УДК 539.3

В.И. Ерофеев[*], З.Л. Колина[**]

**Нижегородский филиал института машиноведения РАН[*],
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского[**]**

МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СДВИГОВЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СРЕДАХ С ДИСЛОКАЦИЯМИ

Abstract

Propagation of the moving waves in geometrical – nonlinear continuum with dislocations have been analyzed in this work. A diagram which shows us with which frequency and wave number it is possible the modulation unstable of the waves has been drawn.

Динамику конденсированной среды с дислокациями можно описать с помощью способа, основанного на идеях калибровочной теории поля [1-3]. Основная идея калибровочной теории состоит в следующем: лагранжиан изотропного упругого тела инвариантен относительно глобальных преобразований сдвига и поворота твердого тела как целого. Если рассмотреть локальные преобразования, зависящие от координат, то инвариантность лагранжиана нарушится, и для её восстановления нужно ввести калибровочные поля β_{ij} [4].

Уравнения среды с дислокациями получаются путем варьирования калибровочно-инвариантного лагранжиана L_{el-pl} [5-7], состоящего из двух частей $L_{el-pl} = L^{(I)}_{el-pl} + L'$, первая из которых

$$L^{(I)}_{el-pl} = \int dV \left\{ \frac{1}{2}\left(\rho \frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \beta_{ii} \right)\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \beta_{kk} \right) - \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \beta_{ki} \right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \beta_{ki} \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \beta_{ki} \right)\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \beta_{ik} \right) \right.$$

описывает кинетическую энергию полных смещений и потенциальную энергию упругих полей в среде, а вторая

$$L' = \int dV \left\{ \frac{B}{2}\frac{\partial \beta_{km}}{\partial t}\frac{\partial \beta_{km}}{\partial t} - \frac{C}{2}\alpha_{km}\alpha_{km} \right\}$$

описывает кинетическую и потенциальную энергии дислокаций.
Здесь ρ – плотность материала; λ, μ – константы Ламе; B и C – константы материала, первая из которых определяет инерционные свойства дислокационного континуума (пропорциональна эффективной массе дислокаций, находящихся в единице объема), а вторая – прочностные. В работе [4] показано, что $B = \rho l_1^2$, $C = \mu l_2^2$, где $l_{1,2}$ – характерные масштабы дислокационной структуры материала, при этом $l_1 \approx 100$ *мкм* – совпадает по порядку величины с размером области локализованной деформации, а

$l_2 \approx 0{,}1 \div 1$ *мкм* - определяется средним расстоянием между плоскостями скольжения, $\alpha_{km} = \in_{kij} \dfrac{\partial \beta_{jm}}{\partial x_i}$ - тензор плотности дислокаций, dV – дифференциал объема.

Материал при пластической деформации предполагается несжимаемым, то есть $\mathrm{Sp}\beta_{ij} = \beta_{kk} = 0$.

Динамические уравнения упруго-пластического континуума, получаемые путем варьирования лагранжиана, имеют вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \qquad B\frac{\partial^2 \beta_{ij}}{\partial t^2} = \sigma'_{ij} - 2\eta \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial t}. \tag{1}$$

Ранее в [12] рассматривалось распространение акустических солитонов и нелинейных периодических стационарных волн в упруго-пластической среде с дислокациями, а в данной работе рассмотрим распространение сдвиговых волн в геометрически-нелинейном континууме. Выделим из системы (1) подсистему, полагая в ней $u_1 \equiv 0$. Эта подсистема будет иметь вид

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\mu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1} - \beta_{21}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[(\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^3\right], \tag{2}$$

$$B\frac{\partial^2 \beta_{21}}{\partial t^2} - C\frac{\partial^2 \beta_{21}}{\partial x_1^2} - \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \beta_{21}\right) = 0. \tag{3}$$

Из второго уравнения можно выразить $\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}$, подставив полученное соотношение в первое уравнение, продифференцировав по x_1. Это позволит представить (2) – (3) в виде одного уравнения, которое в безразмерных переменных $x = x_1\sqrt{\dfrac{\rho}{B}}$, $\tau = tc_\tau\sqrt{\dfrac{\rho}{B}}$, $v = \dfrac{u_2}{u_0}$, $\beta = \dfrac{\beta_{21}}{u_0}\sqrt{\dfrac{B}{\rho}}$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} + \frac{c_*^2}{c_\tau^2}\frac{\partial^4 \beta}{\partial x^4} - \left(1 + \frac{c_*^2}{c_\tau^2}\right)\frac{\partial^4 \beta}{\partial x^2 \partial \tau^2} + \frac{\partial^4 \beta}{\partial \tau^4} = \frac{u_0^2 \rho}{B}\frac{c_l^2}{c_\tau^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} - \frac{c_*^2}{c_\tau^2}\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}\right)^3 + 3\left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} - \frac{c_*^2}{c_\tau^2}\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}\right)^2 \beta + \right.$$

$$\left. + 3\left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} - \frac{c_*^2}{c_\tau^2}\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}\right)\beta^2 + \beta^3\right], \text{ где } c_* = \sqrt{\frac{C}{B}}. \tag{4}$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде гармонической волны с медленно меняющимися в пространстве и времени амплитудой и фазой:
$\beta(x,t) = A(\varepsilon x, \varepsilon t)e^{i(\omega t - kx)} + к.с$, где $A(x,t)$ – комплексная амплитуда, ω и k удовлетворяют дисперсионному соотношению:

$$\omega^4 - \left(1 + \frac{c_*^2}{c_\tau^2}\right)\omega^2 k^2 - \omega^2 + \frac{c_*^2}{c_\tau^2}k^4 = 0.$$

Используя метод усреднения по “быстрым” переменным [8], от (4) перейдем к укороченному уравнению огибающей квазигармонической волны. В системе координат, движущейся с групповой скоростью $(v_{\text{гр}} = \dfrac{d\omega}{dk})$ $\xi = v - v_{\text{гр}}\tau$, $\tau = \varepsilon t$, эволюция огибающих будет описываться нелинейным уравнением Шредингера

$$i\frac{\partial A}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{\text{гр}}}{\partial k}\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} - \alpha |A|^2 A = 0. \qquad \text{Здесь } \alpha = \frac{\alpha_0 c_l^2}{c_\tau^2\left[-4\omega^3 + 2\omega k^2\left(1 + \dfrac{c_*^2}{c_\tau^2}\right) + 2\omega\right]},$$

где $$\alpha_0 = 3k^2\left(\omega^6 - 30\frac{c_*^2}{c_\tau^2}\omega^4 k^2 + 3\frac{c_*^4}{c_\tau^4}\omega^2 k^4 - \frac{c_*^6}{c_\tau^6}k^6 - 3\omega^4 + 6\frac{c_*^2}{c_\tau^2}\omega^2 k^2 - 3\frac{c_*^2}{c_\tau^2}k^4 - 3\frac{c_*^4}{c_\tau^4}k^2 + 3\omega^2 - 1\right)$$

Известно, что при определенных условиях квазигармоническая волна может оказаться неустойчивой по отношению к разбиению на отдельные волновые пакеты (модуляционная неустойчивость). Наличие в системе такой неустойчивостью определяется по критерию Лайтхилла $\dfrac{\partial v_{\text{гр}}}{\partial k}\alpha < 0$.

Анализ показал, что волны, описываемые верхней дисперсионной ветвью, устойчивы. Волны, описываемые нижней дисперсионной ветвью, в интервале $0 \le k \le 1{,}414$ неустойчивы.

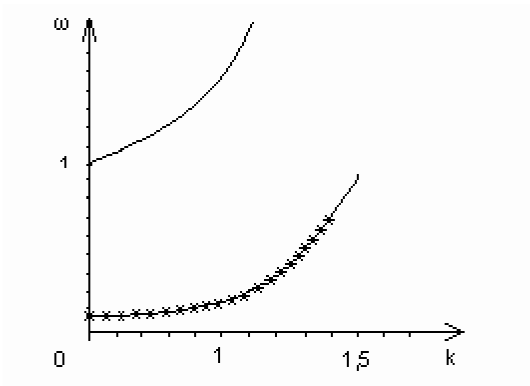

Рис.1. Диаграмма частот и волновых чисел, при которых возможна модуляционная неустойчивость

На рис. 1 изображена диаграмма, показывающая при каких частотах ω и волновых числах k возможна модуляционная неустойчивость. Область неустойчивости отмечена крестами. Расчеты производились при следующих значениях констант: μ=80 ГПа, K=λ+3/2μ=160 ГПа, $\rho = 7{,}8$ г/см^3, l_1=100 мкм, l_2=1 мкм (сталь) [7].

На спектральном языке эффект самомодуляции характеризуется усилением боковых компонент в спектре модулированной волны. В эти компоненты будет перекачиваться энергия из центральной части спектра возмущения.

На рис.2 схематично изображены процесс самомодуляции квазигармонической волны и эволюция ее спектра.

Величина области модуляционной неустойчивости сдвиговых волн зависит и от инерционных свойств дислокационного континуума.

На рис.3 показано, что область модуляционной неустойчивости увеличивается с увеличением эффективной массы дислокаций.

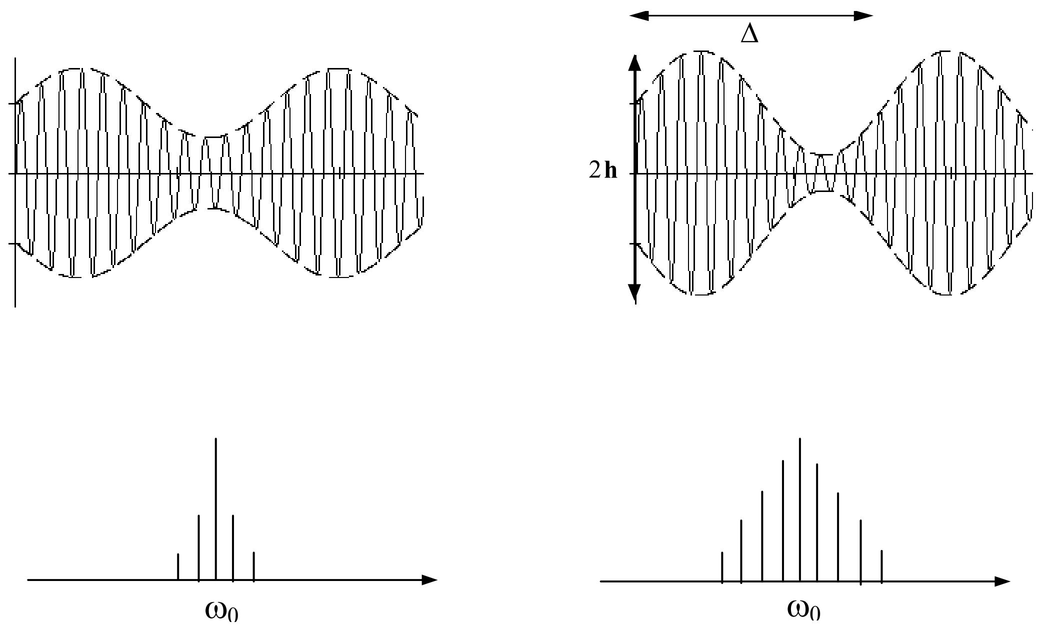

Рис.2. Схема процесса самомодуляции квазигармонической волны и эволюция ее спектра

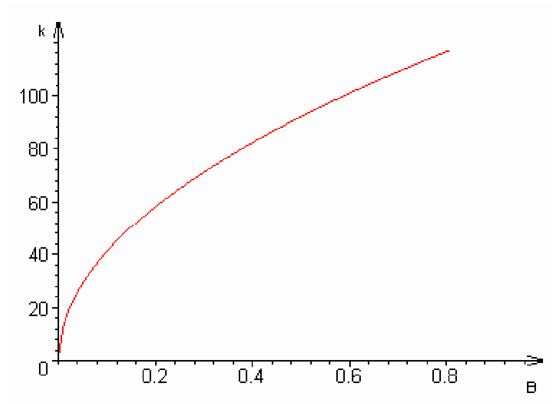

Рис.3. Увеличение области модуляционной неустойчивости с увеличением эффективной массы дислокаций

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-02-16924, грант № 05-01-00406) и фонда содействия отечественной науке.

Библиографический список

1. Кадич А., Эдилен Д. Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. – М.: Мир, 1987. – 168 с.
2. Lagoudas D.C. A Gauge Theory of Defects in Media with Microstructure //Int. J. Engng. Sci. – 1989. – Vol.27. – P.237–249.
3. Lagoudas D.C., Edelen D.G.B. Material and Spatial Gauge Theories of Solids// Int. J. Engug. Sci. – 1989. – Vol.27. – P.411–431.

4. Киселев С.П., Белай О.В. Континуальная калибровочная теория дефектов при наличии диссипации энергии//Физическая мезомеханика. – 1999. – Т.2. – №5. – С.69–72.

5. Гриняев Ю.В., Попов В.Л. Спектр возбуждения изотропной бездиссипативной упругопластической среды //Изв. Вузов. Физика. – 1990. – №6. – С.64–68.

6. Попов В.Л., Чертова Н.В. Спектр нормальных колебаний упругопластической среды с диссипацией //ПМТФ. – 1993. – №4. – С. 108–112.

7. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов / Под ред. В.Е.Панина. – Новосибирск: Наука. – 1995. – Т.1. – 298 с. Т.2. – 320 с.

8. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

9. Попов В.Л. Взаимосвязь упругопластического континуума и континуума Коссера//Изв.вузов. Физика. – 1994. – №4. – С.37–43.

10. Гриняев Ю.В., Чертова Н.В. Связь калибровочной модели упругопластической среды с теорией Миндлина //Изв.вузов. Физика. – 1994. – №4. – С.44–48.

11. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 328с.

12. Ерофеев В.И., Колина З.Л. Плоские нелинейные стационарные волны в упруго-пластической среде с дислокациями //Акустика неоднородных сред: Ежегодник Российского акустического общества: Труды научной школы проф. С.А. Рыбака. – М. – 2003. – С. 93–97.

Получено 20.06.05.