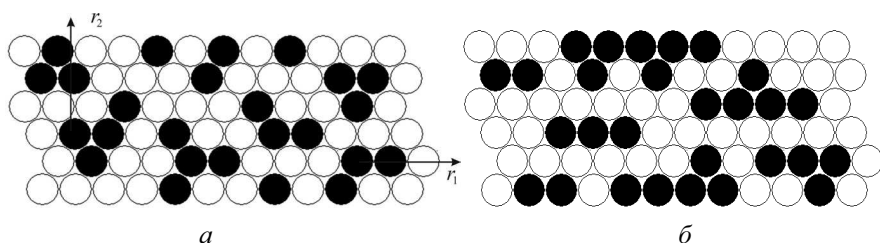


Рис. 2. Фрагменты квазипериодических структур со статистически независимым (а) и коррелированным по оси  $r_1$  (б) расположением включений

На рис. 2 изображены фрагменты представительных реализаций случайных структур со статистически независимым (рис. 2, а) и коррелированным по оси  $r_1$  (рис. 2, б) расположением центров круговых сечений однородных волокон в узлах идеальной гексагональной решетки в трансверсальной плоскости  $r_1 r_2$ , например с минимальной гарантированной прослойкой  $\delta$  матрицы между волокнами в 2 % от радиуса

волокна  $r_0$ , однонаправленного волокнистого композита. Графики на рис. 3 подтверждают сделанный в [7] вывод, что для структуры на рис. 1, *a* нормированные корреляционные функции полидисперсной статистической смеси ( $x = \rho/2r_0$ ),

$$k_{11}^{(0)}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left( \arccos(x) - x\sqrt{1-x^2} \right), & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x \geq 1 \end{cases} \quad (6)$$

значительно более близки к виду используемых в методе периодических составляющих смешанных корреляционных функций

$$k_{11}^{(2)}(\rho) = \frac{1}{D_{11}} \langle i_1'(\mathbf{r}) i_1^\circ(\mathbf{r}_1) \rangle, \quad (7)$$

чем к виду корреляционных функций

$$k_{11}^{(1)}(\rho) = \frac{1}{D_{11}} \langle i_1'(\mathbf{r}) i_1'(\mathbf{r}_1) \rangle \quad (8)$$

в традиционном подходе [10], где  $\rho = |\mathbf{\rho}|$  – расстояние между точками  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$ , вектор  $\mathbf{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$  направлен вдоль оси  $r_1$ , дисперсия

$$D_{11} = v_1(1 - v_1),$$

отклонения

$$i_1'(\mathbf{r}) = i_1(\mathbf{r}) - v_1, \quad i_1^\circ(\mathbf{r}) = i_1(\mathbf{r}) - i_1^p(\mathbf{r}).$$

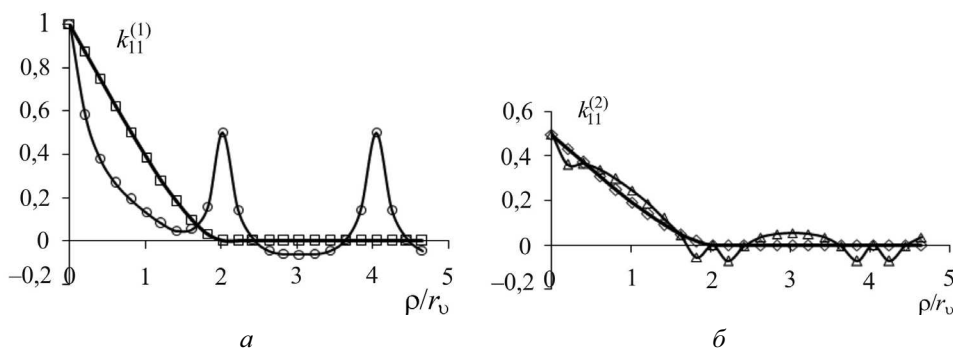


Рис. 3. Нормированные корреляционные функции  $k_{11}^{(1)}$  ( $\odot$ ) (*a*) и  $k_{11}^{(2)}$  ( $\triangle$ ) (*б*) и их аппроксимации  $k_{11}^{(0)}$  ( $\square$ ) (*a*) и  $(1-p)k_{11}^{(0)}$  ( $\diamond$ ) (*б*)

Благодаря близости  $k_{11}^{(2)}$  (7) к аппроксимации  $(1-p)k_{11}^{(0)}$  (2), (6) стало возможным уточнение в виде (5) формулы (1) для расчета тензора эффективных упругих свойств  $\mathbf{C}^*$  квазипериодического композита в сингулярном приближении метода периодических составляющих.

## 2. Электромагнитоупругие пьезокомпозиты

**Постановка задачи.** Пусть представительная область  $\mathbf{V}$  композита с квазипериодической структурой состоит из двух однородных трансверсально-изотропных пьезоэлектромагнитных фаз, плоскости изотропии которых лежат в координатной плоскости  $r_1 r_2$ ,  $r_3$  – ось поляризации. Для области  $\mathbf{V}$  задан тензор однородной макродеформации  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ , векторы однородных макронапряженностей электрического  $\widehat{\mathbf{E}}^*$  и магнитного  $\widehat{\mathbf{H}}^*$  полей и однородное приращение температуры  $\Theta$ , вызванное внешним нагревом. Выполняются условия идеального контакта: непрерывность электрического  $\phi$  и магнитного  $\psi$  потенциалов, векторов перемещений  $\mathbf{u}$ , напряжений  $\mathbf{p}$ , индукций электрического  $\widehat{\mathbf{D}}$  и магнитного  $\widehat{\mathbf{B}}$  полей на межфазных поверхностях. Для каждой фазы  $f = \overline{1,2}$  запишем определяющие соотношения [1–4]

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijmn}^{(f)} \varepsilon_{mn} - e_{nij}^{(f)} \widehat{E}_n - h_{nij}^{(f)} \widehat{H}_n - \beta_{ij}^{(f)} \Theta, \\ \widehat{D}_i &= e_{imn}^{(f)} \varepsilon_{mn} + \lambda_{in}^{(f)} \widehat{E}_n + \pi_i^{(f)} \Theta, \\ \widehat{B}_i &= h_{imn}^{(f)} \varepsilon_{mn} + \mu_{in}^{(f)} \widehat{H}_n + \vartheta_i^{(f)} \Theta,\end{aligned}\tag{9}$$

связывающие напряжения  $\boldsymbol{\sigma}$ , индукции электрического  $\widehat{\mathbf{D}}$  и магнитного  $\widehat{\mathbf{B}}$  полей с деформациями  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , напряженностями электрического  $\widehat{\mathbf{E}}$  и магнитного  $\widehat{\mathbf{H}}$  полей через считающиеся известными для каждой фазы  $f$  тензоры упругих свойств  $\mathbf{C}_f$ , пьезоэлектрических  $\mathbf{e}_f$  и пьезомагнитных  $\mathbf{h}_f$  свойств, диэлектрических  $\boldsymbol{\lambda}_f$  и магнитных  $\boldsymbol{\mu}_f$  проницаемостей, температурных коэффициентов  $\boldsymbol{\beta}_f$ , пьезоэлектрических постоянных  $\boldsymbol{\pi}_f$  и  $\boldsymbol{\vartheta}_f$ . В микронеоднородной области  $\mathbf{V}$  физико-механические свойства композита задаем функциями координат  $\mathbf{r}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{r}) \\ \lambda(\mathbf{r}) \\ \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{e}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{r}) \\ \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) \\ \boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}) \\ \vartheta(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \sum_{f=1}^2 \begin{pmatrix} \mathbf{C}_f \\ \lambda_f \\ \boldsymbol{\mu}_f \\ \mathbf{e}_f \\ \mathbf{h}_f \\ \boldsymbol{\beta}_f \\ \boldsymbol{\pi}_f \\ \vartheta_f \end{pmatrix} i_f(\mathbf{r}), \quad i_f(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \mathbf{V}_f, \\ 0, & \mathbf{r} \notin \mathbf{V}_f, \end{cases} \quad (10)$$

где индикаторные функции фаз  $i_f(\mathbf{r})$  описывают взаимное расположение фаз в области  $\mathbf{V}$  и обладают свойством статистической однородности, эргодичности [10];  $\mathbf{V}_f$  – область и  $\langle i_f \rangle = v_f$  – относительное объемное содержание  $f$ -й фазы в  $\mathbf{V} = \bigcup_{f=1}^2 \mathbf{V}_f$  (4). Проводимости  $\gamma_f$  фаз и частоты  $\omega$  приложенного электрического поля учитываем через комплексную форму записи [12–14]

$$\lambda_f = \lambda'_f - i \frac{\gamma_f}{\omega} \quad (11)$$

тензоров диэлектрических проницаемостей  $\lambda_f$  фаз с действительными частями  $\lambda'_f$ , что приводит к комплексным значениям искомым тензоров эффективных пьезоэлектромагнитных свойств композита и, как следствие, к возникновению на макроуровне композита дисперсии и энергетических потерь в переменных электрических полях, известных под названием «максвелл-вагнеровская релаксация».

Искомые трансверсально-изотропные тензоры эффективных пьезоэлектромагнитных свойств  $\mathbf{C}^*$ ,  $\mathbf{e}^*$ ,  $\mathbf{h}^*$ ,  $\lambda^*$ ,  $\boldsymbol{\mu}^*$ ,  $\boldsymbol{\beta}^*$ ,  $\boldsymbol{\pi}^*$ ,  $\vartheta^*$  и дополнительно новые тензоры  $\boldsymbol{\chi}^*$ ,  $\mathbf{k}^*$  электромагнитной связи входят в определяющие соотношения на макроуровне композита:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}^* &= C_{ijmn}^* \varepsilon_{mn}^* - e_{nij}^* \widehat{E}_n^* - h_{nij}^* \widehat{H}_n^* - \beta_{ij}^* \Theta, \\
 \widehat{D}_i^* &= e_{imn}^* \varepsilon_{mn}^* + \lambda_{in}^* \widehat{E}_n^* + \chi_{in}^* \widehat{H}_n^* + \pi_i^* \Theta, \\
 \widehat{B}_i^* &= h_{imn}^* \varepsilon_{mn}^* + \mu_{in}^* \widehat{H}_n^* + \kappa_{in}^* \widehat{E}_n^* + \vartheta_i^* \Theta,
 \end{aligned} \tag{12}$$

где макроскопические значения напряжений  $\boldsymbol{\sigma}^* = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  и деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ , индукций  $\widehat{\mathbf{D}}^* = \langle \widehat{\mathbf{D}} \rangle$ ,  $\widehat{\mathbf{B}}^* = \langle \widehat{\mathbf{B}} \rangle$  и напряженностей  $\widehat{\mathbf{E}}^* = \langle \widehat{\mathbf{E}} \rangle$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}^* = \langle \widehat{\mathbf{H}} \rangle$ .

Ненулевые компоненты рассматриваемых трансверсально-изотропных тензоров  $\boldsymbol{\lambda}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{h}$ , на микро- (9), (10) и макроуровнях (12) композита можно наглядно представить в матричной форме записи

$$\begin{aligned}
 \|\lambda_{ij}\| &= \left\| \begin{array}{ccc} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{array} \right\|, \quad \|\mu_{ij}\| = \left\| \begin{array}{ccc} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{array} \right\|, \\
 \|\mathcal{C}_{ij}\| &= \left\| \begin{array}{cccccc} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{1133} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{array} \right\|, \\
 \|e_{ij}\| &= \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{113} & 0 & 0 \\ e_{311} & e_{311} & e_{333} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \\
 \|h_{ij}\| &= \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & h_{123} & h_{113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{113} & -h_{123} & 0 \\ h_{311} & h_{311} & h_{333} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,
 \end{aligned} \tag{13}$$



$$\|\beta_{ij}\| = \begin{vmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{vmatrix}, \quad \{\pi_i\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi_3 \end{Bmatrix}, \quad \{\vartheta_i\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix},$$

где  $c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$ , тензорные и матричные индексы связаны между собой соотношениями:  $11 \rightarrow 1$ ,  $22 \rightarrow 2$ ,  $33 \rightarrow 3$ ,  $23$  и  $32 \rightarrow 4$ ,  $13$  и  $31 \rightarrow 5$ ,  $12$  и  $21 \rightarrow 6$ .

Вычисление тензоров эффективных свойств пьезокомпозигов в общем случае сводится к решению связанной стохастической краевой задачи электромагнитоупругости с быстроосциллирующими коэффициентами (10) в представительной области  $\mathbf{V}$  с границей  $\Gamma$

$$\begin{aligned} & [C_{ijmn}(\mathbf{r})u_{m,n}(\mathbf{r})]_{,j} + [e_{nij}(\mathbf{r})\varphi_{,n}(\mathbf{r})]_{,j} + [h_{nij}(\mathbf{r})\psi_{,n}(\mathbf{r})]_{,j} - [\beta_{ij}(\mathbf{r})]_{,j} \Theta = 0, \\ & [e_{jmn}(\mathbf{r})u_{m,n}(\mathbf{r})]_{,j} - [\lambda_{jn}(\mathbf{r})\varphi_{,n}(\mathbf{r})]_{,j} + [\pi_j(\mathbf{r})]_{,j} \Theta = 0, \quad (14) \\ & [h_{jmn}(\mathbf{r})u_{m,n}(\mathbf{r})]_{,j} - [\mu_{jn}(\mathbf{r})\psi_{,n}(\mathbf{r})]_{,j} + [\vartheta_j(\mathbf{r})]_{,j} \Theta = 0, \\ & u_i|_{\Gamma} = \varepsilon_{ij}^* r_j, \quad \varphi|_{\Gamma} = -\widehat{E}_j^* r_j, \quad \psi|_{\Gamma} = -\widehat{H}_j^* r_j \end{aligned}$$

для полей перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , электрического  $\varphi(\mathbf{r})$  и магнитного  $\psi(\mathbf{r})$  потенциалов. Эти поля, в силу линейности задачи (14) будут пропорциональны заданным на макроуровне однородным полям  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ ,  $\widehat{\mathbf{E}}^*$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}^*$ ,  $\Theta$ :

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{r}) &= \varepsilon_{ij}^* r_j + a_{imn}(\mathbf{r})\varepsilon_{mn}^* + b_{in}(\mathbf{r})\widehat{E}_n^* + d_{in}(\mathbf{r})\widehat{H}_n^* + t_i(\mathbf{r})\Theta, \\ \varphi(\mathbf{r}) &= -\widehat{E}_j^* r_j + f_{mn}^{(1)}(\mathbf{r})\varepsilon_{mn}^* + h_n^{(1)}(\mathbf{r})\widehat{E}_n^* + m_n^{(1)}(\mathbf{r})\widehat{H}_n^* + t^{(1)}(\mathbf{r})\Theta, \\ \psi(\mathbf{r}) &= -\widehat{H}_j^* r_j + f_{mn}^{(2)}(\mathbf{r})\varepsilon_{mn}^* + h_n^{(2)}(\mathbf{r})\widehat{E}_n^* + m_n^{(2)}(\mathbf{r})\widehat{H}_n^* + t^{(2)}(\mathbf{r})\Theta \end{aligned}$$

и расчет тензоров эффективных свойств в (12)

$$C_{ijmn}^* = \langle C_{ijmn} \rangle + \langle C_{ijdb}' a_{dmn,b} \rangle - \langle e_{pij}' f_{mn,p}^{(1)} \rangle - \langle h_{pij}' f_{mn,p}^{(2)} \rangle,$$

$$\lambda_{kn}^* = \langle \lambda_{kn} \rangle + \langle \lambda_{kp}' h_{n,p}^{(1)} \rangle + \langle e_{kpq}' b_{qn,p} \rangle,$$

$$\mu_{kn}^* = \langle \mu_{kn} \rangle + \langle \mu_{kp}' m_{n,p}^{(2)} \rangle + \langle h_{kpq}' d_{qn,p} \rangle,$$

$$e_{nij}^* = \langle e_{nij} \rangle - \langle C_{ijpq}' b_{qn,p} \rangle + \langle e_{pij}' h_{n,p}^{(1)} \rangle + \langle h_{pij}' h_{n,p}^{(2)} \rangle,$$

$$h_{nij}^* = \langle h_{nij} \rangle - \langle C_{ijpq}' d_{qn,p} \rangle + \langle e_{pij}' m_{n,p}^{(1)} \rangle + \langle h_{pij}' m_{n,p}^{(2)} \rangle,$$

$$\chi_{kn}^* = \langle \lambda_{kp}' m_{n,p}^{(1)} \rangle + \langle e_{kpq}' d_{qn,p} \rangle,$$

$$\kappa_{kn}^* = \langle \mu_{kp}' h_{n,p}^{(2)} \rangle + \langle h_{kpq}' b_{qn,p} \rangle,$$

$$\beta_{ij}^* = \langle \beta_{ij} \rangle - \langle C_{ijdb}' t_{d,b} \rangle + \langle e_{pij}' t_{,p}^{(1)} \rangle + \langle h_{pij}' t_{,p}^{(2)} \rangle,$$

$$\pi_i^* = \langle \pi_i \rangle + \langle \lambda_{ip}' t_{,p}^{(1)} \rangle + \langle e_{ipq}' t_{q,p} \rangle,$$

$$\vartheta_i^* = \langle \vartheta_i \rangle + \langle \mu_{ip}' t_{,p}^{(2)} \rangle + \langle h_{ipq}' t_{q,p} \rangle$$

сводится к нахождению полей  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ , ...,  $t^{(2)}(\mathbf{r})$ ; верхним индексом «'» обозначены пульсации.

**Эффективные свойства пьезоэлектромагнетика.** В [8] подход [7] обобщен на решение связанной краевой задачи электромагнитоупругости (14) для квазипериодической структуры, и получено новое аналитическое решение для тензоров эффективных упругих свойств  $\mathbf{C}^*$ , диэлектрической  $\lambda^*$  и магнитной  $\mu^*$  проницаемостей, пьезомеханических свойств  $\mathbf{e}^*$  и  $\mathbf{h}^*$ , коэффициентов электромагнитной связи  $\chi^*$ ,  $\kappa^*$  и температурных напряжений  $\beta^*$ , векторов эффективных пирозлектрических  $\pi^*$  и пиромагнитных  $\vartheta^*$  постоянных

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{C}^* \\ \lambda^* \\ \boldsymbol{\mu}^* \\ \mathbf{e}^* \\ \mathbf{h}^* \\ \chi^* \\ \mathbf{k}^* \\ \boldsymbol{\beta}^* \\ \boldsymbol{\pi}^* \\ \mathfrak{G}^* \end{array} \right\} = p \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{C}^{P^*} \\ \lambda^{P^*} \\ \boldsymbol{\mu}^{P^*} \\ \mathbf{e}^{P^*} \\ \mathbf{h}^{P^*} \\ \chi^{P^*} \\ \mathbf{k}^{P^*} \\ \boldsymbol{\beta}^{P^*} \\ \boldsymbol{\pi}^{P^*} \\ \mathfrak{G}^{P^*} \end{array} \right\} + (1-p) \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{C}^{sc^*} \\ \lambda^{sc^*} \\ \boldsymbol{\mu}^{sc^*} \\ \mathbf{e}^{sc^*} \\ \mathbf{h}^{sc^*} \\ \chi^{sc^*} \\ \mathbf{k}^{sc^*} \\ \boldsymbol{\beta}^{sc^*} \\ \boldsymbol{\pi}^{sc^*} \\ \mathfrak{G}^{sc^*} \end{array} \right\}, \quad (15)$$

которое уточняет решение [6] и основано на анализе корреляционных функций квазипериодической структуры [7] и на новых решениях [15]

$$\mathbf{G}^s = \left\| \begin{array}{ccc} U_{imjn}^s & U_{imn}^{s(1)} & U_{imn}^{s(2)} \\ \Phi_{imn}^s & \Phi_{mn}^{s(1)} & \Phi_{mn}^{s(2)} \\ \Psi_{imn}^s & \Psi_{mn}^{s(1)} & \Psi_{mn}^{s(2)} \end{array} \right\| \quad (16)$$

для сингулярных составляющих  $\mathbf{G}^s$  (16) вторых производных функций Грина  $\mathbf{G}$

$$\nabla \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{(1)}) \approx \mathbf{G}^s \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{(1)}), \quad (17)$$

для однородной трансверсально-изотропной пьезоэлектромагнитной среды с эллипсоидальным зерном неоднородности, где  $\nabla$  – оператор дифференцирования по координатам вектора  $\mathbf{r}$ ,  $\delta(\mathbf{r})$  – обобщенная дельта-функция Дирака (17). В формуле (15)  $\mathbf{C}^{sc^*}, \dots, \mathfrak{G}^{sc^*}$  – решения обобщенного сингулярного приближения [15] по самосогласованной схеме, т.е. когда тензоры  $\mathbf{C}^*, \lambda^*, \boldsymbol{\mu}^*, \mathbf{e}^*, \mathbf{h}^*$  электромагнитоупругих свойств среды сравнения приравнены соответственно к искомым  $\mathbf{C}^{sc^*}, \lambda^{sc^*}, \boldsymbol{\mu}^{sc^*}, \mathbf{e}^{sc^*}, \mathbf{h}^{sc^*}$ . Вычисление тензоров  $\mathbf{C}^{P^*}, \dots, \mathfrak{G}^{P^*}$  эффективных свойств пьезокомпозигов с периодической структурой в (15), в общем,

сводится к решению задачи электромагнитоупругости на ячейке периодичности и представляет собой отдельную сложную задачу [3,16]. Однако известно [10], что значения эффективных упругих свойств многих матричных композитов с периодическими структурами близки к решению обобщенного сингулярного приближения, в котором свойства среды сравнения приравнены свойствам матрицы композита. Поэтому можно воспользоваться приближенными решениями и рассчитывать тензоры  $C^{p*}, \dots, \mathcal{G}^{p*}$  в (15) по формулам обобщенного сингулярного приближения [15] при приравнивании тензоров  $C^\bullet, \lambda^\bullet, \mu^\bullet, e^\bullet, h^\bullet$  среды сравнения в (16) к соответствующим тензорам матрицы композита.

### 3. Частные случаи обобщенного сингулярного приближения. Численный расчет

В [9] получены новые аналитические решения и точные соотношения для эффективных констант  $k_{12}^*, C_{3333}^*, C_{1133}^*, e_{333}^*, e_{311}^*, h_{311}^*, h_{333}^*, \lambda_{11}^*, \lambda_{33}^*, \mu_{11}^*, \mu_{33}^*, \kappa_{11}^*, \kappa_{33}^*, \chi_{11}^*, \chi_{33}^*$  однонаправленного волокнистого композита с полидисперсной структурой: пьезоэлектрик PVF с пьезомагнитными ферритовыми волокнами (с инверсией свойств фаз, рис. 1, а, в) и сделан вывод, что все полученные решения для эффективных констант *в точности* совпадают с соответствующими решениями обобщенного сингулярного приближения, когда свойства «среды сравнения» приравнены к свойствам матрицы;  $k_{12}^* = 0,5(C_{1111}^* + C_{1122}^*)$  – объемный модуль плоской деформации. Решения для эффективных констант  $k_{12}^*, C_{3333}^*, C_{1133}^*, e_{333}^*, e_{311}^*, h_{333}^*, h_{311}^*, \lambda_{33}^*, \mu_{33}^*, \kappa_{33}^*, \chi_{33}^*$  обобщенного сингулярного приближения [15] по схеме самосогласования со средой сравнения – эффективная среда *в точности* совпали с соответствующими решениями для эффективных констант полидисперсной структуры (см. рис. 1, б), полученными из осесимметричной задачи для расчетной схемы «волокно в эффективной среде» [6, 11].

На рис. 4 представлены результаты расчета эффективного коэффициента электромагнитной связи  $\kappa_{33}^*$  волокнистого пьезоэлектромагнетика в зависимости от содержания пьезоэлектрических PVF-волокон

$v_1$  в ферритовой матрице для различных полидисперсных структур: ( $\square$ ) – структура на рис. 1, *а* и ( $\circ$ ) – структура на рис. 1, *б*. Результаты ( $\triangle$ ) соответствуют случаю инверсии свойств 1-й и 2-й фаз полидисперсной модели (см. рис. 1, *в*), т.е. когда матрица – это пьезоэлектрик PVF, а волокна – феррит; для наглядности сопоставления графиков здесь по-прежнему через  $v_1$  обозначено относительное объемное содержание PVF в композите. Выявлена *инвариантность* решения ( $\circ$ ) для полидисперсной структуры на рис. 1, *б* к инверсии свойств фаз.

Результаты расчета  $\kappa_{33}^*$  в обобщенном сингулярном приближении по схеме самосогласования (среда сравнения с искомыми эффективными свойствами) [15] в *точности* совпали с решением ( $\circ$ ) для полидисперсной структуры на рис.1,б и также *инвариантны* к инверсии свойств фаз. Решение обобщенного сингулярного приближения со средой сравнения – 1-я фаза в *точности* совпало с решением ( $\triangle$ ) для полидисперсной структуры на рис. 1, *в*; в случае, когда среда сравнения – 2-я фаза – с решением ( $\square$ ) для полидисперсной структуры на рис. 1, *а*. Решение ( $\circ$ ) при «малых» степенях заполнения  $v_1$  близко к решению ( $\square$ ) для матричной по 2-й фазе структуре (см. рис. 1, *а*) и при «больших»  $v_1$  – к решению ( $\triangle$ ) для матричной по 1-й фазе структуре (см. рис. 1, *в*).

Решение  $\kappa_{33}^*$  ( $\square$ ) для полидисперсной структуры на рис. 1, *а* в *точности* совпало с решением [3] асимптотического метода осреднения [16] для идеальной периодической волокнистой структуры и с решением

$$\kappa_{33}^* = \frac{v_1(1-v_1)\bar{h}_{311}\bar{e}_{311}}{k_{(1)12} - v_1\bar{k}_{12} + G_{(2)12}} \quad (18)$$

для полидисперсной структуры на рис. 1, *а*, полученным без схемы самосогласования из решения осесимметричной задачи для одиночной

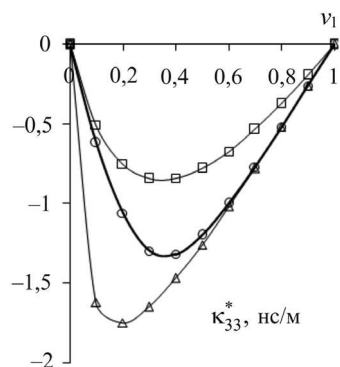


Рис. 4. Коэффициент электромагнитной связи  $\kappa_{33}^*$  композита в зависимости от объемной доли пьезоэлектрической фазы  $v_1$  в виде волокон ( $\square, \circ$ ) или матрицы ( $\triangle, \circ$ )

ячейки – составного цилиндра «волокно в матрице» [11] при отношении  $a/b = \sqrt{v_1}$  внутреннего  $a$  и наружного  $b$  радиусов, где разности  $\bar{e}_{311} = e_{(1)311} - e_{(2)311}$ ,  $\bar{h}_{311} = h_{(1)311} - h_{(2)311}$ ,  $\bar{k}_{12} = k_{(1)12} - k_{(2)12}$ , объемные модули плоской деформации  $k_{(f)12}$  и модуль сдвига  $G_{(2)12}$  фаз. Отметим, что в решение (18) не входят диэлектрические проницаемости фаз  $\lambda_f$  (11), поэтому  $\kappa_{33}^*$  не будет содержать мнимой части и зависеть от проводимостей фаз  $\gamma_f$  и частоты  $\omega$ .

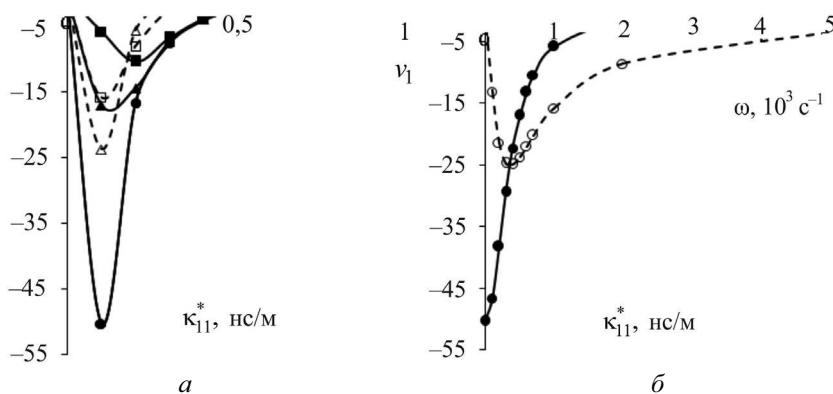


Рис. 5. Зависимости действительной (сплошная линия) и мнимой (штриховая линия) частей коэффициента магнитоэлектрической связи  $\kappa_{11}^*$  композита *PVF-феррит* от объемной доли  $v_1$  пьезоэлектрика PVF при круговой частоте электрического поля:  $\omega = 0,001 \text{ c}^{-1}$  ( $\circ$ );  $500 \text{ c}^{-1}$  ( $\triangle$ );  $1000 \text{ c}^{-1}$  ( $\square$ ) (а) и от  $\omega$  при  $v_1 = 0,1$  (б)

На рис. 5 представлены результаты расчета действительной  $\kappa_{11}^*$  и мнимой  $\kappa_{11}''^*$  частей эффективного коэффициента поперечной электромагнитной связи:

$$\kappa_{11}^* = \kappa_{11}'^* - i\kappa_{11}''^*, \quad (19)$$

полидисперсного волокнистого композита (рис. 1, в): пьезоэлектрик PVF (1-я фаза) с ферритовыми волокнами (2-я фаза) для различных значений величины  $v_1$  и частоты  $\omega$  приложенного электрического поля (11), (13). Независимые пьезоэлектромагнитоупругие постоянные трансверсально-изотропных свойств волокон полимерного пьезоэлектрика PVF с осью симметрии  $r_3$  приведены в [17, 18]. Проводимость

$\gamma_{(1)11}$  пьезоэлектрика приравняем к значению  $10^{-10}$  (Ом·м)<sup>-1</sup> для полиэтилена [12], проводимость феррита  $\gamma_{(2)11}$  – к значению  $10^{-5}$  (Ом·м)<sup>-1</sup> для никелевой феррошпинели [13].

Для концентрационных (рис. 5, а) зависимостей действительных  $\kappa_{11}^*(\nu_1)$  и мнимых  $\kappa_{11}''(\nu_1)$  частей (19) характерны экстремумы при малой объемной доле  $\nu_1 \approx 0,1$ . Для частотных зависимостей  $\kappa_{11}^*(\omega)$  композита PVF-феррит (рис. 5, б) характерна глубокая нормальная релаксация, обусловленная тем, что на высоких частотах не успевает накапливаться объемный заряд вблизи межфазных границ [14]. При нормальной релаксации абсолютное значение действительной части  $\kappa_{11}^*$  монотонно уменьшается с ростом частоты, тогда как для мнимой части характерен четко выраженный релаксационный экстремум (рис. 5, б). При этом релаксационная частота  $\omega_c$  растет с увеличением объемной доли пьезоэлектрика PVF (матрица) в композите PVF-феррит.

### Заключение

На основе анализа корреляционных функций квазипериодических структур [7] и новых решений [15] для сингулярных составляющих вторых производных функций Грина для однородной трансверсально-изотропной пьезоэлектромагнитной среды с эллипсоидальным зерном неоднородности получено уточненное решение связанной краевой задачи электромагнитоупругости для пьезоактивной микронеоднородной области с квазипериодической структурой и аналитическое решение для тензоров эффективных пьезоэлектромагнитных и термоупругих свойств. Проведен анализ влияния на коэффициент электромагнитной связи однонаправленного волокнистого композита с ферритовыми волокнами в пьезоэлектрической PVF-матрице величины объемного содержания, характера и степени разупорядоченности в трансверсальной плоскости волокон в сравнении с известным решением асимптотического метода осреднения для идеальной периодической структуры. Дополнительно отметим, что в [19] проведен численный расчет и анализ эффективных свойств квазипериодического пьезокompозита с взаимнообратной поляризацией ориентированных эллипсоидальных включений и матрицы, слоистых структур с взаимнообратной поляризацией слоев полимерного пьезоэлектрика PVF и вы-

явлены их уникальные свойства, такие как значительное увеличение модуля Юнга по нормали к слоям и диэлектрических проницаемостей, отрицательные значения коэффициента Пуассона при растяжении по нормали и увеличение абсолютных значений основных пьезомодулей. В [20] представлен анализ влияния степени разупорядоченности однонаправленных пьезомагнитных ферритовых волокон в плоскости изотропии однонаправленного волокнистого композита с пьезоэлектрической матрицей PVF на эффективные коэффициенты электромагнитной связи композита. В [9] получены новые аналитические решения и точные соотношения для 15 эффективных электромагнитоупругих констант однонаправленного волокнистого композита с полидисперсной структурой. Проведен численный расчет и анализ влияния на эффективные константы композита с пьезоэлектрическими волокнами PVF в ферритовой пьезомагнитной матрице величины объемного содержания волокон и инверсии свойств фаз в сравнении с известными решениями обобщенного сингулярного приближения для статистической смеси и асимптотического метода осреднения для идеальной периодической структуры.

### Библиографический список

1. Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультразвуке. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 448 с.
2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 471 с.
3. Гетман И.П. О магнитоэлектрическом эффекте в пьезокомпозитах // ДАН СССР. – 1991. – Т. 317, № 2. – С. 341–343.
4. Коган Л.З., Мольков В.А. Магнитоэлектрические свойства волокнистых пьезокомпозитов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 5. – С.62–68
5. Паньков А.А., Ташкинов А.А. Сингулярное приближение метода периодических составляющих для квазипериодических композитных материалов // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных материалов / УрО АН СССР. Свердловск, 1992. – С. 93–101.
6. Паньков А.А. Статистическая механика пьезокомпозитов. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. – 480 с.
7. Паньков А.А. Упругие свойства квазипериодических композитов с учетом корреляционных функций структуры // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т. 17, № 3. – С. 385–400.



8. Паньков А.А. Электромагнитоупругие поля и эффективные свойства пьезокомпозитов с квазипериодическими структурами // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2012. – Т. 18, № 3. – С. 345–358.

9. Паньков А.А. Пьезоактивные однонаправленно волокнистые полидисперсные композиты // *Механика композитных материалов*. – 2012. – Т. 48, № 6. – С. 1–14.

10. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 399 с.

11. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.

12. Турик А.В., Радченко Г.С. Гигантский пьезоэлектрический эффект в слоистых композитах сегнетоэлектрик-полимер // *Физика твердого тела*. – 2003. – Т. 45, № 9. – С. 1676–1679.

13. Петров В.М., Бичурин М.И., Srinivasan G. Максвелл-вагнеровская релаксация в магнитоэлектрических композиционных материалах // *Письма в ЖТФ*. – 2004. – Т. 30, № 8. – С. 81–87.

14. Магнитоэлектричество в двумерных статистических смесях / А.В. Турик, А.И. Чернобабов, М.Ю. Родинин, Е.А. Толокольников // *Физика твердого тела*. – 2009. – Т. 51, № 7. – С. 1395–1397.

15. Паньков А.А. Коэффициенты электромагнитной связи композита с пьезоактивными фазами // *Физическая мезомеханика*. – 2011. – Т. 14, № 2. – С. 93–99

16. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 336 с.

17. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Лещенко П.В. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.

18. Sessler G.M. Piezoelectricity in polyvinylidene fluoride // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1981. – Vol. 70. – No. 6. – P. 1596–1608.

19. Паньков А.А. Пьезокомпозит с взаимобратной поляризацией ориентированных эллипсоидальных включений и матрицы // *Изв. РАН. МТТ*. – 2010. – № 2. – С. 114–125.

20. Паньков А.А. Влияние разупорядоченности включений на коэффициенты электромагнитной связи пьезокомпозита // *Механика композитных материалов*. – 2012. – Т. 48, № 4. – С. 623–634.

## References

1. Mezon U. P'ezojelektricheskie kristally i ih primenenija v ul'traakustike [Piezoelectric crystals and their applications in ultraacoustics]. Moskow: Izdatelstvo inostrannoj literatury, 1952, 448 p.
2. Parton V.Z., Kudriavcev B.A. Jelektromagnitouprugost' p'ezojelektricheskikh i jelektroprovodnyh tel [Elektromagnitoelasticity of piezoelectric and electrowire bodies]. Moskow: Nauka, 1988, 471 p.
3. Getman I.P. O magnitojelektricheskom jeffekte v p'ezokompozitah [About magnetoelectric effect in piezocomposites]. *Dalnevostochnoe otdelenie Akademii nauk SSSR*, 1991, vol. 317, no. 2, pp. 341–343.
4. Kogan L.Z., Mol'kov V.A. Magnitojelektricheskie svojstva voloknistykh p'ezokompozitov [Magnetoelectric properties fibrous piezocomposites]. *Izvestiya RAN. Mehanika tverdogo tela*, 1996, no. 5, pp. 62–68.
5. Pan'kov A.A., Tashkinov AA. Singuljarnoe priblizhenie metoda periodicheskikh sostavlyayuschikh dlya kvaziperiodicheskikh kompozitnykh materialov [Singular approach of method of periodic components for quasiperiodic composites]. *Defopmirovanie i razrushenie strukturno-neodnorodnykh materialov*. Sverdlovsk: Uralskoe otdelenie Akademii nauk SSSR, 1992, pp. 93–101.
6. Pan'kov A.A. Statisticheskaja mehanika p'ezokompozitov [Statistical mechanics of piezocomposites]. Perm: Permskiy gosudarstvenniy tekhnicheskij universitet, 2009, 480 p.
7. Pan'kov A.A. Uprugie svojstva kvaziperiodicheskikh kompozitov s uchetom korrelyacionnykh funkcij struktury [Elastic properties of quasiperiodic composites taking into account correlation functions of structure]. *Mehanika kompozicionnykh materialov i konstupkij*, 2011, vol. 17, no. 3, pp. 385–400.
8. Pan'kov A.A. Jelektromagnitouprugie polja i jeffektivnye svojstva p'ezokompozitov s kvaziperiodicheskimi strukturami [Electromagnetic and elastic fields, effective properties of piezocomposites with quasiperiodic structures]. *Mehanika kompozicionnykh materialov i konstupkij*, 2012, vol. 18, no. 3, pp. 345–358.
9. Pan'kov A.A. P'ezoaktivnye odnonapravlenno voloknistye polidispersnye kompozity [Piezoactive unidirectionally fibrous polydisperse composites]. *Mehanika kompozitnykh materialov*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 1–14.
10. Shermergor T.D. Teorija uprugosti mikroneodnorodnykh sred [The theory of elasticity of micro non-uniform material]. Moskow: Nauka, 1977, 399 p.

11. Kristensen R. Vvedenie v mehaniku kompozitov [Introduction to mechanics of composites]. Moscow: Mir, 1982. 334 p.

12. Turik A.V., Radchenko G.S. Gigantskij p'ezojelektricheskiy jeffekt v sloistyh kompozitah segnetojelektrik-polimer [Giant piezoelectric effect in layered ferroelectric polymer composites]. *Fizika tverdogo tela*, 2003, vol. 45, no. 9, pp. 1676–1679.

13. Petrov V.M., Bichurin M.I., Srinivasan G. Maksvell-vagnerovskaja relaksacija v magnitojelektricheskih kompozicionnyh materialah [Maxwell-Wagner relaxation in magnetoelectric composites]. *Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 2004, vol. 30, no. 8, pp. 81–87.

14. Turik A.V., Chernobabov A.I., Rodinin M.Ju., Tolokol'nikov E.A. Magnitojelektrichestvo v dvumernyh statisticheskikh smesjah [Magnetoelectricity in bidimensional statistical mixtures]. *Fizika tverdogo tela*, 2009, vol. 51, no. 7, pp. 1395–1397.

15. Pan'kov A.A. Kojefficienty jelektromagnitnoj svyazi kompozita s p'ezoaktivnymi fazami [Factors of electromagnetic relationship for composite with piezoactive phases]. *Fizicheskaja mezomehanika*, 2011, vol. 14, no. 2, pp. 93–99.

16. Pobedrja B.E. Mehanika kompozicionnyh materialov [Mechanics of composite materials]. Moscow: Moskovskiy gosudarstvenniy universitet, 1984, 336 p.

17. Horoshun L.P., Maslov B.P., Leshenko P.V. Prognozirovanie jeffektivnyh svojstv p'ezoaktivnyh kompozitnyh materialov [Predicting of effective properties of piezoactive composit materials]. Kiev: Naukova dumka, 1989, 208 p.

18. Sessler G.M. Piezoelectricity in polyvinylidene fluoride. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1981, vol. 70, no. 6, pp. 1596–1608.

19. Pan'kov A.A. P'ezokompozit s vzaimoobratnoj poljarizaciej orientirovannyh jellipsoidal'nyh vkljuchenij i matricy [Piezocomposite with inverse polarization of the focused ellipsoidalny inclusions and matrixes]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. MTT*, 2010, no. 2, pp. 114–125.

20. Pan'kov A.A. Vlianie razuporiadochennosti vklucheniy na koeficienti elektromagnitnoi svyazi piezokompozita [Influence of factor of aperiodicity of inclusions on factors of electromagnetic coherence for piezocomposite]. *Mehanika kompozitnih materialov*, 2012, vol. 48, no. 4, pp. 623–634.

### **Об авторах**

**Паньков Андрей Анатольевич** (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики композиционных материалов и конструкций Пермского национального исследовательского политехнического университета (614000, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: mkmk\_pr@pstu.ru).

### **About the authors**

**Pan'kov Andrey Anatol'evich** (Perm, Russian Federation) – the Professor of Department of Mechanics of Composite Materials and Constructions Perm National Research Politechnic University (614000, Perm, Komsomol'skiy av. 29, a, e-mail: mkmk\_pr@pstu.ru).

Получено 20.11.2012