УДК 519.86

Т.А. Осечкина, Е.Э. Постаногова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ИНФЛЯЦИИ

На основе уравнения денежного равновесия, определения понятия «инфляция» и определения ВВП для дальнейшего исследования формируется математическая модель инфляции, учитывающая инфляционные ожидания и реакцию субъектов экономической деятельности на их изменение. На основе статистических данных за 2007–2011 гг. предлагается способ оценки инфляционных ожиданий и других параметров модели. Полученная система дифференциальных уравнений решается численно методом Рунге – Кутты, и на основе этих решений строятся графики, отражающие динамическую реакцию индекса цен и инфляции на различные варианты эмиссионной политики государства.

Ключевые слова: математическая модель, инфляция, инфляционные ожидания, валовый выпуск, метод Рунге – Кутты.

T.A. Osechkina, E.E. Postanogova

Perm National Research Politechnic University, Perm, Russia

MATHEMATICAL MODEL OF AN ASSESSMENT OF INFLATION

In work on the basis of the equation of monetary balance, definition of the concept "inflation" and gross domestic product definition for further research the mathematical model of inflation considering inflationary expectations and reaction of subjects of economic activity on their change is formed. Being based on statistical data for 2007–2011, the way of an assessment of inflationary expectations and other parameters of model is offered. The received system of the differential equations decides chislenno a method Runge – Kutta, and on the basis of these decisions the schedules reflecting dynamic reaction of a price index and inflation on various options of emission policy of the state is under construction.

Keywords: mathematical model, inflation, inflationary expectations, national produce, method Runge – Kutta.

Одна из самых острых проблем современного развития экономики – инфляция. Инфляционные процессы занимают важное место в экономической науке, поскольку уровень инфляции и его социально-экономические последствия играют важную роль в оценке экономической безопасности страны. Поэтому возникает необходимость математического описания процесса инфляции с целью его изучения и прогнозирования. В литературе существуют математические модели инфляции, построенные с учетом определенных факторов [1, 2]. В данной работе построена модель с максимальным набором факторов, оказывающих влияние на инфляцию.

Построение модели. Инфляция (от лат. *inflation* – вздутие) – это долговременный процесс снижения покупательной способности денег. Необходимым условием развития инфляции является ускорение роста номинального количества денег или скорости их обращения по сравнению с ростом реального национального дохода. К этому выводу можно прийти на основе анализа уравнения денежного равновесия [3]:

$$M\nu = CP, \tag{1}$$

констатирующего, что количество денег, израсходованных на покупку произведенной продукции (произведение индекса цен P на уровень реального потребления C), равно количеству находящихся в обращении денег M, умноженному на скорость их обращения ν (число оборотов в год).

По определению, инфляция

$$\pi = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt}. \tag{2}$$

По определению ВВП Y можно рассчитать по формуле [4]

$$Y = C + I + G + X, \tag{3}$$

где I – инвестиции в производство; G – государственные расходы; X – чистый экспорт (экспорт – импорт, $X = Ex - \mathrm{Im}$).

Учитывая связь (3) потребления с валовым выпуском Y, из (1) получаем:

$$P = \frac{M\nu}{Y - I - G - X}. \tag{4}$$

Также будем учитывать экспериментально выявленный факт, что уровень совокупной зарплаты W пропорционален ВВП (для промышленно развитых стран $b \approx 2$, для стран с переходной экономикой $b \approx 5$):

$$Y = bW. \tag{5}$$

Пусть масса денег задается эндогенно и меняется с течением времени от начального значения M_0:

$$M(t) = M_0 + \Delta M(t). \tag{6}$$

ΔM является либо ступенчатой функцией (разовая эмиссия), либо растет линейно до некоторого момента (линейная эмиссия). Пусть доля δ эмиссионных денег ΔM направляется в промышленный сектор на увеличение начальной равновесной зарплаты W_0. С учетом (6) стационарные соотношения (4) и (5) примут вид:

$$\begin{cases} P = \dfrac{M_0 + \Delta M}{Y - I - G - X}\nu, \\ Y = b\left(W_0 + \dfrac{\delta \Delta M}{P}\right). \end{cases} \tag{7}$$

В силу того что при изменении равновесия стационарные связи в (7) нарушаются, а затем с течением времени устанавливаются при новых значениях P и Y, можно записать динамические дифференциальные уравнения. При этом скорость отклонения какого-либо параметра пропорциональна его отклонению от равновесного значения. Тогда на основе (7) получим уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = -k_1\left(P - \dfrac{M_0 + \Delta M}{Y - I - G - X}\nu\right), \\ \dfrac{dY}{dt} = -k_2\left(Y - bW_0 - \dfrac{b\delta \Delta M}{P}\right). \end{cases} \tag{8}$$

Здесь коэффициенты k_1 и k_2 – обратные времена реакции системы на установление равновесия по величине параметров P и Y соответственно. В рамках модели коэффициенты будем считать постоянными, но варьируемыми величинами.

Далее перейдем в данной системе к безразмерным переменным. Относительное изменение ВВП: $y = Y / Y_0 - 1$, нормированный индекс цен: $p = P / P_0$, где $Y_0 = bW_0$ и $P_0 = M_0\nu / (Y_0 - I_0 - G_0 - X_0)$ – начальные значения ВВП и индекса цен. Пусть $i = I / I_0$, $g = G / G_0$, $x = X / X_0$, где I_0, G_0, X_0 – начальные значения соответствующих переменных.

Тогда уравнения (8) примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -k_1 \left(p - \dfrac{1+m}{\dfrac{1+y}{1-\dfrac{I_0+G_0+X_0}{Y_0}} + \dfrac{i}{1-\dfrac{Y_0-G_0-X_0}{I_0}} + \dfrac{g}{1-\dfrac{Y_0-I_0-X_0}{G_0}} + \dfrac{x}{1-\dfrac{Y_0-I_0-G_0}{X_0}}} \right), \\ \dfrac{dy}{dt} = -k_2 \left(y - \dfrac{dm}{p} \right), \end{cases} \quad (9)$$

где $m(t)$ – безразмерная функция эмиссии, $m(t) = \Delta M(t) / M_0$; d – безразмерный параметр эластичности отдачи по заработной плате, $d = \delta M_0 / P_0 W_0$. По оценкам [3] d имеет примерно ту же величину, что и коэффициент отдачи по труду в производственных функциях: в развивающихся странах $d \approx 0{,}5$, а в промышленно развитых $d \approx 0{,}7$.

Запишем (9) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -k_1 \left(p - \dfrac{1+m}{\alpha(1+y) + \beta i + \gamma g + \varphi x} \right); \\ \dfrac{dy}{dt} = -k_2 \left(y - \dfrac{dm}{p} \right), \end{cases} \quad (10)$$

$$\alpha = \left(1 - \frac{I_0+G_0+X_0}{Y_0} \right)^{-1}, \beta = \left(1 - \frac{Y_0-G_0-X_0}{I_0} \right)^{-1},$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{Y_0-I_0-X_0}{G_0} \right)^{-1}, \varphi = \left(1 - \frac{Y_0-I_0-G_0}{X_0} \right)^{-1}. \quad (11)$$

Начальные условия для (10) фиксированы:

$$p(0) = 1, y(0) = 0. \quad (12)$$

Влияние инфляционных ожиданий на макроэкономическую ситуацию было отмечено исследователями еще в 70-х гг. прошлого века. Впервые влияние ожиданий на широко известную кривую Филлипса (и, как следствие, на уровень безработицы и инфляции) было описано Робертом Гордоном [5]. Впоследствии эта тема была широко развита Эдмундом Фелпсом [6], Милтоном Фридманом и другими известными экономистами.

В их исследованиях было отмечено, что инфляционные ожидания имеют существенное влияние на уровень зарплат (благодаря активности рабочих, профсоюзов и пр.), в свою очередь влияя на уровень цен и инфляцию. Этот эффект был назван Джеймсом Тобином «инфляционной инерцией» [7]. Итак, в силу того что рабочие постоянно пытаются увеличивать свою зарплату при росте цен, можно дополнить уравнение для заработной платы W. Если в базовой модели инфляции

$$W = W_0 + \Delta W = W_0 + \frac{\delta \Delta M}{P}, \tag{13}$$

то с учетом инфляционных ожиданий

$$W = W_0 + \frac{\delta \Delta M}{P} + \lambda W \tilde{\pi}, \tag{14}$$

где $\tilde{\pi}$ – инфляционные ожидания, а $\lambda < 1$. Коэффициент λ отражает эффективность действий профсоюзов по повышению зарплаты в соответствии с ожидаемым уровнем инфляции. Отсюда

$$W = \frac{1}{1 - \lambda \tilde{\pi}} \left(W_0 + \frac{\delta \Delta M}{P} \right). \tag{15}$$

Учитывая связь совокупной зарплаты с ВВП (5), получим новое статическое уравнение для Y:

$$Y = \frac{b}{1 - \lambda \tilde{\pi}} \left(W_0 + \frac{\delta \Delta M}{P} \right), \tag{16}$$

или в динамической форме:

$$\frac{dY}{dt} = -k_2 \left(Y - \frac{b}{1 - \lambda \tilde{\pi}} \left(W_0 + \frac{\delta \Delta M}{P} \right) \right). \tag{17}$$

Обезразмерим (16) и получим уравнение

$$\frac{dy}{dt} = -k_2 \left(y + 1 - \frac{1}{1 - \lambda \tilde{\pi}} \left(\frac{md}{p} + 1 \right) \right). \tag{18}$$

Инфляционные ожидания (особенно в условиях экономической нестабильности, часто возникающей в странах с развивающейся экономикой), очевидно, влияют не только на уровень зарплат, но и на совокупный спрос. Действительно, в нашей стране потребители нередко предпочитают заранее приобретать продукты, ожидая праздничного повышения цен. Аналогичная ситуация часто возникает, например, на рынке стройматериалов или на рынке валюты, что порой приводит к сильным колебаниям курса, которые, в свою очередь, сами усиливают инфляцию.

Для оценки влияния ожиданий на совокупный спрос рассмотрим несколько ситуаций.

Пусть в течение достаточно долгого срока инфляция и инфляционные ожидания стабильно держатся на одном уровне. В этом случае некоторая часть потребителей, предпочитающая купить товар впрок, совершает покупку заранее. Но поскольку данная ситуация продолжается достаточно долго, то в этот же момент точно такая же часть потребителей не будет совершать покупки, так как уже совершила их ранее, основываясь на своих ожиданиях роста цен. Этот пример наглядно показывает, что при стабильной инфляции уровень потребления остается одинаковым.

Теперь представим, что цены начали расти быстрее, т.е. уровень инфляции увеличился. При увеличении инфляционных ожиданий «дополнительные» покупки совершает больше людей, и совокупный спрос увеличивается. Но как только инфляция стабилизируется на новом уровне, возникнет ситуация, аналогичная предыдущей, и уровень спроса вернется в свое «нормальное» состояние. Если же инфляция будет расти достаточно долго, то при этом все больше потребителей будут покупать заранее и спрос вырастет на некоторую величину. При этом значение этой величины будет напрямую зависеть от скорости роста инфляционных ожиданий, т.е. от их второй производной по времени.

Изменим формулу (3) в соответствии с новыми предположениями:

$$C = (Y - I - G - X)(\tilde{\pi}'\mu + 1), \tag{19}$$

где μ – коэффициент, отвечающий за силу реакции потребителей на изменение темпов роста инфляции. В этом случае уравнение для индекса цен примет вид

$$P = \frac{M_0 + \Delta M}{(Y - I - G - X)(\tilde{\pi}'\mu + 1)}\nu. \tag{20}$$

В динамической форме

$$\frac{dP}{dt} = -k_1\left(P - \frac{M_0 + \Delta M}{(Y - I - G - X)(\tilde{\pi}'\mu + 1)}\nu\right). \tag{21}$$

Перейдем к безразмерным переменным:

$$\frac{dp}{dt} = -k_1\left(p - \frac{1+m}{(\alpha(1+y) + \beta i + \gamma g + \varphi x)(\tilde{\pi}'\mu + 1)}\right). \tag{22}$$

Таким образом, получим следующую динамическую модель инфляции в безразмерной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -k_1\left(p - \dfrac{1+m}{(\alpha(1+y) + \beta i + \gamma g + \varphi x)(\tilde{\pi}'\mu + 1)}\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = -k_2\left(y + 1 - \dfrac{1}{1 - \lambda\tilde{\pi}}\left(\dfrac{md}{p} + 1\right)\right). \end{cases} \tag{23}$$

Оценка инфляционных ожиданий. Теперь для полноты описания модели осталось выбрать подходящую функцию $\tilde{\pi}(t)$, описывающую изменение инфляционных ожиданий с течением времени. Если не считать эту функцию константой, то очевидно, что она должна быть связана с функцией реальной инфляции.

Имеет смысл в первую очередь рассмотреть вариант «рациональных ожиданий», при котором инфляционные ожидания равны фактической инфляции [7]:

$$\tilde{\pi} = \pi = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = \frac{1}{p}\frac{dp}{dt}. \tag{24}$$

Во-вторых, основываясь на статистических значениях [8] индекса потребительских цен (ИПЦ) в Российской Федерации за 2009–2011 гг. (табл. 1), построим уравнение полиномиальной регрессии $p(t)$ (рисунок), а затем найдем зависимость $\tilde{\pi}(t)$.

Таблица 1

Индекс потребительских цен (ИПЦ) за 2009–2011 гг., %

Месяц	Годы			Среднее значение
	2009	2010	2011	
Январь	102,37	101,64	102,37	102,13
Февраль	101,65	100,86	100,78	101,10
Март	101,31	100,63	100,62	100,85
Апрель	100,69	100,29	100,43	100,47
Май	100,57	100,50	100,48	100,52
Июнь	100,60	100,39	100,23	100,41
Июль	100,63	100,36	99,99	100,33
Август	100,00	100,55	99,76	100,10
Сентябрь	99,97	100,84	99,96	100,26
Октябрь	100,00	100,50	100,48	100,33
Ноябрь	100,29	100,81	100,42	100,51
Декабрь	100,41	101,08	100,44	100,64

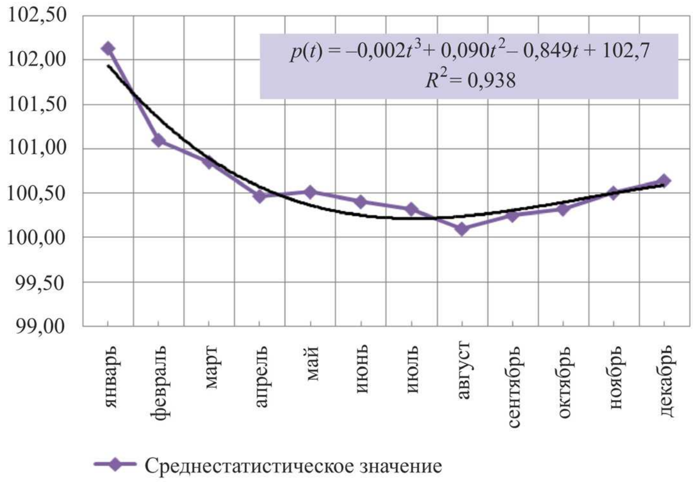

Рис. Среднестатистическое значение ИПЦ за 2009–2011 гг.
и уравнение тренда (вертикальная ось – индекс потребительских цен)

Найдем среднее значение ИПЦ за 2009–2011 гг. и, используя эконометрические методы, построим уравнение тренда:

$$p(t) = -0{,}002t^3 + 0{,}090t^2 - 0{,}849t + 102{,}7. \qquad (25)$$

Тогда по определению

$$\tilde{\pi} = \frac{1}{p}\frac{dp(t)}{dt} = \frac{-0{,}006t^2 + 0{,}18t - 0{,}849}{-0{,}002t^3 + 0{,}090t^2 - 0{,}849t + 102{,}7}. \qquad (26)$$

Статистическая оценка параметров системы. Дифференциальные уравнения (23) в общем случае аналитически не решаются, поэтому мы будем исследовать их численно.

Для численного решения системы дифференциальных уравнений (23) методом Рунге – Кутты и дальнейшего построения графиков, отражающих динамическую реакцию индекса цен и инфляции на различные варианты эмиссионной политики государства, необходимо также найти коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ и параметры i, g, x. Для этого используем статистические данные [7] по ВВП, государственным расходам, инвестициям и чистому экспорту за 2007–2011 гг. (табл. 2).

Таблица 2

ВВП, государственные расходы, инвестиции и чистый экспорт Российской Федерации за 2007–2011 гг., млрд рублей

Показатель	Годы				
	2007	2008	2009	2010	2011
ВВП, **Y**	33247,51	41276,85	38807,22	45172,75	54585,62
Государственные расходы, **G**	5982,17	7560,87	9662,15	10094,06	10935,66
Инвестиции, **I**	5281,50	6794,90	6117,40	6712,10	7837,50
Чистый экспорт, **X**	2750,25	4567,21	2774,51	3732,88	5223,90

За Y_0, I_0, G_0 и X_0 примем статистические данные за 2011 г. Тогда в соответствии с (11) получим:

$$\alpha = \left(1 - \frac{I_0 + G_0 + X_0}{Y_0}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{7837{,}50 + 10935{,}66 + 5223{,}90}{54585{,}62}\right)^{-1} = 1{,}785;$$

$$\beta = -0{,}256; \gamma = -0{,}358; \varphi = -0{,}171.$$

Поскольку $i = I / I_0$, то для численного решения системы необходимо провести оценку I. Будем рассчитывать I следующим образом:

$$I = I_0 + k \cdot I_0 = (1 + k) I_0, \tag{27}$$

где

$$k = \frac{1}{4} \sum \left(\frac{I_{2008} - I_{2007}}{I_{2007}} + \frac{I_{2009} - I_{2008}}{I_{2008}} + \frac{I_{2010} - I_{2009}}{I_{2009}} + \frac{I_{2011} - I_{2010}}{I_{2010}} \right) = 0{,}113. \tag{28}$$

Формула (28) позволяет оценить k – среднее изменение объема инвестиций в следующем году по отношению к предыдущему году за последние 5 лет.

Получаем:

$$i = I / I_0 = \frac{(1+k)I_0}{I_0} = 1 + k = 1{,}113. \quad (29)$$

Аналогичным образом рассчитаем и найдем значения g = 1,167 и x = 0,253.

Исследование модели. В дальнейшем для всех случаев примем d = 0,5.

В первом случае пусть $\mu = 0$. Это случай предполагает отсутствие изменений потребительского спроса в связи с изменениями инфляции. В этом случае первое уравнение модели (23) примет вид, аналогичный (10). При этом сначала имеет место плавное повышение цен во всех случаях, а затем их снижение. Это вызвано тем, что при возникновении дисбаланса и росте цен рабочие (профсоюзы) сразу начинают требовать повышения зарплаты, которое, в свою очередь, позитивно влияет на уровень производства и позволяет сгладить последствия эмиссии.

Во втором случае пусть $\mu = 0{,}8$. В случае присутствия инфляционных ожиданий цены растут и падают быстрее и гораздо менее плавно. Резкий рост цен вызван «инфляционной инерцией».

Таким образом, предложенная модель демонстрирует эффект «гонки за зарплатой» и эффект «инфляционной инерции», а выражение инфляционных ожиданий через тренд, построенный на основании средних значений инфляции за предыдущие годы, не нарушает адекватности модели.

В заключение отметим, что возможны альтернативные варианты модели с другой функцией инфляционных ожиданий или в контексте более сложной эмиссионной политики, выраженной функцией $m(t)$.

Библиографический список

1. Уотшем Т.Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 527 с.

2. Криничанский К.В. Математика финансового менеджмента. – М.: Дело и Сервиз, 2006. – 256 с.

3. Накоряков В.Е., Гасенко В.Г. Кинетическая модель инфляции // Экономика и математические методы. – 2004. – Т. 40, № 1. – С. 129–134.

4. Матвеева Т.Ю. Введение в макроэкономику. – М.: Издательский дом ГУ-ВШЭ, 2007. – 511 с.

5. Robert J.G. Macroeconomics: International Version. – Pearson, 2012. – 672 p.

6. Phelps E.S. Phillips Curves, Expectations of Inflation and Optimal Employment over Time // Economica. – 1967. – Vol. 34, no. 3. – P. 254–281.

7. Мэнкью Н. Г. Макроэкономика. – М.: Изд-во МГУ, 1994. – 736 с.

8. Табачников Я.А. Кинетическая модель инфляции, учитывающая инфляционные ожидания // Прикладна статистика Актуарна та фінансова математика. – 2008. – № 1–2. – С. 92–100.

References

1. Uotshem T.Dzh., Parramou K. Kolichestvennye metody v finansah [Quantitative Methods in Finance]. Moscow: JuNITI, 1999, 527 p.

2. Krinichanskij K.V. Matematika finansovogo menedzhmenta: ucheb. posob. [Mathemayics of Financial Management: a training manual]. Moscow: Delo i Serviz, 2006, 256 p.

3. Nakorjakov V.E., Gasenko V.G.: Kineticheskaja model' infljacii [Kinetic model of inflation]. *Jekonomika i matematicheskie metody*, 2004, vol. 40, no.1, pp. 129–134.

4. Matveeva T.Ju. Vvedenie v makrojekonomiku [Introduction to macroeconomics]. Moscow: Gosudarstvennyj universitet – Vysshaja Shkola Jekonomiki, 2007, 511 p.

5. Robert J.G. Macroeconomics: International Version. Pearson, 2012. – 672 p.

6. Phelps E.S. Phillips Curves, Expectations of Inflation and Optimal Employment over Time. *Economica*, 1967, vol. 34, no. 3, pp. 254–281.

7. Mjenk'ju N.G. Makrojekonomika [Macroeconomics]. Moscow: Moskovskij gosudarstvennyj universitet, 1994, 736 p.

8. Tabachnikov Ja.A. Kineticheskaja model' infljacii, uchityvajuwaja infljacionnye ozhidanija [Kinetic model of inflation, taking into account the inflation expectations]. *Prikladna statistika. Aktuarna ta finansova matematika*, 2008, no. 1(2), pp. 92–100.

Получено 27.09.2012

Сведения об авторах

Осечкина Татьяна Алексеевна (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: litvinova90-210@mail.ru).

Постаногова Елена Эдуардовна (Пермь, Россия) – студентка кафедры прикладной математики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., д. 29, e-mail: lena22.89@list.ru).

About the authors

Osechkina Tatyana Alekseevna (Perm, Russia) – Ph.D. of Physical and Mathematic Sciences, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russia, e-mail: litvinova90-210@mail.ru).

Postanogova Elena Eduardovna (Perm, Russia) – student, Department of Applied Mathematics, Perm National Research Politechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russia, e-mail: lena22.89@list.ru).