

УДК 539.374

**А.А. Каменских, Н.А. Труфанов**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
Пермь, Россия

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СМАЗОЧНЫХ КАНАВОК В АНТИФРИКЦИОННОЙ ПРОСЛОЙКЕ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КОНТАКТНОГО УЗЛА**

Рассмотрено осесимметричное контактное напряженное состояние конструкции опорных частей с шаровым сегментом пролетных строений мостов. Произведено уточнение модели опорной части путем введения канавок со смазочным материалом, присутствующих в антифрикционной прослойке. Приведены результаты исследования влияния коэффициента Пуассона и модуля Юнга смазочного материала на напряженное состояние конструкции. Изучен характер распределения нормальных и касательных напряжений на контактных поверхностях конструкции для моделей с учетом и без учета канавок со смазочным материалом. Рассмотрено влияние канавок со смазочным материалом на параметры контакта.

**Ключевые слова:** контактное взаимодействие, метод конечных элементов, упругопластичность, осесимметричная задача, касательные напряжения.

**A.A. Kamenskikh, N.A. Trufanov**

Perm National Research Politechnic University, Perm, Russia

## **THE RESEARCH OF INFLUENCE OF THE LUBRICATING GROOVES IN ANTIFRICTIONAL INTERLAYER ON A TENSION OF CONTACT UNIT**

The axisymmetric contact tension of a design of basic parts with a spherical segment of flying structures of bridges is considered. Adjustment of model a bearing part is made by means introduction of groove with lubricant, presented in the antifrictional interlayer. Research results of the Poisson's ratio influence and Young's modulus of lubricant on a tension of a construction are given. The distribution character of normal and tangents stresses on contact interaction surfaces of a design is investigated for models with taking into account and without taking into account grooves with lubricant. Influence of grooves with lubricant on parameters of contact is considered.

**Keywords:** contact interaction, finite element method, elastoplastic, axisymmetric problem, tangents stresses.

Одной из активно развивающихся областей механики является исследование проблемы контактного взаимодействия твердых тел [1–4]. Для решения задач контактного взаимодействия предложены эффек-

тивные методы решения: метод граничных элементов (МГЭ) [5, 6 и др.], метод конечных элементов (МКЭ) [7, 8 и др.] и комбинированные МГЭ-МКЭ методы [9, 10 и др.]. Реализация контактных задач имеет важное значение во многих технических прикладных исследованиях. Особую роль играют задачи с учетом трения на поверхности контакта.

В данной работе рассматривается задача контакта между ответственными деталями конструкции опорных частей пролетных строений мостов с шаровым сегментом, учитывающая канавки со смазочным материалом. Задача рассматривается в рамках механики контактного взаимодействия, на поверхности контакта учитывается трение. Опорные части с шаровым сегментом подразделяются на неподвижные, линейно подвижные и всесторонне подвижные. Общими деталями опорных частей с шаровым сегментом (рис. 1) являются верхняя плита с шаровым полированым сегментом – 1, нижняя плита со сферическим вырезом – 2 и прослойка из антифрикционного материала (сферическая поверхность скольжения) – 3.

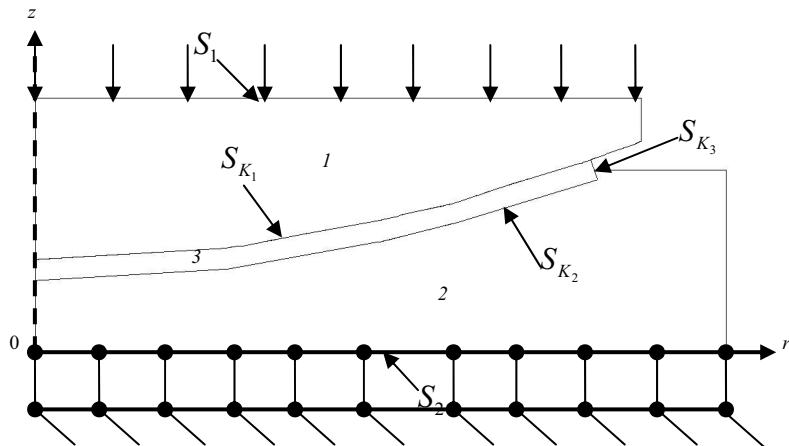


Рис. 1. Опорная часть с шаровым сегментом без учета канавок со смазочным материалом

Канавки со смазочным материалом (область 4) присутствуют на поверхности контакта  $S_{K_1}$  (рис. 2). В данной работе рассматривается влияние канавок и параметров смазочного материала на напряженное состояние конструкции. В первом приближении, с учетом малости деформаций в контактном узле, свойства смазочного материала приняты упругими с коэффициентом Пуассона, соответствующим слабой сжимаемости, и относительно низким модулем сдвига.

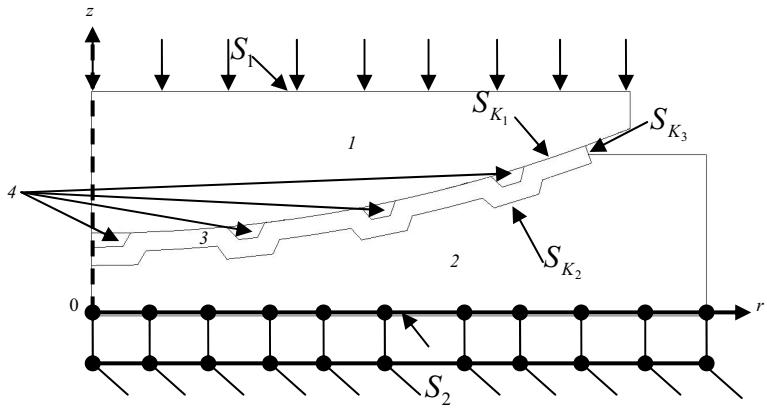


Рис. 2. Опорная часть с шаровым сегментом с учетом канавок со смазочным материалом

Исследуется конструкция опорных частей пролетных строений мостов с шаровым сегментом производства ООО «АльфаТех» (г. Пермь) по проектам и с научно-техническим сопровождением ООО «Ко Люмьер Лтд» (г. Москва).

## 1. Математическая постановка

Общая математическая постановка упругого поведения материала включает в себя уравнения равновесия [11]:

$$\operatorname{div} \hat{\sigma} = 0, \quad \vec{x} \in V; \quad (1)$$

геометрические соотношения:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right), \quad \vec{x} \in V; \quad (2)$$

физические соотношения:

$$\sigma = \lambda_k I_1(\hat{\varepsilon}) \hat{I} + 2\mu_k \hat{\varepsilon}, \quad \vec{x} \in V_1 \cup V_2 \cup V_4, \quad (3)$$

где  $\lambda_k$  и  $\mu_k$  – параметры Ламе ( $k = 1, 2, 4$  – индекс, условный номер параметров материала области);  $\hat{\sigma}$  – тензор напряжений;  $\hat{\varepsilon}$  – тензор деформаций;  $\vec{u}$  – вектор перемещений;  $\vec{x}$  – радиус-вектор произвольной точки области  $V$ ;  $I_1(\hat{\varepsilon})$  – первый инвариант тензора деформаций;  $\hat{I}$  – единичный тензор;  $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$  – область;  $V_1$  – область плиты с шаровым сегментом;  $V_2$  – область плиты со сферическим вы-

резом;  $V_4$  – области канавок со смазочным материалом. При  $k=1$  и  $k=2$  параметры Ламе одинаковые.

Для описания поведения материала прослойки выбрана деформационная теория пластичности, физические соотношения которой имеют вид [12]

$$\hat{\sigma} = \frac{2\sigma_u}{3\varepsilon_u} (\hat{\varepsilon} - I_1(\hat{\varepsilon}) \hat{I}) + 3KI_1(\hat{\varepsilon}) \hat{I}, \quad \vec{x} \in V_3, \quad (4)$$

где  $\sigma_u$  – интенсивность тензора напряжений,  $\sigma_u = \sqrt{3I_2(\hat{\sigma})}$ ;  $(I_2(\hat{\sigma}))$  – второй инвариант тензора напряжений);  $\varepsilon_u$  – интенсивность тензора деформаций,  $\varepsilon_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{I_2(\hat{\varepsilon})}$ ;  $(I_2(\hat{\varepsilon}))$  – второй инвариант тензора деформаций);  $K$  – объемный модуль упругости;  $\sigma_u$  – функциональная зависимость, определяемая кривой деформирования,  $\sigma_u = \Phi(\varepsilon_u)$ ;  $V_3$  – область прослойки.

Математическая постановка включает также кинематические граничные условия на поверхности  $S_2$

$$u_z = 0, \quad \vec{x} \in S_2, \quad (5)$$

и статические граничные условия на поверхности  $S_1$

$$\hat{\sigma} \cdot \vec{n} = \bar{P}, \quad \vec{x} \in S_1, \quad (6)$$

остальные наружные поверхности являются свободными:

$$\hat{\sigma} \cdot \vec{n} = 0. \quad (7)$$

Система уравнений (1)–(7) дополняется граничными условиями на поверхности контакта  $S_K = S_{K1} \cup S_{K2} \cup S_{K3}$ . Рассматриваются следующие типы контактного взаимодействия:

а) проскальзывание с трением:

– для трения покоя

$$\sigma_n < 0, \quad \sigma_{n\alpha} < q\sigma_n, \quad \vec{u}^1 = \vec{u}^2, \quad (8)$$

– для трения скольжения

$$\sigma_n < 0, \quad \sigma_{n\alpha} = q\sigma_n, \quad u_n^1 = u_n^2, \quad \vec{u}_\tau^1 \neq \vec{u}_\tau^2, \quad (9)$$

где  $q$  – коэффициент трения;  $u_n$  – нормальные к соответствующей контактной границе смещения;  $u_\tau$  – перемещения по касательной к соответствующей контактной границе;  $\sigma_n$  – напряжение по нормали к контактной границе (контактное давление  $P_{K1}$  на  $S_{K1}$ );  $\sigma_{n\alpha}$  – напряжение по касательной к контактной границе (контактное касательное напряжение  $\tau_{K1}$  на  $S_{K1}$ );  $\alpha$  – индекс – условные номера двух контактирующих поверхностей,  $\alpha = 1, 2$ ;

б) отлипание

$$\left| u_n^1 - u_n^2 \right| \geq 0, \quad \sigma_{n\alpha} = \sigma_n = 0, \quad \alpha = 1, 2; \quad (10)$$

в) полное сцепление

$$\vec{u}^1 - \vec{u}^2 = 0, \quad \sigma_{n\alpha} = \sigma_n = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (11)$$

Также система (1)–(11) дополняется статическими ограничениями, наложенными на поверхности  $S_1$ :

$$u_z(r, z) = U = \text{const}, \quad \vec{x} \in S_1. \quad (12)$$

Контактная задача упругопластичности в данной работе решена в частном случае осесимметричного напряженно-деформированного состояния.

## 2. Идентификация определяющих уравнений

Для рассмотрения влияния канавок со смазочным материалом на напряженное состояние конструкции и зоны контакта была исследована конструкция опорной части с шаровым сегментом, где в качестве материала прослойки скольжения был выбран модифицированный фторопласт. Механическое поведение данного материала рассматривалось при сложных многоступенчатых историях деформирования с разгрузками. При изучении механического поведения модифицированного фторопласта проведены однотипные серии экспериментов на свободное сжатие (при одноосном напряженном состоянии) в диапазоне деформаций сжатия до 10 % и на стесненное сжатие (при одноосном деформированном состоянии) в диапазоне напряжений сжатия до 160 МПа [13].

На основе анализа результатов экспериментов в качестве модели поведения материала была выбрана и идентифицирована модель де-

формационной теории упругопластичности с упругой объемной сжимаемостью и нелинейной диаграммой квазиравновесного деформирования при свободном сжатии с минимальной скоростью нагружения.

Для проверки работоспособности выбранной модели поведения материала выполнена серия численных экспериментов по решению краевых задач для испытанных образцов с использованием программного комплекса ANSYS. Установлено, что численный расчет с использованием выбранных определяющих соотношений дает хорошее количественное соответствие результатам эксперимента [14].

### **3. Реализация решения и полученные результаты**

Реализовано решение осесимметричной контактной задачи, описанной в 1. При помощи программного комплекса ANSYS построены конечно-элементные модели с использованием деформационной теории упругопластичности. Используется осесимметричный 8-узловой элемент, обладающий аппроксимацией 2-го порядка и двумя неизвестными перемещениями в каждом узле. При отсутствии канавок со смазочным материалом в прослойке произведено сгущение размера элемента, в нижней и верхней плитах размер элементов градиентно увеличивается. По толщине прослойка разбита на 16 элементов. Количество элементов по толщине прослойки выбрано в результате исследования сходимости решения в зависимости от данного параметра [15]. В случае, учитывающем канавки со смазочным материалом, размеры элементов в прослойке и верхних и нижних плитах одинаковые, количество элементов по толщине прослойки равно 16. На поверхностях соприкосновения верхней и нижней плит с прослойкой нанесена контактная конечно-элементная пара, позволяющая учесть трение.

Изучены особенности напряженно-деформированного состояния конструкции при учете канавок со смазочным материалом. Произведено сравнение с результатами, полученными для опорной части с шаровым сегментом без учета канавок со смазочным материалом. На модель наложены статические и кинематические граничные условия, соответствующие реальной максимальной нагрузке при эксплуатации опорной части с шаровым сегментом в пролетных строениях мостов: к верхней плите прикладывается распределенная вертикальная нагрузка  $P = 54$  МПа.

В результате решения задачи были найдены зоны контактного взаимодействия, контактные давления и контактные касательные напря-

жения. Наибольший интерес представляют данные величины на контактной поверхности прослойки, обладающей большей свободой  $S_{K_1}$ .

На поверхностях контакта действуют контактные давления и контактные касательные напряжения. Рассмотрено влияние коэффициента Пуассона  $\nu$  смазочного материала канавок в антифрикционной прослойке на относительное контактное давление  $P_{K_1}/P$  (отнесено к прикладываемой нагрузке) (рис. 3). Рассмотрены следующие значения коэффициента Пуассона: 0,48; 0,49; 0,4999; 0,49999 и 0,4999999 – модуль Юнга  $E$  в данном случае равен  $2 \cdot 10^8$  Па. Также рассмотрено влияние модуля Юнга  $E$  смазочного материала канавок в антифрикционной прослойке на относительное контактное давление  $P_{K_1}/P$ . Рассмотрены два значения модуля Юнга –  $E = 2 \cdot 10^8$  Па и  $E = 2 \cdot 10^7$  Па; результаты представлены на рис. 4 для коэффициента Пуассона  $\nu = 0,4999999$ .

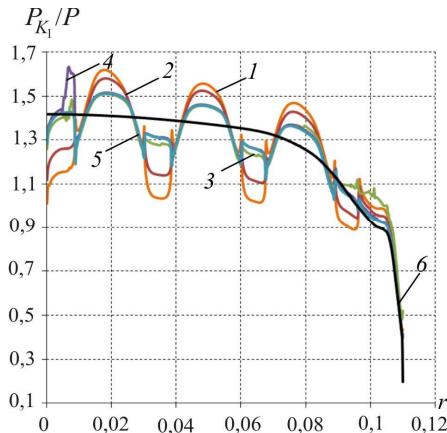


Рис. 3. Относительное контактное давление на  $S_{K_1}$  для разных значений  $\nu$ : 1 –  $\nu = 0,48$ ; 2 –  $\nu = 0,49$ ; 3 –  $\nu = 0,4999$ ; 4 –  $\nu = 0,49999$ ; 5 –  $\nu = 0,4999999$ ; 6 – решение без учета канавок

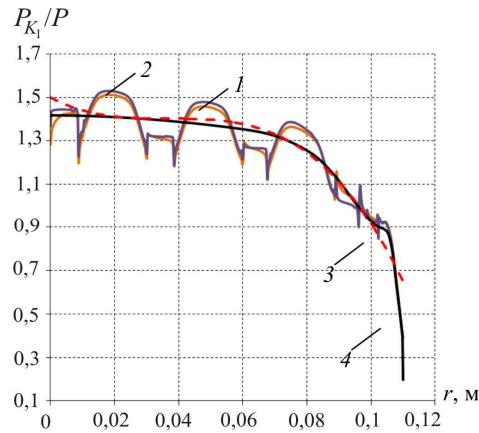


Рис. 4. Относительное контактное давление на  $S_{K_1}$  для разных значений  $E$ : 1 –  $E = 2 \cdot 10^8$  Па; 2 –  $E = 2 \cdot 10^7$  Па; 3 – средняя полиномиальная 1, 2; 4 – решение без учета канавок

Заметно уточнение относительных контактных давлений при уменьшении коэффициента Пуассона. Коэффициент Пуассона приближается к 0,5 – смазочный материал несжимаем. Относительное контактное давление для модели, учитывающей канавки со смазочным материалом, колеблется около графика относительного контактного давления, соответствующего модели без учета канавок. Из результатов, приведенных на рис. 4, можно сделать вывод о малом влиянии

значения модуля Юнга на относительное контактное давление. Средняя полиномиальная кривая относительного контактного давления близка к решению, полученному для модели, не учитывающей канавки со смазочным материалом.

На рис. 5 и 6 показано влияние коэффициента Пуассона  $\nu$  и модуля Юнга  $E$  на относительное контактное касательное напряжение  $\tau_{K_1}/P$  (отнесено к прикладываемой нагрузке) соответственно. Коэффициент Пуассона и модуль Юнга изменяются в ранее упомянутых пределах. В связи с большим разбросом значений  $\tau_{K_1}/P$  решения, учитывающего канавки со смазочным материалом, на рис. 5–6 приведены средние полиномиальные кривые относительного контактного касательного напряжения. В центре и с краю средние полиномиальные относительные контактные касательные напряжения не равны 0, что связано с осреднением результатов полиномов. Для модели, учитывающей канавки со смазочным материалом, относительные контактные касательные напряжения колеблются около графика относительного контактного касательного напряжения, соответствующего модели без учета канавок. Данные колебания более заметны (рис. 7), в центре и с краю относительные контактные касательные напряжения близки к 0.

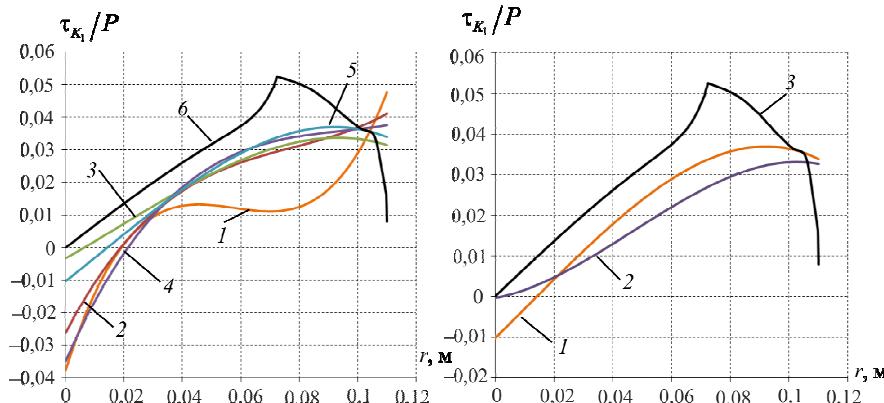


Рис. 5. Относительное контактное касательное напряжение на  $S_{K1}$  для разных значений  $\nu$ : 1 –  $\nu = 0,48$ ; 2 –  $\nu = 0,49$ ; 3 –  $\nu = 0,4999$ ; 4 –  $\nu = 0,49999$ ; 5 –  $\nu = 0,499999$ ; 6 – решение без учета канавок

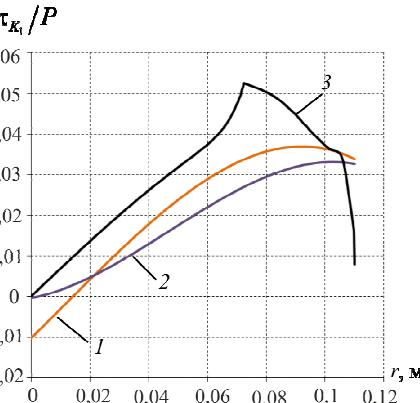


Рис. 6. Относительное контактное касательное напряжение на  $S_{K1}$  для разных значений  $E$ : 1 –  $E = 2 \cdot 10^8$  Па; 2 –  $E = 2 \cdot 10^7$  Па; 3 – решение без учета канавок

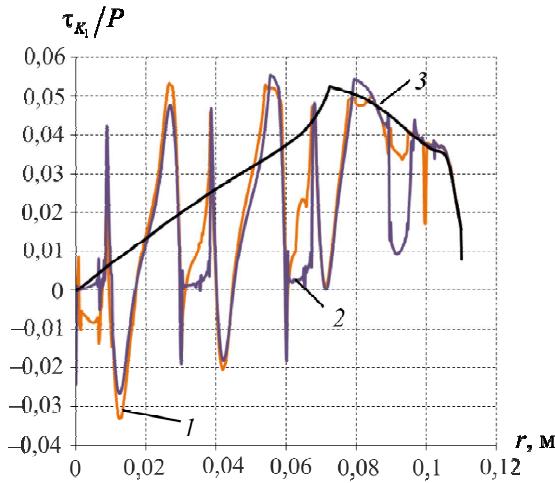


Рис. 7. Относительное контактное касательное напряжение на  $S_{K1}$  для разных значений  $E$ : 1 –  $E = 2 \cdot 10^8$  Па; 2 –  $E = 2 \cdot 10^7$  Па;  
3 – решение без учета канавок

Аналогично относительному контактному давлению при уменьшении коэффициента Пуассона относительное контактное касательное напряжение уточняется. Влияние модуля упругости на относительное контактное касательное напряжение более существенно. Отличие решений для моделей с учетом и без учета канавок со смазочным материалом в случае относительного касательного контактного напряжения более существенно, но не оказывает особого влияния на напряженное состояние в зоне контакта. Максимальное отклонение средних полиномиальных  $\tau_{K_1}/P$  от решения без учета канавок при  $E = 2 \cdot 10^8$  Па равно 0,02436 и при  $E = 2 \cdot 10^7$  Па – 0,017797, что находится на уровне погрешности определения напряжений методом конечных элементов.

Исходя из вышесказанного и рис. 3–6 можно сделать вывод, что при анализе данной конструкции в трехмерной постановке можно не учитывать канавки со смазочным материалом.

Таким образом, на основе численного решения осесимметричной контактной задачи упругопластичности установлены величины и характер распределения контактного давления и контактного касательного напряжения в конструкции. Рассмотрено изменение параметров в зоне контакта при учете канавок со смазочным материалом. Произведено сравнение параметров зоны контакта решений для моделей с учетом и без учета канавок со смазочным материалом. По результатам

анализа сделан вывод о возможности исключения канавок со смазочным материалом из трехмерной модели исследуемой конструкции опорной части с шаровым сегментом.

### **Библиографический список**

1. Александров В.М., Чебаков М.И. Введение в механику контактных взаимодействий. – Ростов н/Д: Изд-во ООО «ЦВВР», 2007. – 114 с.
2. Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред / С.М. Айзикович, В.М. Александров, А.В. Белоконь, Л.И. Кренев, И.С. Трубчик. – М.: Физматлит, 2006. – 237 с.
3. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. – М.: Наука, 2001. – 479 с.
4. Механика контактных взаимодействий / под ред. И.И. Воровича, В.М. Александрова. – М.: Физматлит, 2001. – 672 с.
5. Méchain-Renauda C., Cimetière A. BEM solution of two dimensional unilateral contact problems with friction by a new approach // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2003. – Vol. 27. – P. 269–277.
6. Rodríguez-Tembleque L., Buroni F.C., Abascal R., Sáez A. 3D frictional contact of anisotropic solids using BEM // European Journal of Mechanics A/Solids. – 2011. – Vol. 30 – P. 95–104.
7. Khoei A.R., Nikbakht M. An enriched finite element algorithm for numerical computation of contact friction problems // International Journal of Mechanical Sciences. – 2007. – Vol. 49. – P. 183–199.
8. Li Y., Liu G.R., Zhang G.Y. An adaptive NS/ES-FEM approach for 2D contact problems using triangular elements // Finite Elements in Analysis and Design. – 2011. – Vol. 47, issue 3. – P. 256–275.
9. González J.A., Park K.C., Felippa C.A., Abascal R. A formulation based on localized Lagrange multipliers for BEM–FEM coupling in contact problems//Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2008. – Vol. 197 – P. 623–640.
10. Rodríguez-Tembleque L., Abascal R. A FEM–BEM fast methodology for 3D frictional contact problems // Computers and Structures. – 2010. – Vol. 88. – P. 924–937.
11. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
12. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.

13. Адамов А.А. Экспериментальное исследование механического поведения композитов на основе фторопласта, работающих при больших давлениях в тонких слоях // Механика микронеоднородных материалов и разрушение: материалы VII Рос. науч.-техн. конф. Екатеринбург, ИМАШ УрО РАН, 2012 [Электронный ресурс]. Электронный оптический диск, вкладка «Публикации». – 7 с.

14. Каменских А.А., Труфанов Н.А. Численный анализ контактного напряженного состояния опорных частей с шаровым сегментом // Изв. Самарского научного центра Российской академии наук. – 2011. – Т. 13, № 4(4). – С. 960–965.

15. Каменских А.А. Напряженное состояние в контактной пролайке опорной части с шаровым сегментом // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2012, № 1. – С. 31–42.

## References

1. Alexandrov V.M., Chebakov M.I. Vvedenie v mekhaniku kontaktnykh vzaimodejstvij [Introduction to contact Mechanics]. Rostov-na-Donu: Izd-vo OOO «CVVR», 2007, 114 p.
2. Ajzikovich S.M., Aleksandrov V.M., Belokon' A.V., Krenev L.I., Trubchik I.S. Kontaktnye zadachi teorii uprugosti dlja neodnorodnyh sred [Contact problems of the theory of elasticity for heterogeneous medium]. Moscow: Fizmatlit, 2006, 237 p.
3. Goryacheva I.G. Mekhanika friкционного взаимодействия [Mechanics of friction interaction]. Moscow: Nauka, 2001, 479 p.
4. Mekhanika kontaktynykh vzaimodejstvij [Contact mechanics] / ed. by I.I. Vorovich, V.M. Aleksandrov. Moscow: Fizmatlit, 2001, 672 p.
5. Méchain-Renauda C., Cimetière A. BEM solution of two dimensional unilateral contact problems with friction by a new approach. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2003, vol. 27, pp. 269–277.
6. Rodríguez-Tembleque L., Buroni F.C., Abascal R., Sáez A. 3D frictional contact of anisotropic solids using BEM. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2011, vol. 30, pp. 95–104.
7. Khoei A.R., Nikbakht M. An enriched finite element algorithm for numerical computation of contact friction problems. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2007, vol. 49, pp. 183–199.
8. Li Li Y., Liu G.R., Zhang G.Y. An adaptive NS/ES-FEM approach for 2D contact problems using triangular elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2011, vol. 47, iss. 3, pp. 256–275.

9. González J.A., Park K.C., Felippa C.A., Abascal R. A formulation based on localized Lagrange multipliers for BEM–FEM coupling in contact problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2008, vol. 197, pp. 623–640.
10. Rodríguez-Tembleque L., Abascal R. A FEM–BEM fast methodology for 3D frictional contact problems. *Computers and Structures*, 2010, vol. 88, pp. 924–937.
11. Timoshenko S.P., Goodier J. Teoriya uprugosti [Theory of Elasticity]. Moscow: Nauka, 1979, 560 p.
12. Malinin N. N. Prikladnaja teorija plastichnosti i polzuchesti [The applied theory of plasticity and creep]. Moscow: Mashinostroenie, 1975, 400 p.
13. Adamov A.A. Jeksperimental'noe issledovanie mehanicheskogo povedenija kompozitov na osnove ftoroplasta, rabotajuwih pri bol'shih davlenijah v tonkih slojah [Experimental investigation of mechanical behavior of composites on basis of fluorocarbon polymer, working at large pressure in thin interlayers]. *Materialy VII Rossijskoj nauchno-tehnicheskoy konferencii «Mehanika mikroneodnorodnyh materialov i razrushenie» (Jelektronnyj resurs)*. Ekaterinburg, IMASh UrO RAN, 2012. Jelektronnyj opticheskij disk, vkladka «Publikacii», 7 p.
14. Kamenskih A.A., Trufanov N.A. Chislennyj analiz kontaktnogo naprjazhennogo sostojanja opornyh chastej s sharovym segmentom [The numerical analysis of the contact tension of basic parts with spherical segment]. *Izvestija Samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk*, 2011, vol. 13, no 4(4), pp. 960–965.
15. Kamenskih A.A. Naprjazhennoe sostojanie v kontaktnoj proslojke opornoj chasti s sharovym segmentom [The numerical analysis of the contact tension of basic parts axisymmetric case]. *Vestnik Permskogo naciona'l'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2012, no 1, pp. 31–42.

Получено 27.09.2012

### Об авторах

**Каменских Анна Александровна** (Пермь, Россия) – аспирант, инженер кафедры вычислительной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: anna\_kamen-skikh@mail.ru).

**Труфанов Николай Александрович** (Пермь, Россия) – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: nat@pstu.ru).

#### **About the authors**

**Kamenskih Anna Aleksandrovna** (Perm, Russia) – postgraduate student, engineer, Department of Computational Mathematics and Mechanics, Perm National Research Politechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russia, e-mail: anna\_kamenskih@mail.ru).

**Trufanov Nikolay Aleksandrovich** (Perm, Russia) – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Mechanics, Perm National Research Politechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russia, e-mail: nat@pstu.ru).