

УДК 539.374

В.Г. Кузнецова, И.Э. Келлер

Пермский государственный технический университет

ОЦЕНКА АДЕКВАТНОСТИ ТЕНЗОРНО-ЛИНЕЙНОГО СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТОГО НАГРУЖЕНИЯ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Abstract

In order to estimate a value of dependence of plastic, strength and other material properties on the third invariant to different forms of isotropic tensor function have been obtained using geometrical approach. The first, Novozhilov's trigonometric form does not allow us to evaluate definitely a value of tensor nonlinearity. The second gives possibility using decomposition in orthonormalized basis. Suggested procedure permits us to investigate experimental results for aluminum and copper subject to simple multiaxial loading.

Данные экспериментальных работ свидетельствуют о том, что при моделировании усталости, долговечности, разрушения материалов необходимо учитывать зависимость данных свойств от направления деформирования в пространствах напряжений или деформаций. Для изотропной среды без дилатансии (зависимости от гидростатического давления) при пропорциональном нагружении такая особенность свойств сводится к зависимости от третьего инварианта тензоров напряжений или деформаций. Имеются данные о различии величин предельной деформации титанового сплава ТС5 на 150% в зависимости от вида напряженного состояния [1]. Наблюдалось качественное различие кривых ползучести аустенитной нержавеющей стали 1Х18Н9Т в зависимости от угла вида, максимальное различие интенсивностей деформации в одинаковые моменты времени достигало 100% [2]. Еще более сильные различия наблюдались в экспериментах на повторно-статическое нагружение сплава Д16Т, где при одинаковой максимальной интенсивности напряжений различие числа циклов до разрушения достигало 10^5 и соответствовало состояниям одноосного растяжения и сдвига [1]. Тот же сплав при испытаниях на усталость обнаруживал различие числа циклов до разрушения в зависимости от вида напряженного состояния более чем на два порядка [1].

Существующие методики прогнозирования долговечности конструкций используют локальные дифференциально-линейные уравнения связи тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций [3]. Если рассматривается изотропная упругопластическая среда при малых градиентах перемещений и сохранении ориентации трехгранника главных осей меры напряжений по отношению к материальным волокнам, то будет сохранять ориентацию и трехгранник главных осей меры деформаций, будучи соосным первому [4]. В предположении независимости пластических свойств среды от гидростатического давления данные свойства могут быть описаны тензорной функцией, связывающей симметричные девиатор D тензора скоростей пластических деформаций и девиатор S тензора напряжений Коши.

В классической теории пластичности указанная функция определяется соотношением Прандтля-Рейсса

$$D = \lambda S, \quad (1)$$

где λ — скалярный дифференциально-линейный множитель. Соотношение (1) выражает пропорциональность связываемых тензоров. Экспериментальные данные свидетельствуют о соосности девиаторов напряжений и скоростей пластических деформаций в рамках принятых ограничений и, в то же время, о систематических отклонениях связи данных девиаторов от тензорно-линейного уравнения (1). Для учета тензорной нелинейности пластических свойств может быть использовано соотношение

$$D = \lambda (\varphi_1 S + \varphi_2 (S^2 - \frac{1}{3} \text{sp}(S^2) I)), \quad (2)$$

где φ_1, φ_2 — некоторые скалярные функции тензора S , I — единичный тензор. Последнее соотношение есть общее представление изотропной тензорной функции одного аргумента и выражает соосность связываемых тензоров.

Представляет интерес оценка тензорной нелинейности пластических свойств реальных материалов, но существующие методы не позволяют дать однозначный ответ на вопрос: “Насколько обосновано применение тензорно-линейного соотношения?” Обычно наблюдаемые в опытах на пропорциональное нагружение пары переменных Лоде (0,4; 0,5) в сравнении с отвечающими условию подобия (0,5; 0,5) должны обеспечивать ошибку в 20%, в то время как максимальное различие в направлениях между нормальными к окружности Мизеса и измеренными кривыми пластического потенциала для алюминия и меди составляет около 4° [6]. Сравнение коэффициентов φ_1 и φ_2 в правой части соотношения (2) также не является корректным, поскольку базисные элементы имеют разную физическую размерность и интенсивность и не ортогональны. На наш взгляд, более строгий ответ на поставленный вопрос можно дать, изучая геометрический смысл уравнения (2).

Рассмотрим пространство симметричных соосных тензоров; каждый его элемент представим спектральным разложением $A = a_1 e_1 e_1 + a_2 e_2 e_2 + a_3 e_3 e_3$ по некоторому ортонормированному базису $e_i e_i, i=1..3, \sum_i$. В этом трехмерном пространстве введем ортонормированный тригонометрический базис [7]

$$G_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 e_1 + e_2 e_2 + e_3 e_3), G_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2e_3 e_3 - e_1 e_1 - e_2 e_2), G_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 e_1 - e_2 e_2). \quad (3)$$

Подпространство, натянутое на элементы G_2 и G_3 , — есть девиаторная плоскость. На этой плоскости любой симметричный девиатор T , соосный тензору A , может быть задан своими полярными координатами ϑ_T и α_T :

$$T = \vartheta_T (\cos \alpha_T G_2 + \sin \alpha_T G_3). \quad (4)$$

Можно показать, что “модуль” $\vartheta_T = (I \cdot 2\text{sp}(T^2))^{1/2}$ совпадает с точностью до множителя с интенсивностью девиатора T , а “аргумент” α_T — с углом вида T , определяемым из уравнения $\cos 3\psi_T = \frac{3\sqrt{3} I_3(T)}{2 T_*}$. С использованием (3)-(4) можно получить представление девиатора квадрата T (соосного исходному девиатору)

$$Dev(\mathbf{T}^2) = \frac{\vartheta_T^2}{\sqrt{6}}(\cos 2\alpha_T \mathbf{G}_2 - \sin 2\alpha_T \mathbf{G}_3), \quad (5)$$

откуда, в частности, следует

$$\alpha_{Dev(\mathbf{T}^2)} = -2\alpha_T. \quad (6)$$

Рассмотрим изотропную функцию аргумента \mathbf{T} со значением F , являющимися девиаторами. Тогда \mathbf{T} , $Dev(\mathbf{T}^2)$ и F есть соосные девиаторы и последний можно разложить по первым двум [4,7], в общем случае образующим на девиаторной плоскости косоугольный базис. Используя формулы косоугольного проецирования и соотношение (6), имеем

$$F = \vartheta_F \left(\frac{\sin(2\alpha_T + \alpha_F)}{\sin 3\alpha_T} \frac{\mathbf{T}}{\vartheta_T} + \frac{\sin(\alpha_T - \alpha_F) \sqrt{6} Dev(\mathbf{T}^2)}{\sin 3\alpha_T \vartheta_T^2} \right), \quad (7)$$

где α_F — угол вида раскладываемого значения функции, ϑ_F — его модуль. Можно показать, что базисные элементы \mathbf{T}/ϑ_T и $\sqrt{6} Dev(\mathbf{T}^2)/\vartheta_T^2$ имеют единичный модуль. При тождественном совпадении углов вида аргумента и значения функции представление (7) принимает тензорно-линейную форму

$$F = \frac{\vartheta_F}{\vartheta_T} \mathbf{T}. \quad (8)$$

Соотношение (7) было впервые получено В.В.Новожиловым [8].

Отождествляя аргумент функции с девиатором напряжений \mathbf{S} , а ее значение — с девиатором скоростей пластических деформаций \mathbf{D} , получим

$$\frac{\mathbf{D}}{\vartheta_D} = \frac{\sin(2\alpha_S + \alpha_D)}{\sin 3\alpha_S} \frac{\mathbf{S}}{\vartheta_S} + \frac{\sin(\alpha_S - \alpha_D) \sqrt{6} Dev(\mathbf{S}^2)}{\sin 3\alpha_S \vartheta_S^2}. \quad (9)$$

Здесь базисные элементы еще и физически безразмерны. Закон (9) позволяет оценить величины косоугольных проекций $k_1 = \sin(2\alpha_S + \alpha_D)/\sin 3\alpha_S$ и $k_2 = \sin(\alpha_S - \alpha_D)/\sin 3\alpha_S$ на линейный и квадратичный нормированные базисные элементы, зная углы вида аргумента и значения функции. Однако сравнение величин проекций не позволяет дать четкий ответ о величине тензорной нелинейности, поскольку изменяется в зависимости от угла вида девиатора напряжений взаимная ориентация базисных элементов. Согласно (6) угол между последними равен утроенному углу вида девиатора напряжений. В частности, при растяжении базисные векторы сонаправлены, при сжатии — противоположно направлены, а при сдвиге — ортогональны.

На рис. 1 представлены полученные экспериментально точки текучести для алюминия и меди на соответствующих минимальных сегментах девиаторной плоскости [6]. Цитируемая работа содержит данные об углах вида тензоров напряжений и скоростей деформаций для каждого эксперимента. В каждой экспериментально полученной точке строился локальный нормированный базис из элементов \mathbf{S}/ϑ_S и $\sqrt{6} Dev(\mathbf{S}^2)/\vartheta_S^2$, представляемых векторами на девиаторной плоскости. Первый элемент откладывался под углом α_S от ближайшей проекции главной оси на девиаторную плоскость (\mathbf{G}_2), а второй — под углом $-2\alpha_S$ от нее. Нормированный вектор значения функции \mathbf{D}/ϑ_D откладывался под углом α_D к данной оси и далее находились его косоугольные проекции на базисные элементы. Результаты такого построения, приведенные на рис. 1, дают качественное

представление о взаимной ориентации базисных векторов и о величинах проекций на них; на рис.2,а приведена зависимость отношения $k_2/k_1 = \sin(\alpha_S - \alpha_D)/\sin(2\alpha_S + \alpha_D)$ от угла вида для обоих металлов. Как видно из рис.2,а, проекция на нелинейный базисный элемент меньше, чем на линейный, а максимальное отношение не превосходит 0,17 для алюминия и -0,24 для меди.

Таким образом, геометрическая интерпретация закона (2) позволила быстро и наглядно проанализировать экспериментальные данные, представляющие собой углы вида девиаторов напряжений и соответствующих приращений пластических деформаций (либо компоненты этих девиаторов).

Как уже отмечалось выше, разложение (9) все же не позволяет однозначно оценить величину тензорной нелинейности по причине неортогональности базиса. Оно было исследовано здесь как наиболее известное соотношение, учитывающее зависимость от угла вида. Может быть предложено более удобное для этой оценки разложение по ортонормированному базису

$$\frac{D}{\mathfrak{D}_D} = \cos(\alpha_D - \alpha_S) \frac{S}{\mathfrak{D}_S} + \sin(\alpha_D - \alpha_S) \frac{W}{\mathfrak{D}_W}, \quad (10)$$

где в качестве второго элемента локального базиса взят девиатор

$$W = \frac{1}{\sqrt{3}}((s_2 - s_3)e_1e_1 + (s_3 - s_1)e_2e_2 + (s_1 - s_2)e_3e_3),$$

ортогональный тензорам S и G_i и образующий с ними правую тройку ($s_i, i=1..3$ есть спектр тензора S). На рис.2,б приведено отношение $p_2/p_1 = \operatorname{tg}(\alpha_D - \alpha_S)$ проекций p_2 и p_1 вектора D/\mathfrak{D}_D соответственно на второй и первый базисные элементы в зависимости от угла вида для тех же экспериментов [6]. Максимальная величина данного отношения составила для алюминия 0,1; для меди -0,075.

Следует отметить, что разложение (10) более предпочтительно и с точки зрения физики, так как ортогональная проекция $S:D = \mathfrak{D}_S \mathfrak{D}_D \cos(\alpha_S - \alpha_D)$ есть удельная мощность напряжений, а величина $1 - \cos(\alpha_S - \alpha_D)$ представляет собой относительную величину ошибки определения этой мощности в рамках тензорно-линейного соотношения (1). Для исследованных металлов максимальное значение данной величины составило 0,005 для алюминия и 0,003 для меди.

Несмотря на малые значения ошибки, несущественные для задач пластичности, эта ошибка может привести к существенным погрешностям при моделировании процессов знакопеременной пластичности. Авторы работы [9] приводят факт, что различие в удельной локальной энергии деформирования в каждый момент процесса в 10% может привести к различию пределов усталости металлов на один порядок. Сравнительно небольшие отклонения от изотропии Мизеса, суммируясь, приводят к значительным изменениям долговечности материалов при малоцикловом неоднородном нагружении материалов [9]. Максимальная ошибка в угле вида, реализуемая, если рассматривается изотропия типа Треска, составляет $\pi/6$ и покрывает весь минимальный сегмент кривой потенциала на девиаторной плоскости. Такое различие углов вида приводит к максимальной ошибке в величине удельной энергии формоизменения в фиксированный момент времени в 13-14%, что существенно. Поэтому, при моделировании подобных (усталостных, прочностных и т.д.) свойств необходимо использовать тензорно-нелинейное определяющее соотношение.

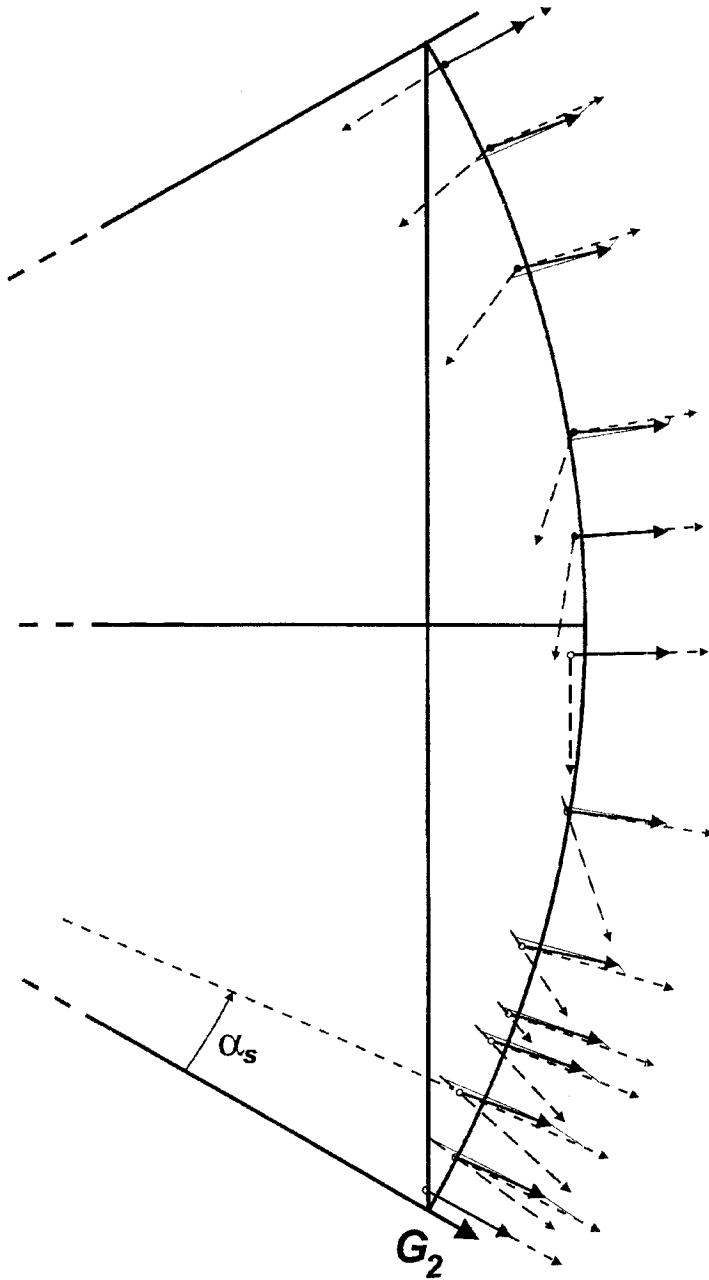


Рис. 1. Геометрическое представление соотношения (9) на девиаторной плоскости
 Базисные элементы: - - - - - девиатор напряжений S , — — — девиатор его квадрата, $DevS^2$; — — — значение функции, девиатор скоростей пластических деформаций D ;
 \circ — экспериментальные точки текучести меди, \bullet — алюминия [6]; G_2 — элемент тригонометрического базиса, α_s — угол вида девиатора напряжений

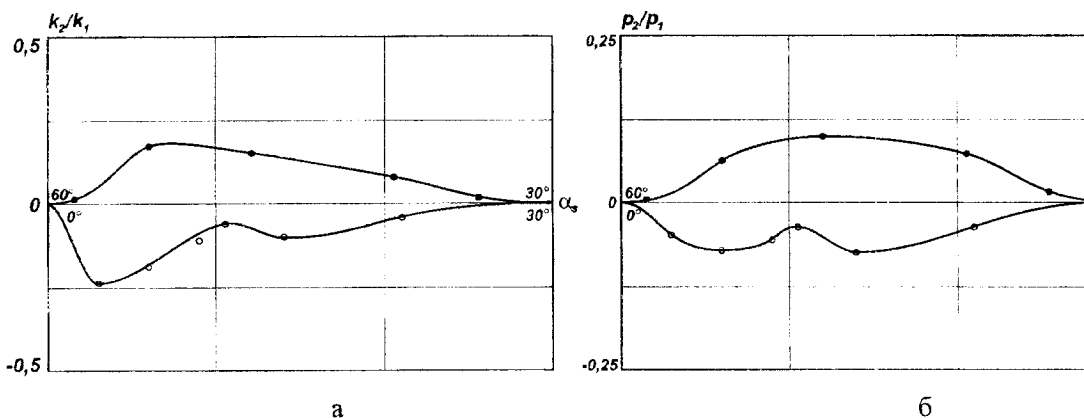


Рис. 2. Отношение проекций на нелинейный и линейный базисные элементы в зависимости от угла вида α_S девиатора-аргумента: а) разложения (9), б) разложения (10); \circ — медь, \bullet — алюминий

Выводы. Известное тригонометрическое представление В.В. Новожилова изотропной тензорной функции, аргумент и значение которой являются девиаторами, получено косоугольным проецированием девиатора-значения функции на косоугольный базис, состоящий из нормированных девиатора-аргумента и девиатора его квадрата. Вследствие неортогональности базиса анализ величин проекций в данном разложении не позволяет сделать однозначный вывод о величине тензорной нелинейности.

Для однозначности такой оценки предложено другое представление рассматриваемой функции, в котором второй (“нелинейный”) базисный элемент выбирается ортогональным первому и гидростатической оси и образует с ними правую тройку.

С использованием геометрических представлений предложена простая процедура, позволяющая в каждой экспериментальной точке текучести на девиаторной плоскости строить указанные разложения и находить величины проекций.

В результате обработки экспериментальных данных на простое нагружение алюминия и меди получено, что максимальные величины проекций на нелинейный базисный элемент соотношения Новожилова составили 0,17 и 0,24 соответственно при углах между базисными элементами 118° и 9° . Проекция на “нелинейный” элемент ортогонального разложения составили 0,1 и 0,075 соответственно.

Библиографический список

1. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии: Справочник / А.А. Лебедев, Б.И. Ковальчук, Ф.Ф. Гигиняк и др. — Киев: Наук. думка, 1983.— 366 с.
2. Можаровский Н.С., Антипов Е.А., Бобырь Н.И. Ползучесть и долговечность материалов при программном нагружении. — Киев: Вища шк., 1982.— 136 с.

3. Можаровский Н.С., Шукаев С.Н. Долговечность конструкционных материалов при непропорциональных путях малоциклового нагружения // Пробл. прочности. — 1988. — №10. — С. 47-54.
4. Вакуленко А.А. Некоторые применения теории тензорных функций при построении определяющих соотношений // Новожиловский сборник. — СПб.: Судостроение, 1992. — С. 41-48.
5. Вакуленко А.А. Полилинейная алгебра и тензорный анализ в механике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. — 64 с.
6. Taylor C.I., Quinney H. The plastic distortion of metals // Philos. Trans. Roy. Soc. London. — 1931. — Vol. A230. — P. 323-362.
7. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. — М.: Наука, 1988. — 122 с.
8. Новожилов В.В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде // ПММ.— 1951 — Т.15-Вып. 2. — С. 183-194.
9. Можаровский Н.С., Рудаков К.Н., Шукаев С.Н. Циклическое упруго-пластическое деформирование и долговечность материалов при простых и сложных нагружениях // Пробл. прочности. — 1985. — №10. — С. 49-55.

Получено 10.04.2000