УДК 539.3

Э.А. Леонова

Московский государственный университет

ВЕКТОРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО ТЕЛА

Abstract

In the present paper application of earlier introduced vector measures of strain state was showed for theory of elasticity. Connection of these quantities with strain tensor was given for arbitrary media. For elastic media vector form of Hook's low was obtained in terms of introduced vector characteristics.

В классической теории упругости и несвязанной теории термоупругости [1,2,3] (главным образом, для трех типов краевых задач, когда на граничной поверхности заданы: 1) вектор напряжения, 2) нормальная проекция вектора напряжения и касательная составляющая вектора перемещения, 3) нормальная — вектора перемещения и касательная — вектора напряжения) представляется полезным применение, введенных в [4], векторных характеристик деформированного состояния.

В регулярной трехмерной односвязной области D евклидова пространства, занятой однородным изотропным упругим телом в естественном состоянии при постоянной температуре, рассматриваем двустороннюю ориентированную поверхность, содержащую внутри или на границе D регулярный кусок Σ с непрерывно дифференцируемым единичным вектором n нормали. Оставаясь в рамках допущений линейной теории упругости при малых перемещениях и градиентах, введем в рассмотрение в качестве характеристик изменения поверхности векторы $\gamma^{(n)}$ и γ следующим образом:

$$\gamma^{(n)} = n\theta + \omega \times n - u^{(n)}, \theta \equiv \nabla \cdot u, \omega \equiv \frac{1}{2}\nabla \times u, \tag{1}$$

$$\gamma = \lim_{v(\Omega)\to 0} \frac{1}{v(\Omega)} \oint_{\Sigma} \gamma^{(n)} d\Sigma, \quad u^{(n)} = \lim_{S(\Sigma)\to 0} \frac{1}{S(\Sigma)} \oint_{l} u \times dl .$$

Здесь замкнутый кусочно-гладкий контур $l \subset \Sigma$ в области непрерывной дифференцируемости вектора перемещения u предполагается сводимым непрерывным преобразованием в точку $x \in \Sigma$. Положительное направление dl, векторного элемента касательной к l, согласовано с n в системе правой ориентации. Символ $S(\Sigma) \to 0$ означает предел последовательности подобных, с одной общей точкой x, подмножеств $\Sigma_k \subset \Sigma, \Sigma_{k+1} \subset \Sigma_k$ при $k \to \infty$, так что площадь поверхности $S(\Sigma_k) \to 0$. Трехмерная односвязная область $\Omega \subset D$, ограниченная замкнутой поверхностью Σ, сводима непрерывным преобразованием в точку $x \in D$. Символ $v(\Omega) \to 0$ означает предел последовательности с одной общей точкой x подмножеств $\Omega_k \subset \Omega$, $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$ при $k \to \infty$, так что объем $v(\Omega) \to 0$. Можно показать, что поверхностный вектор $u^{(n)}$ выражает локальное изменение поверхности. Для этого запишем Σ в малой окрестности обыкновенной точки $x \in \Sigma$ в виде

$$\Sigma = \frac{1}{2}\oint_{l} dx \times dl .$$

Выражая этот кусок материальной поверхности в деформированном состоянии через вектор перемещения и, переходя к пределу, получим $u^{(n)}$.

Вектор $\gamma^{(n)}$- локальная характеристика искажения поверхности, γ — характеристика искажения всей поверхности частицы.

Утверждение 1. Векторные поля $\gamma(x), \omega(x)$ и скалярное поле $\theta(x)$ связаны инвариантным соотношением

$$\gamma - \nabla\theta + \nabla \times \omega = 0 . \tag{2}$$

Доказательство основано на условии равенства нулю вектор-площади замкнутой поверхности в евклидовом пространстве, а также проверяется непосредственным вычислением.

Следствие. Вектор γ связан с полями u, θ и с полями u, ω соотношениями

$$2\gamma = \nabla^2 u + \nabla\theta , \quad \gamma = \nabla^2 u + \nabla \times \omega ,$$

$$\nabla^2\omega = \nabla \times \gamma, \ \nabla^2\theta = \nabla \cdot \gamma . \tag{3}$$

По трем некомпланарным векторам $\gamma^{(n)}$ однозначно восстанавливается тензор деформации.

Введем векторы ε^m, $m = 1,2,3$, выраженные через $\gamma^{(n)}$, при фиксированном m, в виде

$$\varepsilon^m = \sqrt{g^{mn}}\gamma^{(m)}, g^{mn} = x^m \cdot x^m .$$

В разложении по естественному x_i, $i = 1,2,3$ и взаимному x^i базисам произвольной системы координат в D получим соотношения

$$\gamma^{(n)} = \sum_{m=1}^{3}(n \cdot x_m)\sqrt{g^{mm}}\gamma^{(m)}, \gamma^{(n)} = (n \cdot x_i)\varepsilon^i .$$

Тривектор ε^i, $i = 1,2,3$ представляет тензор деформации

$$\varepsilon^{ij} x_i x_j = \varepsilon_{ij} x^i x^j , \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{,i} x_j + u_{,j} x_i)$$

следующим образом:

$$\varepsilon^{ij} = \varepsilon^i \cdot x^j = \varepsilon^j \cdot x^i , \varepsilon^i = \varepsilon^{ij} x_j .$$

Вектор γ выражается через тривектор деформации ε^k, $k = 1,2,3$ в виде

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}\varepsilon^k)_{,k} , \sqrt{g} \equiv (x_1 x_2 x_3) .$$

Таким образом, вектор γ равен дивергенции тензора деформации.

В изохорических процессах деформирования γ - соленоидальный вектор, в безвихревых процессах γ - потенциальный вектор.

Замечание. Полученные соотношения относятся к кинематике любой среды при малых значениях векторов перемещения и поворота и тензора деформации.

Следующие свойства связаны со спецификой теории упругости.

Закон Гука представляется в виде линейной связи вектора напряжения $p^{(n)}$, в точке поверхности с единичной нормалью n, с поверхностным вектором искажения $\gamma^{(n)}$ и объемным расширением:

$$p^{(n)} = \lambda\theta n + 2\mu\gamma^{(n)} - \beta\vartheta n,$$

где λ и μ — параметры Ламе.

При использовании тривектора деформации ε^i, $i = 1,2,3$ получаем векторный эквивалент тензорной формы закона Гука, связывающий основные контравариантные векторы напряжения s^i с соответствующими векторами деформации ε^i,

$$s^i = \lambda\theta x^i + 2\mu\varepsilon^i - \beta\vartheta x^i.$$

Уравнения теории упругости и несвязанной термоупругости преобразуем к виду, удобному для одновременного анализа сжимаемого и механически несжимаемого $k^{-1} = 0$ материала,

$$\begin{aligned}&(1+2\chi)\nabla\sigma - \nabla\times\omega + f + 2\alpha\nabla\vartheta = 0, \chi = 2\,\mu/3k,\\ &\nabla\cdot u - 3(\chi\sigma + \alpha\vartheta) = 0, \nabla\times u - 2\omega = 0, \chi \geq 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь σ и f - среднее гидростатическое напряжение и вектор объемных сил, отнесенные к модулю сдвига 2μ, ϑ - температура, отсчитываемая от постоянной температуры естественного состояния, α - коэффициент линейного теплового расширения.

Утверждение 2. В статике классической теории упругости и несвязанной термоупругости для любого $\chi \neq 1$ среднее гидростатическое напряжение, относительное объемное расширение и вектор поворота выражаются через один вектор γ. В случае $\chi = 1$ вектор γ определяется внешними полями f и ϑ в явном виде.

Действительно, соотношение (2) и уравнения (4) образуют систему векторных уравнений. Решая эту систему, получаем искомое представление

$$\begin{aligned}&\nabla\sigma = -(1-\chi)^{-1}(\gamma + f - \alpha\nabla\vartheta), \nabla\theta = -3(1-\chi)^{-1}(\chi\gamma + \chi f - \alpha\nabla\vartheta),\\ &\nabla\times\omega = -(1-\chi)^{-1}((1+2\chi)\gamma + 3\chi f - 3\alpha\nabla\vartheta), \quad \chi \neq 1,\\ &\gamma = \alpha\nabla\vartheta - f, \quad \chi = 1.\end{aligned} \tag{5}$$

Следствие. В потенциальном поле объемных сил поле вектора γ потенциально.

Действительно, известным следствием (4) является уравнение

$$\nabla^2\sigma = -(1+2\chi)^{-1}(\nabla\cdot f + 2\alpha\nabla^2\vartheta).$$

Отсюда и из (5) при $f = \nabla\psi_f$ имеем

$$\gamma = \nabla\psi, \psi = -(1-\chi)\sigma - \psi_f + \alpha\vartheta + \text{const}.$$

Библиографический список

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: Изд-во МГУ, 1990 - 310 с.
2. Лурье А.И. Теория упругости - М.: Наука, 1970.- 939 с.
3. Новацкий В. Теория упругости -М.: Мир, 1975.- 872 с.
4. Леонова Э.А. Инвариантные свойства и экспериментально определяемые функции в задачах термоупругости и термовязкопластичности. М. Деп. в ВИНИТИ, 1989. № 4090-В-89.

Получено 10.04.2000