УДК 517.925

А.Р. Абдуллаев, П.О. Жиганкова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛЬЕНАРА, МОДЕЛИРУЮЩЕГО МИКРОЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ (MEMS)

Рассматривается периодическая краевая задача для уравнения Льенара, возникающего в математических моделях MEMS-систем. Получены достаточные условия существования решения. Для доказательства основного утверждения применяется теорема разрешимости для квазилинейного операторного уравнения в случае резонанса. Построено вспомогательное уравнение с Т-оператором для исходной краевой задачи. Найдено явное представление оператора Т. Предложена схема приближенного решения рассматриваемой задачи, основанная на методе Т-оператора.

Ключевые слова: уравнение Льенара, MEMS-системы, периодическая краевая задача, существование решения, метод Т-оператора.

A.R. Abdullaev, P.O. Zhigankova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

PERIODIC SOLUTIONS OF LIENARD EQUATION, MODELING MICROELECTROMECHANICAL SYSTEMS (MEMS)

Periodic boundary value problem for Lienard equation arising in the mathematical models of MEMS is considered. Sufficient conditions of the existence of solution are given. To prove the main statement the theorem of solvability for quasilinear operator equation in the case of resonance is applied. Auxiliary equation with T-operator for original boundary value problem is constructed. Explicit representation of operator T is found. Based on method of the T-operator scheme of approximate solution considered problem is suggested.

Keywords: Lienard equation, MEMS, periodic boundary value problem, existence of solution, method of the T-operator.

В современных интеллектуальных электронно-вычислительных и смарт-системах широко применяются миниатюрные электромеханические элементы, интегрированные в единую MEMS-систему [1]. Такое сочетание позволяет придавать системам определенные функциональные возможности нейрокомпьютеров [2].

Наиболее востребованными в технологии MEMS-систем являются осцилляторы, основными элементами которых служат MEMS-резонаторы. Динамика отдельного MEMS-резонатора с массой m описывается уравнением Льенара [3]

$$m\ddot{x}(t)+f\left(x(t),\lambda\right)\cdot\dot{x}(t)+g\left(x(t)\right)=e(t), \tag{1}$$

в котором искомая функция $x(t)$ означает отклонение челнока в момент времени t от положения равновесия. Вид функции жесткости $g(x)$ зависит от свойств материалов, из которых сделан резонатор, и его геометрии: если резонатор абсолютно симметричен, то $g(-x)=-g(x)$. В функции демпфирования $f(x,\lambda)$ посредством параметра λ можно учесть особенности MEMS-осциллятора, связанные, например, с реализацией обратной связи в MEMS-осцилляторе. Если MEMS-система состоит из нескольких взаимодействующих резонаторов, то особый интерес представляют периодические режимы отдельного резонатора. При этом функция $e(t)$ играет роль связи между отдельными резонаторами в системе.

Периодическая задача для уравнения (1) изучалась многими авторами. Классическими в этом направлении являются результаты, полученные Мизохата и Ямогути [4] и Мавэном и Вардом [5]. Для установления достаточных условий разрешимости периодической задачи в данной работе используется метод, основанный на применении теорем существования для квазилинейных операторных уравнений.

Будем рассматривать MEMS-резонатор с единичной массой $(m=1)$ и идеально симметричной жесткостью, задаваемой функцией $g(x)=kx$. Математической моделью периодических режимов работы такого резонатора является следующая краевая задача:

$$\ddot{x}(t)+f(x)\cdot\dot{x}(t)+kx(t)=e(t),\ t\in[0,2\pi], \tag{2}$$

$$x(0)-x(2\pi)=\dot{x}(0)-\dot{x}(2\pi)=0, \tag{3}$$

где $x(t)$, $x:[0,2\pi]\to R^1$ – искомая функция, $f:R^1\to R^1$, $e:[0,2\pi]\to R^1$ – непрерывные функции.

Пусть $L_2 = L_2[0,2\pi]$ – пространство суммируемых с квадратом по Лебегу функций, $W_2 = W_2[0,2\pi]$ – пространство абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций $x:[0,2\pi] \to R^1$, таких, что $\ddot{x} \in L_2$ с нормой $\|x\|_{W_2} = |x(0)| + |\dot{x}(0)| + \|\ddot{x}\|_{L_2}$.

Определение. Под решением задачи (2), (3) будем понимать такую функцию $x \in W_2[0,2\pi]$, которая удовлетворяет почти всюду на $[0,2\pi]$ уравнению (2) и периодическим краевым условиям (3).

Положим $X = W_2$ и $Y = L_2$ и введем в рассмотрение подпространство $X_0 \subset X$, элементы которого удовлетворяют периодическим краевым условиям (3):

$$X_0 = \{x \in X \,/\, x(0) = x(2\pi), \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)\}.$$

На пространстве X_0 краевая задача (2), (3) эквивалентна операторному уравнению

$$Lx = Fx, \tag{4}$$

где операторы $L, F: X_0 \to Y$ определены равенствами:

$$(Lx)(t) = \ddot{x}(t), \tag{5}$$

$$(Fx)(t) = e(t) - f(x(t))\dot{x}(t) - kx(t). \tag{6}$$

Оператор $L: X_0 \to Y$ является линейным ограниченным фредгольмовым с ядром $\ker L = \{x \in X_0 \,/\, x(t) \equiv \mathrm{const}\}$ и образом $R(L) = \left\{ y \in Y \,/\, \int\limits_0^{2\pi} y(s)ds = 0 \right\}$.

Ограниченные проекторы $P: X_0 \to X_0$ и $Q: Y \to Y$ соответственно на ядро и образ оператора L определим равенствами

$$Px(t) = x(0),\; Qy(t) = y(t) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} y(s)ds$$

и рассмотрим связанные с этими проекторами разложения пространств X_0, Y в прямые топологические суммы: $X_0 = \ker L \oplus Z$, $Y = R(L) \oplus Y_0$.

Приведем вспомогательные утверждения.

Лемма 1 ([6]). Обобщенно обратный оператор $K_P : R(L) \to X_0$, ассоциированный с проектором P [7], имеет вид

$$\left(K_P y\right)(t) = \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi} s y(s)\,ds + \int_0^t (t-s)\, y(s)\,ds,\; y \in Y,$$

и справедлива оценка $\|K_P\| \le 1 + \sqrt{\frac{2\pi}{3}}$.

Следующее утверждение лежит в основе метода T-оператора, применяемого в настоящей работе.

Лемма 2. Для оператора $T : Z \to X_0$, определенного равенством

$$Tx = \frac{e_0}{2\pi k} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\,dt\,,\; e_0 = \int_0^{2\pi} e(t)\,dt, \tag{7}$$

справедливо вложение $F(x+Tx) \in R(L)$ для всех $x \in X_0$. Каждое решение уравнения

$$Lx = F(x+Tx) \tag{8}$$

является решением уравнения (4).

Доказательство. Элемент $x \in X_0$ представим в виде $x = x_0 + u$, где $x_0 \in Z$, $u \equiv \mathrm{const}$, $u \in \ker L$. Для проектора Q дополнительный проектор $Q^C : Y \to Y$ имеет вид $Q^C y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\,dt$. Предполагая элемент $x_0 \in Z$ произвольно фиксированным, элемент ядра u определим из уравнения $Q^C F(x_0+u) = 0$. Это уравнение в нашем случае принимает вид

$$\int_0^{2\pi}\Big(e(t) - f\left(x_0+u\right)\cdot \dot{x}_0(t) - k\left(x_0+u\right)\Big)dt = 0.$$

В силу краевых условий (3) интеграл $\int_0^{2\pi} f\left(x_0+u\right)\cdot \dot{x}_0(t)\,dt$ равен нулю. Поэтому из уравнения $e_0 - k\int_0^{2\pi} x_0(t)\,dt - 2\pi\cdot u = 0$ получим

$u = \frac{e_0}{2\pi k} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x_0(t)\,dt$. Таким образом, определен оператор $T: Z \to X_0$, который согласно равенству (7) ставит каждому элементу $x_0 \in Z$ в соответствие единственный элемент $u = Tx_0$. Второе утверждение леммы очевидно. Лемма доказана.

Замечание. Из утверждения леммы 2, в частности, следует, что если элемент $x \in X_0$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} \ddot{x}(t) + f\left(x(t) + \frac{e_0}{2\pi k} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(t)\,dt\right)\cdot \dot{x}(t) + \\ + k\left(x(t) + \frac{e_0}{2\pi k} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(t)\,dt\right) = e(t), \end{gathered} \tag{9}$$

где $e_0 = \int\limits_0^{2\pi} e(t)\,dt$, то он является решением задачи (2), (3).

Лемма 3. Для оператора $T: Z \to X_0$, определенного равенством (7), справедлива оценка

$$b_T(r) = \sup_{\|x\| \le r} \|Tx\| \le 2\pi\sqrt{\frac{2\pi}{3}}r + \frac{|e_0|}{2\pi k}, \text{ где } e_0 = \int\limits_0^{2\pi} e(t)\,dt.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством $|x(t)| \le 2\pi\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\|x(t)\|_{X0}$. Напомним, что $Tx \in \ker L = \{x(t) \equiv \mathrm{const}\}$. Поэтому

$$\|Tx\|_{X_0} = |Tx| \le \frac{|e_0|}{2\pi k} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |x(t)|\,dt \le \frac{|e_0|}{2\pi k} + 2\pi\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\|x\|_{X_0}.$$

Отсюда, переходя к супремуму по всем $\|x\|_{X_0} \le r$, получим требуемое.

Лемма 4. Пусть существуют константы $a, b \ge 0$, что выполняется неравенство $|f(u)| \le a + b|u|$ для всех $u \in R^1$. Тогда оператор $F: X_0 \to Y$, определенный равенством (6), вполне непрерывен и справедлива оценка

$$b_F(r)=\sup_{\|x\|_{X_0}\le r}\|Fx\|\le 4\pi^2\sqrt{\frac{2\pi}{3}}br^2+2\pi\left(a+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}k\right)r+\|e\|_Y. \qquad (10)$$

Доказательство. Вместе с оценкой $|x(t)|$ (см. доказательство леммы 3) нам потребуется также следующая и оценка $|\dot{x}(t)|\le\sqrt{2\pi}\|x(t)\|_{X_0}$. С учетом условия на функцию f получим

$$\|Fx\|_Y=\left(\int_0^{2\pi}\left|e(t)-f(x)\cdot\dot{x}(t)-kx(t)\right|^2dt\right)^{1/2}\le\|e\|_Y+\left(\int_0^{2\pi}\left(a+b|x(t)|\right)^2|\dot{x}(t)|^2dt\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\int_0^{2\pi}k^2|x(t)|^2dt\right)^{1/2}\le\|e\|_Y+2\pi\left(a+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}k\right)\|x\|_{X_0}+4\pi^2\sqrt{\frac{2\pi}{3}}b\|x\|_{X_0}^{\;2}.$$

Отсюда и следует неравенство (10). Лемма доказана.

Следующую теорему существования сформулируем в удобном для нас виде.

Теорема 1 ([6]). Пусть оператор $F:X_0\to Y$ вполне непрерывен и существует непрерывный оператор $T:Z\to X_0$, такой, что выполнены условия:

1) $T(X_0)\subset\ker L$;

2) $F(x+Tx)\in R(L)$ для любого $x\in X_0$;

3) неравенство $b_F(r+b_T(r))<\|K_p\|^{-1}r$ имеет решение $r_0>0$.

Тогда уравнение $Lx=Fx$ имеет хотя бы одно решение.

Необходимые вспомогательные утверждения для применения теоремы 1 содержаться в леммах 1–4.

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

1) существуют константы $a\ge 0,\ b>0,$ что выполняется неравенство $|f(u)|\le a+b|u|$ для всех $u\in R^1$;

2) $\sqrt{3}a+(2\pi)^{\frac{3}{2}}k<3^{\frac{3}{2}}\rho^{-1}$, где $\rho=2\pi\left(\sqrt{3}+\sqrt{2\pi}\right)\left(\sqrt{3}+(2\pi)^{\frac{3}{2}}\right)$.

Если $e(\cdot)\in L_2$ удовлетворяет следующим условиям:

3) $\|e\|_Y < \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2\pi}b}\left(\frac{3}{\rho} - a - \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}k\right)^2$,

4) $|e_0| < \min(M, N)$, $e_0 = \int\limits_0^{2\pi} e(t)\,dt$,

где $M = \frac{\rho}{3}k\left[\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2\pi}b}\left(\frac{3}{\rho} - a - \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}k\right)^2 - \|e\|_Y\right]$, $N = \frac{(3)^{\frac{3}{2}}}{2\rho(2\pi)^{\frac{5}{2}}}\frac{k}{b}$,

то задача (2), (3) имеет по крайней мере одно периодическое решение.

Доказательство. Оператор F является вполне непрерывным [8]. В силу утверждений леммы 2 операторы T, F удовлетворяют условиям 1 и 2 теоремы 1. Для проверки выполнения условия 3 в соответствии с утверждениями лемм 3, 4 рассмотрим неравенство

$$\|e\|_{L_2} + b\frac{(2\pi)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)r + \frac{|e_0|}{2\pi k}\right)^2 + \\ +2\pi\left(a + k\frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}\right)\left(\left(\frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)r + \frac{|e_0|}{2\pi k}\right) < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi} + \sqrt{3}}r \tag{11}$$

и представим его в виде $Ar^2 + Br + C < 0$, где $A = \frac{(2\pi)^{\frac{5}{2}}}{3\sqrt{3}}\left((2\pi)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{3}\right)^2 b$, $B = \frac{2\pi}{3}\left((2\pi)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}a + (2\pi)^{\frac{3}{2}}k + \frac{2\sqrt{2\pi}b|e_0|}{k}\right) - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi} + \sqrt{3}}$, $C = \|e\|_{L_2} + \frac{e_0}{\sqrt{3}k}\left(\sqrt{3}a + (2\pi)^{\frac{3}{2}}k + \frac{\sqrt{2\pi}b|e_0|}{k}\right)$. Чтобы неравенство (11) выполнялось при некотором $r_0 > 0$, достаточно потребовать выполнение условий $B < 0$ и $B^2 - 4AC > 0$.

Если числа $a \ge 0$, $k > 0$ удовлетворяют соотношению, записанному в условии 2 теоремы 2, и функция $e(t)$ такова, что $|e_0| < N$, то справедливо неравенство $\sqrt{3}a+(2\pi)^{\frac{3}{2}}k+\frac{2\sqrt{2\pi}b|e_0|}{k}<\frac{3\sqrt{3}}{2\pi\left(\sqrt{3}+(2\pi)^{\frac{3}{2}}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2\pi}\right)}$.

Последнее неравенство гарантирует, что $B<0$.

Если, кроме того, функция $e(t)$ такова, что выполнены условие 3 теоремы 2 и условие $|e_0|<M$, то верно неравенство

$$\frac{4(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}\frac{b|e_0|}{k}+\frac{4(2\pi)^{\frac{5}{2}}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2\pi}\right)^2}{3\sqrt{3}}b\|e\|_{L_2}<$$

$$<\left(\frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2\pi}\right)\left(\sqrt{3}a+(2\pi)^{\frac{3}{2}}k\right)-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\right)^2.$$

Следовательно, $B^2-4AC>0$.

Таким образом, согласно теореме 1 операторное уравнение (4) является разрешимым, а следовательно, задача (2), (3) имеет хотя бы одно решение.

Отметим, что в теореме 2 функция $e(t)$, $e\in L_2$, не предполагается интегрально-периодической, т.е. удовлетворяющей условию $\int_0^{2\pi}e(t)dt=0$. Тот факт, что решение задачи (2), (3) удовлетворяет уравнению (9), предоставляет возможность построения приближенного метода поиска такого решения. Предположим, что в условиях теоремы 2 решение единственное (отметим, что единственность гарантируется естественными ограничениями на функцию $f(x)$). Приведем описание итерационной процедуры, основанной на применении метода Т-оператора.

Предположим, что в качестве нулевого приближения выбрана функция $x_0(t)$, согласованная с начальным условием $x_0(0)=Tx_0$. Последовательные приближения решения определяются по следующим итерационным формулам:

$$x_n(0)=Tx_n=\frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi}e(s)ds-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x_n(s)ds,$$

$$\dot{x}_{n+1}(t)=\dot{x}_n(0)+\int_0^t\left(-f(x_n)\dot{x}_n(s)-kx_n(s)+e(s)\right)ds,$$

$$x_{n+1}(t)=x_n(0)+\int_0^t\dot{x}_{n+1}(s)ds\text{, где } n=1,2,\ldots.$$

Численная реализация метода нахождения периодического решения по предложенной схеме предполагается темой отдельной статьи.

Заключение

Рассмотрена математическая модель динамики отдельного MEMS-резонатора с идеальной жесткостью, описываемой периодической краевой задачей для уравнения Льенара с функцией $g(x)$ специального вида. Применение вспомогательного уравнения, построенного для исходной краевой задачи, а также теоремы существования для квазилинейного операторного уравнения в случае резонанса позволило получить эффективные условия разрешимости, выраженные в терминах уравнения Льенара. Предложена перспективная схема нахождения периодического решения, основанная на использовании метода Т-оператора.

Библиографический список

1. Nguyen C.T.-C. Micromechanical devices for wireless communications // Workshop Micro Electro Mechanical Systems. – 1998. – Jan. 25–29. – P. 1–7.

2. Aoyagi T. Network of neural oscillators for retrieving phase information // Phys. Rev. Lett. – 1995. – Vol. 74. – P. 4075–4078.

3. Hoppensteadt F.C., Izhikevich E.M. Synchronization of MEMS resonators and mechanical neurocomputing // Transactions on circuits and systems. – 2001. – Vol. 48. – P. 133–138.

4. Mizohata S., Yamaguti S. On the existence of periodic solutions of the nonlinear differential equations $x''+\alpha(x)\cdot x'+\varphi(x)=p(t)$ // Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. – 1952. – Vol. 22 – P. 109–113.

5. Mawhin J., Ward J.R. Periodic solutions of some forced Lienard differential equations at resonance // Arch. Math. – 1983. – Vol. 41. – P. 337–351.

6. Абдуллаев А.Р., Савочкина А.А. Периодические решения уравнения Ван дер Поля с отклоняющимся аргументом // Вестник ИжГТУ. – Ижевск, 2011. – № 3(51). – С. 174–177.

7. Абдуллаев А.Р., Бурмистрова А.Б. Элементы теории топологически нетеровых операторов. – Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 1994. – 93 с.

8. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Физматлит, 2007. – 488 с.

References

1. Nguyen C.T.-C. Micromechanical devices for wireless communications. *Proc. IEEE Int. Workshop Micro Electro Mechanical Systems*, 1998, Jan. 25–29, pp. 1–7.

2. Aoyagi T. Network of neural oscillators for retrieving phase information. *Phys. Rev. Lett.*, 1995, vol. 74, pp. 4075–4078.

3. Hoppensteadt F.C, Izhikevich E.M. Synchronization of MEMS resonators and mechanical neurocomputing. *Transactions on circuits and systems*, 2001, vol. 48, pp. 133–138.

4. Mizohata S., Yamaguti S. On the existence of periodic solutions of the nonlinear differential equations. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto*, 1952, vol. 22, pp. 109–113.

5. Mawhin J., Ward J.R. Periodic solutions of some forced Lienard differential equations at resonance. *Arch. Math.*, 1983, vol. 41, pp. 337–351.

6. Abdullaev A.R., Savochkina A.A. Periodicheskie reshenija uravnenija Van der Polja s otklonjajuwimsja argumentom [Periodic solution of Pol van der equation with deviating argument]. *Vestnik Izhevskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2011, no. 3 (51), pp. 174–177.

7. Abdullaev A.R., Burmistrova A.B. Jelementy teorii topologichecki neterovyh operatorov [Elements of the theory of topologically noetherian operators]. Chelyabinsk: Chelyabinskij gosudarstvennyj universitet, 1994, 93 p.

8. Trenogin V.A. Funkcional'nyj analiz [Functional analysis]. Moscow: Fizmatlit, 2007, 488 p.

Получено 27.09.2012

Об авторах

Абдуллаев Абдулла Рамазанович (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: h.m@pstu.ru).

Жиганкова Полина Олеговна (Пермь, Россия) – студент факультета прикладной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: h.m@pstu.ru).

About the authors

Abdullaev Abdulla Ramazanovich (Perm, Russia) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Acting Head of the Department of Higher Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russia, e-mail: h.m@pstu.ru).

Zhigankova Polina Olegovna (Perm, Russia) – student, Faculty of Applied Mathematics and Mechanics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russia, e-mail: h.m@pstu.ru).