УДК 539.32

Е.А. Митюшов, С.А. Берестова

ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»

ТРАНСФОРМАЦИЯ УКАЗАТЕЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ УПРУГИХ СВОЙСТВ ТЕКСТУРИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Abstract
The transformation of elastic properties indicating surfaces of *textured* polycrystal iron were investigated.

Как известно, указательной поверхностью (индикатрисой) называется вспомогательная поверхность, характеризующая зависимость какого-либо свойства среды от направления. Для построения указательной поверхности из одной точки проводят радиус-векторы, длина которых пропорциональна величине, характеризующей данное свойство в данном направлении, например, электропроводность, показатель преломления, модуль упругости. Указательные поверхности служат наглядным графическим представлением об анизотропии физических свойств. Для упругих свойств наряду с указательными поверхностями используются также так называемые направляющие поверхности или поверхности растяжения [1].

Указательные поверхности относятся к центральным поверхностям, и для их построения используется сферическая система координат. Так, указательная поверхность для модуля Юнга ортотропного материала может быть построена с помощью соотношения [2]

$$\frac{1}{E(\mathbf{n})}=\sum_{l=1}^{6}\frac{\left(\mathbf{n}\,\omega^{(l)}\mathbf{n}\right)^{2}}{\lambda_l^{*}}=\sum_{l=1}^{6}\frac{\left(n_i n_j \omega_{ij}^{(l)}\right)^{2}}{\lambda_l^{*}},$$

где $E(\mathbf{n})$ – модуль Юнга в направлении $\mathbf{n}$, λ_l^* – модули Кельвина – Рыхлевского, характеризующие упругие свойства материала, $\omega^{(l)}$ – компоненты тензорного базиса в пространстве симметричных тензоров второго ранга.

Пусть анизотропный материал представляет поликристаллический агрегат, состоящий из множества произвольным образом ориентированных зерен, имеющих в общем случае некоторую преимущественную ориентацию (кристаллографическую текстуру). В этом случае модули упругости Кельвина – Рыхлевского являются функциями упругих свойств кристаллитов и параметров текстуры.

Для их определения могут быть использованы различные схемы расчета. В частности, используя их вычисление как средние геометрические соответствующих монокристальных констант, для поликристаллов с кубической симметрией структуры имеем [3]

$$\lambda_1^*=\lambda_1,$$

$$\lambda_{2,3}^*=\lambda_2^{\left(1-3\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3+2p_{2,3}\left(\Delta_2-\Delta_3\right)\right)}\lambda_4^{\left(3\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3-2p_{2,3}\left(\Delta_2-\Delta_3\right)\right)},$$

$$\lambda_4^*=\lambda_2^{\left(2\Delta_2+2\Delta_3-2\Delta_1\right)}\lambda_4^{\left(1-\left(2\Delta_2+2\Delta_3-2\Delta_1\right)\right)},$$

$$\lambda_5^* = \lambda_2^{\left(2\Delta_3 + 2\Delta_1 - 2\Delta_2\right)} \lambda_4^{\left(1 - \left(2\Delta_3 + 2\Delta_1 - 2\Delta_2\right)\right)},$$

$$\lambda_6^* = \lambda_2^{\left(2\Delta_1 + 2\Delta_2 - 2\Delta_3\right)} \lambda_4^{\left(1 - \left(2\Delta_1 + 2\Delta_2 - 2\Delta_3\right)\right)},$$

где модули Кельвина – Рыхлевского кубического кристалла выражаются через модули упругости (K – объемный модуль упругости) в обозначениях Фойгта равенствами

$$\lambda_1 = c_{11} + 2c_{12} = 3K, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = c_{11} - c_{12}, \ \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 2c_{44}.$$

Вид базисных тензоров в данном случае определяется только текстурными параметрами $\Delta_i, i = 1{,}2{,}3$. При этом

$$\tilde{\omega}^{(I)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \tilde{\omega}^{(II,III)} = \frac{1}{\sqrt{2 + 2p_{2,3} + 2p_{2,3}^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 - p_{2,3} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\omega}^{(IV)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\omega}^{(V)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\omega}^{(VI)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

где $p_{2,3} = k \pm \sqrt{k^2 + k + 1}$, $k = \dfrac{\Delta_1 - \Delta_2}{\Delta_2 - \Delta_3}$.

Очевидно, что один и тот же материал в разных его текстурных состояниях будет иметь в общем случае разную анизотропию упругих свойств, что сопровождается трансформацией указательной поверхности модуля нормальной упругости.

Другой графической характеристикой анизотропии упругих свойств может служить указательная поверхность модуля сдвига $G(\vec{n})$ при кручении, которая может быть построена с помощью соотношения [4]

$$2E^{-1}(\mathbf{n}) + G^{-1}(\mathbf{n}) = 2E_{\text{из}}^{-1} + G_{\text{из}}^{-1},$$

где $E_{\text{из}}$ и $G_{\text{из}}$ – модули Юнга и сдвига при кручении квазиизотропного поликристалла.

Из этого соотношения следует, что увеличению модуля Юнга в каком-то направлении соответствует уменьшение модуля сдвига при кручении вокруг этого направления.

Построение указательных поверхностей модуля сдвига при простом сдвиге и коэффициента Пуассона также возможно, но требует дополнительных ограничений, поскольку эти упругие характеристики определяются ориентацией двух связанных между собой ортогональных векторов, задающих плоскость и направление сдвига в первом случае, и направления продольной и поперечной деформаций во втором. При этом удобно использовать инвариантное представление технических характеристик упругих свойств [2]. Коэффициент Пуассона $\nu(\vec{m},\vec{n})$ в направлении $\vec{m}$ при растяжении в направлении $\vec{n}$ определяется из формулы

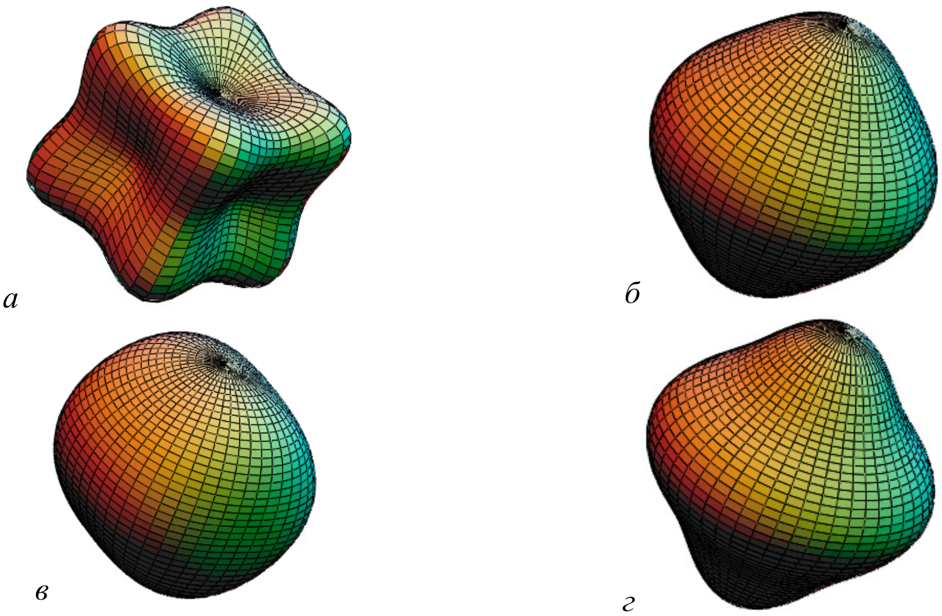
$$-\frac{\nu(\vec{m},\mathbf{n})}{E(\mathbf{n})} = \sum_{l=1}^{6} \frac{\left(\mathbf{n}\omega^{(l)}\mathbf{n}\right)\left(\mathbf{m}\omega^{(l)}\mathbf{m}\right)}{\lambda_l^*} = \sum_{l=1}^{6} \frac{\left(n_i n_j \omega_{ij}^{(l)}\right)\left(m_r m_s \omega_{rs}^{(l)}\right)}{\lambda_l^*}.$$

Модуль сдвига $G(\mathbf{m},\mathbf{n})$ при сдвиговой деформации в плоскости, задаваемой вектором **m**, в направлении **n** дается равенством

$$\frac{1}{4G(\mathbf{m},\mathbf{n})}=\sum_{l=1}^{6}\frac{\left(\mathbf{m}\,\omega^{(l)}\mathbf{n}\right)^2}{\lambda_l^*}=\sum_{l=1}^{6}\frac{\left(m_i n_j \omega_{ij}^{(l)}\right)^2}{\lambda_l^*}.$$

Построение указательных поверхностей с использованием этих соотношений может быть осуществлено несколькими путями, в частности, при построении указательной поверхности коэффициента Пуассона можно зафиксировать положение направления поперечной деформации, изменяя направление оси растяжения в пространстве.

В качестве примера возможной трансформации указательных поверхностей упругих свойств на рис. 1 представлены соответствующие поверхности монокристалла железа $\Delta_1=0,\ \Delta_2=0,\ \Delta_3=0$ и текстурированных поликристаллов железа, в зависимости от изменения параметров текстуры. Для примера взяты образцы стального проката [5] следующего химического состава, мас. %: Fe 99,7; Si 0,3, один после холодной прокатки с обжатием 75% , когда $\Delta_1=0{,}2,\ \Delta_2=0{,}23,\ \Delta_3=0{,}24$; другой – после холодной прокатки и отжига при 7000С, когда $\Delta_1=0{,}17,\ \Delta_2=0{,}23,\ \Delta_3=0{,}23$; и третий образец [6] прокатанного на 92% технически чистого железа, когда $\Delta_1=0{,}22,\ \Delta_2=0{,}23,\ \Delta_3=0{,}28$. В соответствии с принципом Неймана симметрия указательных поверхностей определяется симметрией функции распределения ориентаций кристаллографических осей зерен поликристалла.



а *б* *в* *г*

Рис.1. Указательные поверхности модуля нормальной упругости текстурированных поликристаллов железа, в зависимости от изменения параметров текстуры: а – для монокристалла железа $\Delta_1=0, \Delta_2=0, \Delta_3=0$*; б – сталь (мас. %: Fe 99,7; Si 0.3) после холодной прокатки с обжатием 75%* $\Delta_1=0{,}2,\ \Delta_2=0{,}23,\ \Delta_3=0{,}24$*; в – сталь (мас. %: Fe 99,7; Si 0,3) после холодной прокатки и отжига при 7000С* $\Delta_1=0{,}17,\ \Delta_2=0{,}23,\ \Delta_3=0{,}23$*; г – прокатанное на 92% технически чистое железо* $\Delta_1=0{,}22,\ \Delta_2=0{,}23,\ \Delta_3=0{,}28$

Функция распределения ориентаций $F(\varphi,\psi,\vartheta)$ показывает, во сколько раз совместная плотность распределения углов Эйлера, задающая распределение кристаллографических осей, отличается от таковой для нетекстурированного материала, то есть

$$f(\varphi,\psi,\vartheta)=F(\varphi,\psi,\vartheta)\frac{1}{8\pi^2}\sin\vartheta\,.$$

Текстурные параметры могут быть найдены путем непосредственного интегрирования с известной функцией распределения ориентаций, полученной из прямых методов количественного текстурного анализа,

$$\Delta_i=\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(Q_{i1}^2Q_{i2}^2+Q_{i2}^2Q_{i3}^2+Q_{i1}^2Q_{i3}^2\right)F(\varphi,\psi,\theta)\sin\theta\,d\varphi\,d\psi\,d\vartheta\,,\ i=1,2,3\,,$$

где Q_{ij} – косинусы углов между кристаллографическими осями зерен и осями лабораторной системы координат, выражаемые через углы Эйлера.

При моделировании текстуры набором идеальных ориентировок плотность распределения $f(\varphi,\psi,\vartheta)$ представляется суперпозицией дельта-функций Дирака и текстурные параметры в этом случае вычисляются по формуле

$$\Delta_i=\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(Q_{i1}^2Q_{i2}^2+Q_{i2}^2Q_{i3}^2+Q_{i1}^2Q_{i3}^2\right)\sum_{l=1}^{n}p_l\delta(\varphi-\varphi_l)\delta(\psi-\psi_l)\delta(\vartheta-\vartheta_l)d\varphi d\psi d\vartheta\,,\ i=1,2,3\,,$$

где p_l – относительная объемная доля текстурной компоненты, задаваемой углами $\varphi_l,\psi_l,\vartheta_l$.

На рис.2 представлена трансформация указательной поверхности модуля нормальной упругости стали X70 [7], используемой в качестве материала сварного газопровода (труба диаметром 1,5 м с толщиной стенки 16 мм). Текстура листового материала трубы многокомпонентна и неоднородна по сечению. Типы текстурных компонентов и их объемное содержание в разных слоях листов определяются режимами обработки. С учетом объемного содержания компонент текстуры вычисленные текстурные параметры в поверхностных слоях задаются следующими соотношениями: $\Delta_1=0{,}22,\ \Delta_2=0{,}23,\ \Delta_3=0{,}19$, а в центральных слоях – $\Delta_1=0{,}31,\ \Delta_2=0{,}25,\ \Delta_3=0{,}23$.

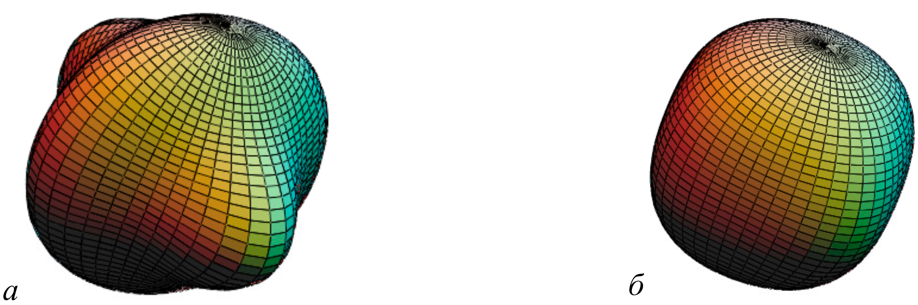


Рис. 2. Указательные поверхности модуля нормальной упругости стали X70, используемой в качестве материала сварного газопровода (труба диаметром 1.5 м с толщиной стенки 16 мм): а – центральные слои $\Delta_1=0{,}31,\ \Delta_2=0{,}25,\ \Delta_3=0{,}23$*; б – поверхностные слои* $\Delta_1=0{,}22,\ \Delta_2=0{,}23,\ \Delta_3=0{,}19$

Библиографический список

1. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела/ С.Г. Лехницкий. – М.:Наука, 1977. 416 с.

2. Рыхлевский, Я. О законе Гука / Я. Рыхлевский // ПММ, 1984. – Т.48. – Вып. 3. – С. 420–435.

3. Митюшов, Е.А. Формальная схема расчета эффективных упругих свойств текстурированных металлов / Е.А. Митюшов, Н.Ю. Одинцова, С.А. Берестова // Математическое моделирование систем и процессов. – 2003. – №11. – С. 76–80.

4. Адамеску, Р.А. Анизотропия физических свойств металлов/ Р.А. Адамеску, П.В. Гельд, Е.А. Митюшов. – М.:Металлургия, 1985. – 136с.

5. Бородкина, М.М. Количественная оценка текстуры слаботекстурированных матриалов / М.М. Бородкина, Т.С. Орехова // Заводская лаборатория. – 1976. – Т.42. – №4. – С.435–437.

6. Воробьев, Г.М. Количественное исследование ориентировок прокатного железа / Г.М. Воробьев, В.И. Попова // Металлы. – 1966. – №6. – С.54–62.

7. Лякишев, Н.П. Текстура и кристаллографические особенности разрушения материала труб из стали Х70 / Н.П. Лякишев, И.В. Эгиз, В.Ф. Шамрай // Металлы. – 2000. – № 2. – С. 68–72.

Получено 15.05.2006.