

М.М. Дробинин, И.Н. Бояршинова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия

ОБ ОДНОЙ МЕТОДИКЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ОХЛАЖДЕНИЯ ИЗДЕЛИЙ ИЗ СТЕКЛУЮЩИХСЯ ПОЛИМЕРОВ С ЦЕЛЬЮ СНИЖЕНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Предлагаются постановка и методика решения задачи оптимального управления процессом охлаждения изделий из стеклующихся полимеров с целью снижения в них технологических остаточных напряжений, во многом предопределяющих эксплуатационные характеристики конструкций. В качестве целевой функции выбрана максимальная интенсивность остаточных технологических напряжений, для определения которых решается задача термовязкоупругости в конечно-элементной постановке. Поиск оптимального управления проводился в классе кусочно-постоянных функций, описывающих зависимость температуры окружающей среды от времени.

В результате решения поставленных задач показано, что применение к процессу охлаждения найденного оптимального управления позволяет снизить технологические остаточные напряжения на порядок по сравнению с охлаждением изделия без управления.

Ключевые слова: оптимальное управление, целевая функция, задача термовязкоупругости, стеклующийся полимер, остаточные напряжения.

M.M. Drobinin, I.N. Boyarshinova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

ABOUT ONE OF THE METHODOLOGIES OF VITRIFYING POLYMERS COOLING PROCESS OPTIMIZATION WHICH AIMS RESIDUAL STRESSES DECREASE

In this article problem of optimal vitrifying polymers cooling process control is analyzed, its solution methodology is suggested aiming to decrease technological residual stresses which predetermine major operating characteristics of the structures. Maximum intensity of technological residual stresses was chosen as criterion function. The thermoviscoelasticity problem in finite-elemental formulation is solved to determine technological residual stresses. Optimal control search was conducted in class of piecewise-constant functions, which describe environment temperature and time dependence.

The outcome of problem solving shows that optimal control application to vitrifying polymers cooling process leads to technological residual stresses decrease ten times more compared to vitrifying polymers cooling process without control.

Keywords: optimal control, criterion function, thermoviscoelasticity problem, vitrifying polymer, residual stresses.

Введение

Применение полимерных материалов в настоящее время обретает все большие масштабы. Изделия из полимеров используются во многих областях промышленности и техники, поскольку по прочности некоторые из них превосходят чугун и алюминий, а по химической стойкости – практически все металлы.

Изготовление изделий из полимерных материалов сопровождается процессом охлаждения и полимеризации связующего. В процессе производства в изделиях возникают остаточные технологические напряжения, во многом определяющие эксплуатационные характеристики детали и конструкции.

Данная работа посвящена исследованию и оптимизации процесса охлаждения изделий из стеклующихся полимеров с целью снижения технологических остаточных напряжений.

1. Постановка задачи

Цилиндр конечной длины из аморфного полимера (эпоксидная смола ЭДТ-10) разогрет до некоторой температуры, превышающей температуру стеклования. Происходит охлаждение цилиндра до комнатной температуры, в процессе которого в теле возникают остаточные напряжения, вызываемые градиентами температур. В данной работе предлагаются постановка и методика решения задачи оптимального управления процессом охлаждения изделия при помощи регулирования температуры окружающей среды с целью снижения остаточных напряжений.

Требуется найти параметры процесса охлаждения, которые позволили бы обеспечить минимум нормы остаточных напряжений.

Расчетная схема цилиндра представлена на рис. 1.

Предполагается, что в процессе производства на изделие оказывается только температурное воздействие. С внешней поверхности цилиндра происходит теплоотдача в воздух. С учетом осевой симметрии будем рассматривать четверть центрального сечения цилиндра.

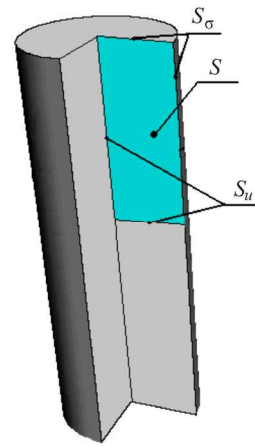


Рис. 1. Расчетная схема

Для описания термомеханического поведения материала использована модель, предложенная в работах [1–4]. Для рассматриваемого полимера существует переходный процесс стеклования, который характеризуется степенью застеклованности $N(T(t))$, ($0 \leq N \leq 1$), показывающей «завершенность» процесса стеклования при температуре $T(t)$.

Математическая постановка краевой задачи термовязкоупругости включает уравнения нестационарной задачи теплопроводности (1)–(3), уравнения равновесия (4), соотношения Коши (5), граничные условия (6) и физические соотношения (7).

$$c\rho\dot{T}(\mathbf{x}, t) = \lambda \Delta T(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in V, \quad t \in [0, t_K], \quad (1)$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_H(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V \cup S, \quad (2)$$

$$\lambda \mathbf{n} \cdot \text{grad} T(\mathbf{x}, t) = -h(T(\mathbf{x}, t) - T_c), \quad \mathbf{x} \in S, \quad t \in [0, t_K], \quad (3)$$

где c, ρ, λ, h – соответственно теплоемкость, плотность, теплопроводность и коэффициент теплоотдачи в окружающую среду; $\mathbf{x}$ – радиус-вектор произвольной точки области $V \cup S$; $\mathbf{n}$ – вектор единичной внешней нормали к границе S ; T_H, T_c – начальная температура и температура среды.

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in V, \quad t \in [0, t_K], \quad (4)$$

$$2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \nabla \quad \mathbf{x} \in V, \quad t \in [0, t_K], \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma, \quad t \in [0, t_K], \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{U}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_u, \quad t \in [0, t_K], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) &= \left[\mathbf{K}_1(T(t)) - \frac{2}{3} \mathbf{G}_1(T(t)) \right] \cdot \cdot \Theta(t) \mathbf{g} + 2 \mathbf{G}_1(T(t)) \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t) - \\ &- 3 \mathbf{K}_1(T(t)) \cdot \cdot \int_{T_H}^{T(t)} \boldsymbol{\alpha}(T) dT(\tau) + \left[\mathbf{K}_2(T(t)) - \frac{2}{3} \mathbf{G}_2(T(t)) \right] \cdot \cdot \\ &\cdot \cdot \int_{T_H}^{T(t)} [\Theta(t) - \Theta^*(\tau)] \mathbf{g} dN(T(\tau)) + 2 \mathbf{G}_2(T(t)) \cdot \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \int_{T_H}^{T(t)} [\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}^*(\tau)] dN(T(\tau)) - 3\mathbf{K}_2(T(t)) \cdot \\
& \cdot \int_{T_H}^{T(t)} \left[\int_{T_H}^{T(t)} \boldsymbol{\alpha}(T(s)) dT(s) - \int_{T_H}^{T(\tau)} \boldsymbol{\alpha}(T(s)) dT(s) \right] dN(T(\tau)),
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\mathbf{u}, \mathbf{f}$ – векторы перемещений и массовых сил области V ; S_σ, S_u – части границы S , на которой заданы соответственно поверхностные силы и перемещения; $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ – тензоры сдвиговых и объемных модулей материала в высокоэластическом и застеклованном состояниях; $\boldsymbol{\alpha}(T)$ – тензор коэффициентов линейного температурного расширения; T – температура; t, τ – время.

Физические соотношения могут быть представлены с использованием разложения на девиаторные (8) и шаровые (9) части тензоров напряжений и деформаций:

$$\mathbf{S}(t) = 2\mathbf{G}_1(T(t)) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(t) + 2\mathbf{G}_2(T(t)) \cdot \int_{T_H}^{T(t)} (\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}(\tau)) dN(T(\tau)), \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{K}_1(T(t)) \cdot \left[\Theta(t) \mathbf{g} - 3 \int_{T_H}^{T(t)} \boldsymbol{\alpha}(T) dT(\tau) \right] + \\
& + \mathbf{K}_2(t) \cdot \int_{T_H}^{T(t)} \left\{ \left[\Theta(t) \mathbf{g} - 3 \int_{T_H}^{T(t)} \boldsymbol{\alpha}(T) dT(s) \right] - \left[\Theta(\tau) \mathbf{g} - 3 \int_{T_H}^{T(\tau)} \boldsymbol{\alpha}(T) dT(s) \right] \right\} dN(\tau),
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t) - \frac{1}{3} \Theta(t) \mathbf{g},$$

$$\mathbf{s}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t) - \sigma(t) \mathbf{g}, \quad \sigma(t) = \frac{1}{3} \text{Sp} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{g}.$$

Зависимость степени застеклованности от температуры в соответствии с экспериментальными результатами [2] и исследованиями, проведенными в работе [5], может быть записана в виде (10).

Для девиаторной и шаровой частей тензоров зависимость степени застеклованности от температуры будет различной [5], а следовательно, будет определяться четырьмя параметрами – $T'_g, \gamma', T''_g, \gamma''$:

$$\begin{aligned}\frac{dN'}{dT(t)} &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\gamma'} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{T(t)-T'_g}{\gamma'}\right)^2\right], \\ \frac{dN''}{dT(t)} &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}\gamma''} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{T(t)-T''_g}{\gamma''}\right)^2\right].\end{aligned}\tag{10}$$

Введем функцию управления $U(\mathbf{p}, \tau)$, описывающую зависимость температуры окружающей среды от времени, где $\mathbf{p}$ – вектор параметров управления.

Целью управления является снижение технологических остаточных напряжений, поэтому в качестве критерия F оптимизации выберем максимальную по области V интенсивность напряжений:

$$F = \max_{\mathbf{x} \in V} \sigma_i(\mathbf{x}, U) \rightarrow \min, \quad \mathbf{x} \in V, \tag{11}$$

где $\sigma_i = I_2(\boldsymbol{\sigma})$.

Задача оптимального управления процессом охлаждения изделий из стеклующихся полимеров с целью снижения остаточных напряжений может быть сформулирована следующим образом: найти функцию управления $U(\mathbf{p}, \tau)$, обеспечивающую минимум критерия (11) при условиях задачи (1)–(10) и ограничениях, накладываемых технологией процесса на параметры оптимизации.

2. Методика решения задачи

В качестве функции управления $U(\mathbf{p}, \tau)$ выберем кусочно-постоянную функцию зависимости температуры окружающей среды от времени:

$$U(\mathbf{p}, \tau) = \{U_j(T_j, t_j)\}, \quad j = \overline{1, k}. \tag{12}$$

Вид функции управления представлен на рис. 2. Количество ступеней функции может быть различным.

Компонентами вектора $\mathbf{p}$ параметров оптимизации выступают значения температуры среды на каждой ступени процесса охлаждения: T_j – температура среды на j -й ступени управления, а t_j – время охлаждения на j -й ступени.

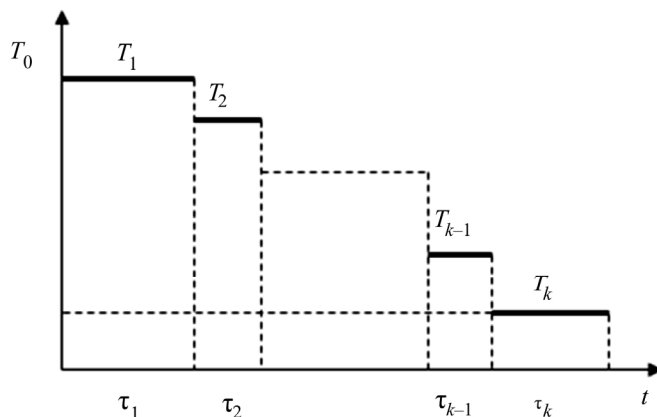


Рис. 2. Вид функции управления

Условием перехода на следующую ступень управления будем считать выравнивание температуры по всему объему изделия:

$$T(\mathbf{x}, \tau_j) = T_j = \text{const.}$$

Решение задачи термовязкоупругости производилось с помощью метода конечных элементов с линейной аппроксимацией перемещений.

Для проверки правильности методики и корректности работы программ была решена тестовая задача.

3. Решение тестовой задачи

Рассмотрим тонкий диск постоянной толщины радиусом b , вращающийся с переменной угловой скоростью Ω при изменяющейся во времени температуре $T(\tau)$. Точное решение данной задачи приведено в [7].

Численное решение, полученное с помощью разработанной методики и программ, сравнивалось с точным. Максимальная относительная погрешность численного решения составила 1,6 %, что позволяет говорить о верности разработанной методики и корректной работе программы.

Для решения задач оптимизации использовался метод Нелдера-Мида [8]. Для исследования единственности решения поиск минимума проводился из нескольких начальных приближений.

4. Результаты решения задачи оптимального управления

Задача оптимального управления (11) для предложенных кусочно-постоянных функций управления (12) сводится к решению задачи оптимизации, заключающейся в отыскании оптимальных параметров T_j, t_j функции управления.

Задача решалась при следующих исходных данных: высота цилиндра – 0,14 м, диаметр – 0,08 м, теплоемкость – 1540 Дж/(кг·К), плотность – 1200 кг/м³, теплопроводность – 0,29 Вт/(м²·К), температура стеклования – 80 °С.

Первоначально был произведен расчет напряжений в цилиндре при естественном процессе охлаждения. Результаты решения: максимальная интенсивность напряжений составляет $1,09 \cdot 10^7$ Па, время полного охлаждения – 1,5 ч. Распределение остаточных напряжений по радиусу цилиндра представлено на рис. 3.

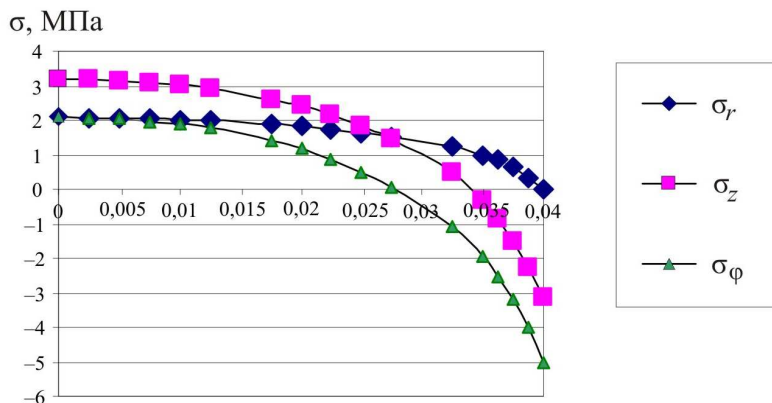


Рис. 3. Распределение напряжений по радиусу в центральном сечении охлажденного цилиндра при естественном процессе охлаждения

В процессе исследования были получены параметры оптимальной функции управления с тремя и четырьмя интервалами постоянства температуры окружающей среды. При оптимальном управлении в виде кусочно-постоянной функции с двумя переключениями (трехступенчатое управление) были получены: максимальная интенсивность напряжений – $1,42 \cdot 10^6$ Па, время полного охлаждения – 2,5 ч. Распределение остаточных напряжений по радиусу цилиндра представлено на рис. 4.

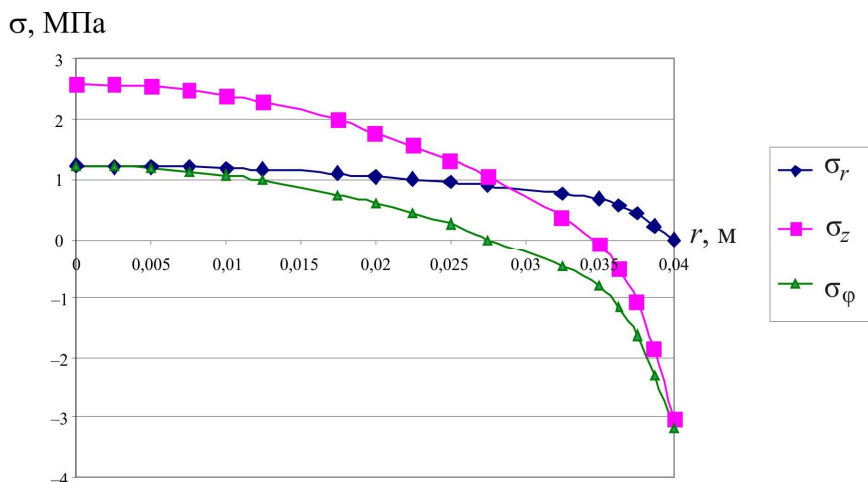


Рис. 4. Распределение напряжений по радиусу в центральном сечении охлажденного цилиндра при трехступенчатом оптимальном управлении

При оптимальном управлении с помощью четырехступенчатой функции были получены следующие результаты: максимальная интенсивность напряжений – $1,11 \cdot 10^6$ Па, время полного охлаждения – 2,9 ч. Распределение остаточных напряжений по радиусу цилиндра показано на рис. 5.

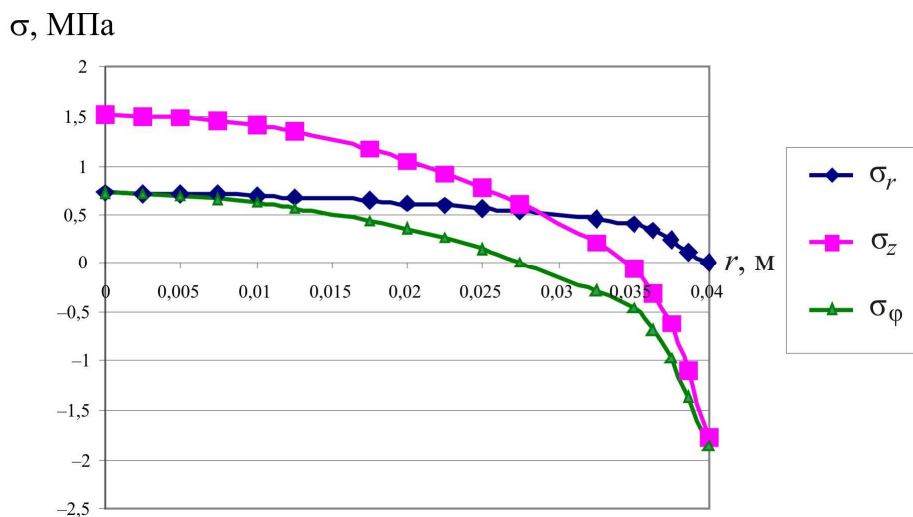


Рис. 5. Распределение напряжений по радиусу в центральном сечении охлажденного цилиндра при четырехступенчатом оптимальном управлении

Максимальное снижение остаточных напряжений достигается при использовании четырехступенчатого управления процессом охлаждения. Дальнейшее увеличение количества переключений не дает значительного уменьшения остаточных напряжений, но увеличивает время охлаждения в несколько раз, что является нецелесообразным в данном технологическом процессе.

Заключение

Предложены постановка и методика решения задачи оптимального управления процессом охлаждения изделий из стеклующихся полимеров с целью снижения технологических остаточных напряжений.

Поиск оптимального управления проводился в классе кусочно-постоянных функций, параметрами которых выступали температура окружающей среды и время охлаждения. В результате решения поставленных задач было показано, что охлаждение с оптимальными параметрами функции управления позволяет достичь уменьшения технологических остаточных напряжений в изделии на порядок по сравнению с напряжениями, возникающими при естественном охлаждении.

Библиографический список

1. Сметанников О.Ю. Об одной модели регулирования остаточных напряжений в изделиях из стеклующихся полимеров // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – Самара, 2008. – № 2(36). – С. 1–13.
2. Сметанников О.Ю., Труфанов Н.А. Экспериментальная идентификация модели термомеханического поведения стеклующихся полимеров // Вестник Удмуртского университета. – Ижевск, 2009. – Вып. 4. – С. 133–145.
3. Труфанов Н.А., Сметанников О.Ю., Завьялова Т.Г. Численное решение краевых задач механики полимеров с учетом фазовых и релаксационных переходов // Математическое моделирование. – 2000. – № 7. – С. 45–50.
4. Сметанников О.Ю. Оптимизация остаточного прогиба круглой пластинки из стеклующегося полимера при неравномерном охлаждении // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 81–92.
5. Бояршинова И.Н. Применение методов оптимизации для определения характеристик термомеханического поведения стеклующихся полимеров // Вестник ПНИПУ. Механика. – Пермь, 2012. – № 1. – С. 7–15.

6. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 393 с.

7. Ильюшин А.А., Победря Н.Н. Основы математической теории термовязкоупругости. – СПб.: Наука, 1970. – 283 с.

8. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 286 с.

References

1. Smetannikov O.Yu. Ob odnoj modeli regulirovaniya ostatochnykh napryazhenij v izdeliyakh iz steklujushhikhsya polimerov [About one model of residual stresses control in vitrifying polymeric articles]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya*, 2008, no. 2(36), pp. 1–13.

2. Smetannikov O.Yu., Trufanov N.A. Eksperimental'naya identifikacziya modeli termomekhanicheskogo povedeniya steklujushhikhsya polimerov [Experimental identification of thermomechanical model for glass polymers]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta*, 2009, vol. 4, pp. 133–145.

3. Trufanov N.A., Smetannikov O.Yu., Zav'yalova T.G. Chislennoe reshenie kraevykh zadach mekhaniki polimerov s uchetom fazovykh i relaksacionnykh perekhodov [The numerical solution of polymer mechanics boundary-value problems under relaxation and phase transition]. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2000, no. 7, pp. 45–50.

4. Smetannikov O.Yu. Optimizaciya ostatochnogo progiba krugloj plastinki iz steklujushhegosya polimera pri neravnomernom okhlazhdenii [Optimization of the residual bending flexure of round polymer plate with glass transition at non-uniform cooling]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2010, no. 1, pp. 81–92.

5. Boyarshinova I.N. Primenenie metodov optimizacii dlya opredeleniya kharakteristik termomekhanicheskogo povedeniya steklujushhikhsya polimerov [The use optimization techniques for definition of the thermomechanical behavior characteristics of vitrifying polymers]. *Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mehanika*, 2012, no. 1, pp. 7–15.

6. Segerlind L. Primenenie metoda konechnykh elementov [Applied finite element analysis]. Moscow: Mir, 1979, 393 p.

7. Il'yushin A.A., Pobedrya N.N. Osnovy matematicheskoy teorii termovязkoupругosti [Basis of mathematical termoviscoelasticity theory]. St. Petersburg: Nauka, 1970, 283 p.

8. Himmel'blau D. Prikladnoe nelinejnoe programmirovaniye [Applied nonlinear programming]. Moscow: Mir, 1975, 286 p.

Получено 27.09.2012

Об авторах

Дробинин Михаил Михайлович (Пермь, Россия) – магистрант кафедры вычислительной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: midro@yandex.ru).

Бояршинова Ирина Николаевна (Пермь, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: vmm@cpl.pstu.ac.ru).

About the authors

Drobinin Michail Michajlovich (Perm, Russia) – undergraduate student, Department of Computational Mathematics and Mechanics, Perm National Research Politechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russia, e-mail: midro@yandex.ru).

Boyarshinova Irina Nikolaevna (Perm, Russia) – Ph.D. of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Computational Mathematics and Mechanics, Perm National Research Politechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russia, e-mail: vmm@cpl.pstu.ac.ru).