УДК 539.3

С.В. Жижерин, В.В. Стружанов

Институт машиноведения УрО РАН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ОДНОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Abstract

We consider some criteria of stability of inelastic mechanical systems' deformation. These criteria have been approved on example of one-dimensional rod system containing an element with descending branch of strain diagram.

Одной из возможных причин потери устойчивости деформируемых механических систем является переход материала элементов системы на стадию деформационного разупрочнения, когда материал обладает внутренней неустойчивостью. Суть потери устойчивости деформируемой системы состоит в том, что малое приращение внешней нагрузки приводит к конечному или бесконечному изменению параметров состояния системы, что в свою очередь ведет к резкому падению ее несущей способности или разрушению. В данной работе рассмотрено несколько разных критериев устойчивости деформируемых систем. Эти критерии апробируются на простой стержневой модели, материал которой обладает свойством разупрочнения. Приведены также итерационные процедуры расчета деформированного состояния и установлено, что расходимость процесса вычислений связана с потерей устойчивости системы.

Стержневая система

Рассмотрим стержневую систему (рис.1), состоящую из упругого стержня 2 жесткостью c и соединенного с ним неупругого стержня 1, левый конец которого закреплен.

Будем нагружать систему, задав перемещение u правого конца стержня 2 (жесткое нагружение) или же задав растягивающее усилие p (мягкое нагружение). Нагружение осуществляем квазистатически, то есть параметр управления u или p монотонно и равномерно возрастает с чрезвычайно малой скоростью.

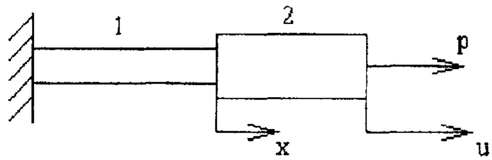

Рис.1. Стержневая система

Свойства материала стержня 1

Полагаем, что свойства материала стержня 1 определены на полной диаграмме деформирования в координатах удлинение стержня x – растягивающее усилие q

(рис.2), обладающей восходящей и ниспадающей ветвями. Наклон диаграммы деформирования характеризует (непрерывная) функция $\lambda^p(x) = {dq}/{dx}$, имеющая смысл касательного модуля. Максимальное значение функция $q(x)$ принимает при $x = x_c$. Тогда $\lambda^p(x) > 0$ при $x < x_c$, $\lambda^p(x) < 0$, если $x > x_c$; $\lambda^p(0) = \lambda$.

В зависимости от процессов, происходящих в материале стержня при деформировании, возможны три варианта разгрузки [1]. Первый – без остаточного удлинения с секущим модулем $\lambda^s = q / x$ (прямая 1, рис.2), второй – с образованием остаточного удлинения и модулем разгрузки, равным λ (прямая 3), третий – также с образованием остаточного удлинения и модулем разгрузки $\lambda^u < \lambda$ (прямая 2).

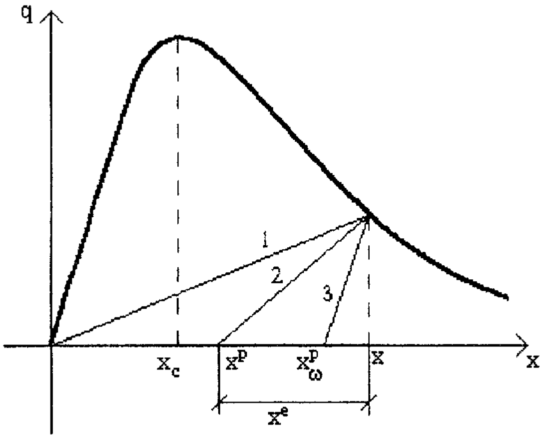

Рис.2. Кривые разгрузки

Аналогично работам [1,2] находим, что

$$q = \lambda(1-\omega)(x - x^p), \tag{1}$$

где ω – параметр, характеризующий поврежденность материала стержня микродефектами, x^p – пластическая составляющая удлинения. Далее [1,2]

$$(x - x^p)\frac{d\omega}{dx} + \omega(1 - \frac{dx^p}{dx}) = 1 - \frac{\lambda^p}{\lambda} - \frac{dx^p}{dx}, \tag{2}$$

(начальные условия $\omega(0) = 0$, $x^p(0) = 0$, $\lambda^p(0) = \lambda$),

$$dx^p = (1 - \frac{\lambda^p}{\lambda})dx, \tag{3}$$

$(\omega = 0)$,

$$x\frac{d\omega}{dx} + \omega = 1 - \frac{\lambda^p}{\lambda}, \tag{4}$$

$(x^p = 0)$.

Уравнение (2) определяет кинетику совместного формирования поврежденности и пластического удлинения, уравнение (3) – кинетику развития пластического удлинения при отсутствии поврежденности, а уравнение (4) – кинетику поврежденности при отсутствии пластического удлинения. Непосредственно проверяется, что значение

$$\omega = 1 - \frac{\lambda^u}{\lambda} = 1 - \frac{\lambda^u (x - x^p)}{\lambda(x - x^p)} = 1 - \frac{q}{\lambda(x - x^p)}$$

является общим решением дифференциального уравнения (2), а

$$\omega = 1 - \frac{\lambda^s}{\lambda} = 1 - \frac{\lambda^s x}{\lambda x} = 1 - \frac{q}{\lambda x}$$

- общим решением уравнения (4).

Вернемся к уравнению (1) и запишем его в виде

$$q = \lambda[x - x^p - \omega(x - x^p)] = \lambda[x - (x^p + x^e_\omega)] = \lambda(x - x^p_\omega), \tag{5}$$

где x^p_ω – величина полной псевдопластической деформации, определяемой разгрузкой с модулем λ. Кинетика ее формирования зависит от изменения x^p и ω, а с формальной точки зрения определяется уравнением (3).

Уравнения равновесия

Силы, действующие на систему, консервативны, так как связь между силами и перемещениями при активной (без разгрузки) неупругой деформации такая же, как для нелинейно упругого тела [3]. Поэтому уравнения равновесия данной системы можно получить из принципа стационарности потенциальной энергии. При жестком нагружении потенциальная энергия системы Π складывается из потенциальной энергии первого стержня $\Pi_1 = \int_0^x q(\xi)d\xi$ и потенциальной энергии упругого стержня $\Pi_2 = c(u-x)^2/2$. Имеем один параметр состояния x и получаем одно уравнение равновесия $\frac{d\Pi}{dx} = 0$ или

$$q(x) - c(u - x) = 0. \tag{6}$$

При мягком нагружении при вычислении потенциальной энергии системы нужно, кроме того, учесть работу усилия p, взятую с обратным знаком: $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 - \int_0^u p d\varsigma$. В этом случае система имеет два параметра состояния u, x, поэтому к уравнению (6) добавляется уравнение $\frac{d\Pi}{du} = 0$ или

$$c(u - x) - p = 0. \tag{7}$$

Исследование устойчивости системы с использованием матрицы Гессе

Сначала исследуем устойчивость процесса растяжения, используя аппарат, изложенный в [4]. Критические точки функции Π в случае жесткого нагружения определяются уравнением (6), а в случае мягкого нагружения – системой уравнений (6), (7). Для определения вырожденных критических точек, где происходит смена устойчивых положений равновесия на неустойчивые, сюда следует добавить уравнение, получающееся приравниванием нулю детерминанта матрицы Гессе функции Π. Имеем в случае жесткого нагружения

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = \lambda^p + c = 0.$$

В случае мягкого нагружения компоненты матрицы Гессе равны:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = \lambda^p + c, \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial u} = -c, \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u^2} = c,$$

откуда находим

$$\det\left|\partial^2 \Pi \big/ \partial x \partial u\right| = (\lambda^p + c)c - c^2 = c\lambda^p = 0.$$

Получаем, что при квазистатическом нагружении системы потеря устойчивости происходит в случае жесткого нагружения при $\lambda^p = -c$, а при мягком нагружении при $\lambda^p = 0$.

Вариант разгрузки с неизменным модулем

Рассмотрим случай, когда связь между усилием и удлинением стержня 1 определяется формальным образом уравнением (5). Кроме того, излагаемая ниже методика применима и для материала, в котором при деформировании возникает только пластическая деформация ($\omega = 0$).

Основная и корректирующая задачи. Для случая жесткого нагружения исходное уравнение (6) с учетом (5) разбиваем на два уравнения, а именно, основное

$$\lambda y - c(u - y) = 0$$

и корректирующее

$$\lambda(v - x_\omega^p) + cv = 0.$$

Первое уравнение – это уравнение равновесия чисто упругой системы. Его решение $y = cu \big/ (\lambda + c)$. Второе – это уравнение равновесия также упругой системы, у которой правый конец защемлен ($u = 0$), а стержень 1 обладает остаточным удлинением x_ω^p. Его решение $v = \lambda x_\omega^p \big/ (\lambda + c)$, или $v = \frac{1}{\lambda} Q_1 \lambda x_\omega^p$, где $Q_1 = \lambda \big/ (\lambda + c)$. Непосредственной подстановкой определяем, что $x = v + y$ является решением исходной задачи.

В случае мягкого нагружения исходную систему (6), (7) с учетом (5) разбиваем на две системы, а именно, основную

$$\lambda\varphi - c(u_1 - \varphi) = 0, \quad c(u_1 - \varphi) - p = 0$$

и корректирующую

$$\lambda(\psi - x_\omega^p) - c(u_2 - \psi) = 0, \quad c(u_2 - \psi) = 0.$$

Первая система – это уравнения равновесия чисто упругой задачи. Ее решение $\varphi = p \big/ \lambda$, $u_1 = p\frac{\lambda + c}{\lambda c}$. Вторая – это уравнения равновесия упругой системы, у которой правый конец свободен от усилий ($p = 0$), а стержень 1 имеет остаточное удлинение x_ω^p. Ее решение $\psi = x_\omega^p, u_2 = \psi$, или $\psi = \frac{1}{\lambda} P_1 \lambda x_\omega^p$, где $P_1 = 1$. Непосредственной подстановкой определяем, что $x = \varphi + \psi, u = u_1 + u_2$ являются решением исходной системы.

Stru-критерий. Дадим определение устойчивости в смысле Ляпунова.

Определение 1. Положение равновесия системы при жестком нагружении является устойчивым, если для всякого $\delta > 0$ можно указать $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ такие, что из неравенства $|du| < \delta$ следуют неравенства $|dx| < \varepsilon_1, \left|dx_\omega^p\right| < \varepsilon_2$, где dx, dx_ω^p связаны друг с другом равенством (3) и с du уравнением равновесия.

Запишем уравнение равновесия (6) в приращениях. Используя соотношение (5), имеем

$$\lambda(dx - dx_{\omega}^{p}) - c(du - dx) = 0\,. \tag{8}$$

Решением уравнения (8) является сумма решений основной и корректирующей задач:

$$dx = dy + dv = \frac{1}{\lambda} Q_1 c\, du + \frac{1}{\lambda} Q_1 \lambda\, dx_{\omega}^{p}. \tag{9}$$

Подставляя сюда выражение для dx_{ω}^{p} из (3) и производя необходимые преобразования, получаем

$$(Struh)dx = \frac{1}{\lambda} Q_1 c\, du,$$

или $dx = \frac{1}{\lambda} Q_1 c\, du \Big/ Struh$, где $Struh = 1 - \frac{1}{\lambda} Q_1 \lambda + \frac{1}{\lambda} Q_1 \lambda^{p}$.

Согласно определению 1 потеря устойчивости произойдет тогда, когда значение $Struh = 0$. Отсюда, $\lambda^{p} = \lambda - Q_1^{-1}\lambda$, или $\lambda^{p} = -c$.

Обратимся теперь к случаю мягкого нагружения.

Определение 2. Положение равновесия системы при мягком нагружении является устойчивым, если для всякого $\delta > 0$ можно указать $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 > 0$ такие, что из неравенства $|dp| < \delta$ следуют неравенства $|dx| < \varepsilon_1, \left|dx_{\omega}^{p}\right| < \varepsilon_2, |du| < \varepsilon_3$, где dx, dx_{ω}^{p} связаны друг с другом равенством (3) и с du, dp уравнениями равновесия.

Запишем уравнения равновесия (6), (7) с учетом (5) в приращениях

$$\lambda(dx - dx_{\omega}^{p}) - c(du - dx) = 0, \quad c(du - dx) - dp = 0. \tag{10}$$

Решением уравнений (10) является

$$dx = d\varphi + d\psi = \frac{1}{\lambda} P_1 p + \frac{1}{\lambda} P_1 \lambda\, dx_{\omega}^{p}. \tag{11}$$

Подставляя сюда выражение для dx_{ω}^{p} из (3), получаем

$$(Strus)dx = \frac{1}{\lambda} P_1 p,$$

или $dx = \frac{1}{\lambda} P_1 p \Big/ Strus$, где $Strus = 1 - \frac{1}{\lambda} P_1 \lambda + \frac{1}{\lambda} P_1 \lambda^{p}$.

Согласно определению 2 потеря устойчивости произойдет тогда, когда значение $Strus = 0$. Отсюда, $\lambda^{p} = \lambda - P_1^{-1}\lambda$, или $\lambda^{p} = 0$.

Полученные результаты совпадают с результатами исследования устойчивости с помощью матрицы Гессе.

***R*-метод**. Следуя работе [5], введем функционал

$$\rho = \lambda\, dx\, dx - \lambda\, dx_{\omega}^{p}\, dx_{\omega}^{p}, \tag{12}$$

где dx_{ω}^{p} и dx связаны условием (3). Слагаемые в выражении (12) представляют собой соответственно энергию приращения полных и пластических удлинений стержня 1. Показано [5], что условие $\rho > 0$ равносильно выполнению постулата устойчивости неупругого материала Друккера.

Составим *R*-сумму системы, добавляя к (12) энергию приращения полных удлинений стержня 2 (упругого):

$$R = \lambda\, dx\, dx - \lambda\, dx_{\omega}^{p}\, dx_{\omega}^{p} + c(du - dx)(du - dx). \tag{13}$$

В работе [5] показано, что условие $R = \infty$ является необходимым и достаточным условием неустойчивости процесса деформирования системы. Вычислим R-сумму в случае жесткого нагружения. Для этого выразим dx и dx_{ω}^{p} через параметр управления du, используя условие (3) и решение исходного уравнения $dx = dy + dv$. После необходимых преобразований получаем

$$R = R_u = \frac{Bc^2 du^2}{(\lambda^p + c)^2},$$

где $B = [2\lambda^p - (\lambda^p)^2 / \lambda + (\lambda^p)^2 / c]$.

В случае мягкого нагружения, выражая dx_{ω}^{p} через dx в силу (3) и затем dx, du через параметр управления dp, используя равенства $dx = d\varphi + d\psi$, $du = du_1 + du_2$, находим

$$R = R_p = dp^2\, B \big/ (\lambda^p)^2.$$

Видно, что условие $R = \infty$ выполняется тогда и только тогда, когда $\lambda^p = -c$ (в случае жесткого нагружения) или $\lambda^p = 0$ (при мягком нагружении), т.е. тогда, когда имеет место условие неустойчивости в смысле Ляпунова.

Итерационная процедура. Рассмотрим сначала жесткое нагружение. Пусть в некотором положении равновесия имеем u_0, x_0, λ_0^p. Возмутим его, увеличив u_0 на Δu. Из уравнения основной задачи находим dy и, используя формулу (3), где $dx = dy$, величину $dx_{1\omega}^{p}$. Затем из решения корректирующей задачи, где $x_{\omega}^{p} = dx_{1\omega}^{p}$, вычисляем dv_1. Снова из уравнения (3), где уже $dx = dv_1$, находим величину $dx_{2\omega}^{p}$ и из уравнения корректирующей задачи вычисляем dv_2. И так далее. В результате получаем ряд

$$x = x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} Q_1(\lambda - \lambda^p)\right)^n dy.$$

Этот ряд сходится, если $\lambda^p > -c$, так как в этом случае выполняется условие принципа сжимающих отображений $\left(\frac{1}{\lambda} Q_1(\lambda - \lambda^p) < 1\right)$. Начало расходимости определяется равенством $\lambda^p = -c$. Как показано выше, это - условие потери устойчивости.

В случае мягкого нагружения, применяя аналогичную итерационную процедуру, получаем

$$x = x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} P_1(\lambda - \lambda^p)\right)^n d\varphi.$$

Ряд сходится при $\lambda^p > 0$ $\left(\frac{1}{\lambda} P_1(\lambda - \lambda^p) < 1\right)$. Начало расходимости определяет условие $\lambda^p = 0$, что отвечает потере устойчивости системы.

Разгрузка без остаточных деформаций

***Stru*-критерий**. Подставляя в выражения (9), (11) значение $x_\omega^p = x\omega$ и используя уравнение (4), находим, что $Struh = 0$ и $Strus = 0$, когда соответственно $\lambda^p = -c$ и $\lambda^p = 0$. Критическое значение поврежденности при этом $\omega_* = 1 - q(x_*)/(\lambda x_*)$, где x_* – определяется из уравнения $\lambda^p(x_*) = -c$, либо $\lambda^p(x_*) = 0$.

***R*-критерий**. Подставляя в выражение (13) значение $x_\omega^p = x\omega$ и используя уравнение (4), находим, что $R_u = \infty$ и $R_p = \infty$, когда соответственно $\lambda^p = -c$, $\lambda^p = 0$.

Итерационная процедура. Рассмотрим сначала жесткое нагружение. Имеем уравнение равновесия

$$\lambda(1-\omega)x - c(u-x) = 0.$$

Перепишем его в виде

$$x = f(x) = \frac{cu}{\lambda(1-\omega(x)) + c}. \tag{14}$$

Для нахождения решения уравнения (14) применим метод простой итерации [2]. Пусть u задано и известно некоторое начальное приближение к решению (14) $x = x_0, \omega(x_0) = \omega_0, \lambda^p(x_0) = \lambda_0^p$. Тогда, подставляя в (14) вместо $\omega(x)$ значение ω_0, находим следующее приближение x_1, и используя (4), где $\lambda^p = \lambda_0^p$, определяем ω_1 и кроме того, $\lambda_1^p = \lambda^p(x_1)$.. Процесс повторяется, пока не будет достигнута необходимая точность.

Для сходимости этой процедуры достаточно, чтобы выполнялось условие $\left|\frac{df(\varsigma)}{dx}\right| < 1$. Вычисляя производную $\frac{df}{dx}$ в силу уравнения равновесия и условия (4), получаем $\frac{df(\varsigma)}{dx} = \frac{\lambda(1-\omega) - \lambda^p}{\lambda(1-\omega) + c}$. Данное выражение неотрицательно, если $\lambda^p \le \lambda(1-\omega)$, что обычно выполняется. Поэтому условие сходимости $\left|\frac{df(\varsigma)}{dx}\right| < 1$ равносильно ранее полученному условию устойчивости $\lambda^p > -c$. При $\lambda^p = -c$ процесс начинает расходиться.

Теперь рассмотрим мягкое нагружение. В этом случае задается растягивающее усилие p, неизвестными являются x, u. Уравнения равновесия можно переписать в виде

$$\begin{cases} x = \dfrac{p}{\lambda(1-\omega(x))} = g(x). \\ u = x + p/c. \end{cases}$$

Здесь первое уравнение системы не зависит от второго. Поэтому к первому уравнению применяем итерационную процедуру, подобную описанной для жесткого нагружения, находим x, после чего уже без итераций определяем из второго уравнения системы u.

Определим условие сходимости итераций. Вычисляя производную $\frac{dg}{dx}$ в силу первого уравнения равновесия и условия (4), находим $\frac{dg}{dx}(\varsigma) = 1 - \frac{\lambda^p(\varsigma)}{\lambda(1-\omega)}$, где ς –

значение x, отвечающее положению равновесия. Отсюда имеем сходимость итераций к положению равновесия, если $\lambda^p(\varsigma) > 0$. При $\lambda^p = 0$ процесс начинает расходиться.

Общий случай разгрузки

***Stru*-критерий**. Подставляя в выражения (9), (11) значение $x_\omega^p = x^p - \omega x^p + \omega x$ и используя уравнение (2), находим, что $Struh = 0$ и $Strus = 0$, когда соответственно $\lambda^p = -c$ и $\lambda^p = 0$. Критическое значение поврежденности при этом $\omega_* = 1 - \lambda^u(x_*)/\lambda$, а $dx_*^p = x_* - q(x_*)/\lambda^u(x_*)$, где x_* определяется из уравнения $\lambda^p(x_*) = -c$, либо $\lambda^p(x_*) = 0$.

***R*-критерий**. Подставляя в выражение (13) значение $x_\omega^p = x^p - \omega x^p - \omega x$ и используя уравнение (2), находим, что $R_u = \infty$ и $R_p = \infty$, когда соответственно $\lambda^p = -c$, $\lambda^p = 0$.

Итерационная процедура. Пусть теперь модуль разгрузки первого стержня $\lambda^u = \lambda(1 - \omega)$, но при разгрузке образуется остаточное удлинение x^p (прямая 2, рис.2). В этом случае при жестком нагружении можно искать положение равновесия, применяя итерационную формулу [2],

$$x_n = f_1(x_{n-1}) = \frac{cu + \lambda(1 - \omega(x_{n-1}))x^p(x_{n-1})}{\lambda(1 - \omega(x_{n-1})) + c},$$

где ω, x^p, x связаны между собой уравнением (2). Здесь надо отметить, что уравнения (2) недостаточно для однозначного определения x^p, ω как функций от x. Поэтому в качестве дополнительного условия мы задаем, например, модуль разгрузки $\lambda^u(x)$.

Для исследования сходимости итераций найдем производную $\dfrac{df_1}{dx}$ в силу уравнения равновесия и условия (2). Получаем $\dfrac{df_1}{dx} = \dfrac{\lambda(1-\omega) - \lambda^p}{\lambda(1-\omega) + c}$. Отсюда условие сходимости итерационного процесса $\left|\dfrac{df_1}{dx}\right| < 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $\lambda^p > -c$.

При мягком нагружении из уравнений равновесия получаем следующую итерационную схему [2]:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{p}{\lambda(1 - \omega(x_{n-1}))} + x^p(x_{n-1}) = g_1(x_{n-1}), \\ u = x + p/c. \end{cases}$$

Вычисляя $\dfrac{dg_1}{dx}$ в силу первого уравнения равновесия и (2), находим $\dfrac{dg_1}{dx}(\varsigma) = 1 - \dfrac{\lambda^p(\varsigma)}{\lambda(1-\omega)}$, где ς – значение x, отвечающее положению равновесия. Отсюда имеем сходимость итераций к положению равновесия, если $\lambda^p(\varsigma) > 0$, в противном случае - расходимость.

Таким образом, как и в случае разгрузки без остаточных деформаций, начало расходимости итерационного процесса соответствует моменту потери устойчивости системы.

Библиографический список

1. Жижерин С.В., Стружанов В.В. Деформирование балки из повреждающегося материала при чистом изгибе // Математическое моделирование систем и процессов: Сб. науч. тр. / Перм. гос. техн. ун-т. Пермь. – 1999. – №7. – С.20-27.
2. Стружанов В.В., Жижерин С.В. Об одной модели деформирования повреждающегося материала при одноосном нагружении // Математическое моделирование систем и процессов: Сб. науч. тр. / Перм. гос. техн. ун-т. Пермь. – 1998. – №6. – С.119-124.
3. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.
4. Стружанов В.В., Миронов В.И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1995. – 190 с.
5. Стружанов В.В. Об одном критерии потери устойчивости в атомарных моделях // Математическое моделирование систем и процессов: Сб. науч. тр. / Перм. гос. техн. ун-т, Пермь. – 1997. – №5. – С.121-126.

Получено 8.04.2000