

УДК 539.3 539.115; 539.374

Ш.Т. Пазылов¹, Я.И. Рудаев¹, С.М. Сулайманова²

Кыргызско-Российский славянский университет (Бишкек)¹, Кыргызский государственный университет
строительства, транспорта и архитектуры (Бишкек)²

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ПРЕССОВАНИЯ ПОЛОСЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВЕРХПЛАСТИЧНОСТИ

Abstract

The analytical decision of a technological problem of pressure of a strip in isothermal conditions in a range of temperatures superplasticity is considered. Depending on the found kind of resolving function fields of strain rates and deformations are certain, components of the stresses and the power pressure is calculated. The energy-power and the kinematic characteristics adequating to manufacturing of a semifinished product with qualitative structural indicators are established.

1. Постановка задачи

Прессованием полосы называется технологический процесс, в котором заготовка в форме призмы выдавливается из контейнера через матрицу с уменьшением поперечных размеров заготовки. Отношение площади поперечного сечения заготовки A_0 к площади поперечного сечения A_k называется вытяжкой и определяется так:

$$\lambda = \frac{A_0}{A_k}. \quad (1.1)$$

Рассмотрим аналитическое решение задачи прямого прессования полосы. Считается, что технологический процесс осуществляется в изотермических условиях при температуре, принадлежащей диапазону температур реализации эффекта сверхпластичности. В основу постановки задачи положено исследование течения металла в клиновидном сходящемся канале в предположении радиальности указанного течения [1,2]. В рассматриваемой задаче определению подлежат энергосиловые и кинематические параметры процесса прессования полосы прямоугольного сечения в изотермических условиях с использованием сверхпластичности.

Примем, как в [1,2], цилиндрическую систему координат ρ, α, z , причем начало координат разместим в вершине клина, а ось z направим перпендикулярно плоскости течения металла (рис.1)

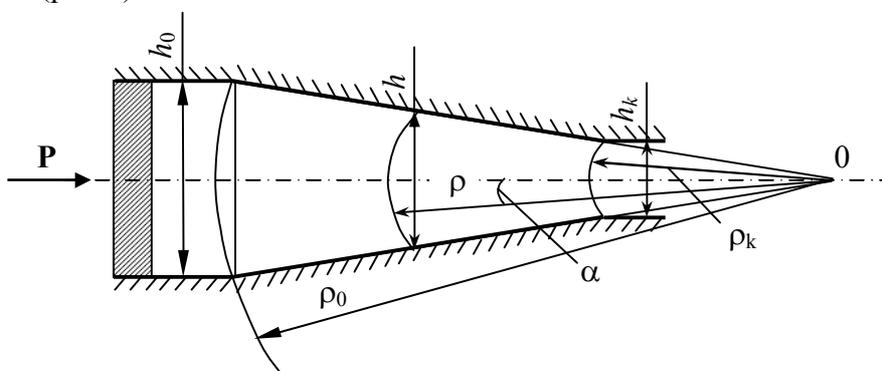


Рис.1. Схема процесса прессования

Математическая формулировка задачи включает:

– уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\alpha}{\rho} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{\rho\alpha}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{2\tau_{\rho\alpha}}{\rho} = 0, \quad (1.2)$$

где компоненты тензора напряжений σ_{ij} предполагаются поделенными на напряжение σ^* , являющееся внутренним параметром состояния и зависящее от температуры [3];

– геометрические соотношения

$$\dot{\epsilon}_\rho = \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho}; \quad \dot{\epsilon}_\alpha = \frac{v_\rho}{\rho}; \quad \dot{\gamma}_{\rho\alpha} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \alpha}, \quad (1.3)$$

причем составляющие тензора скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$ поделены на величину $\dot{\epsilon}^*$, которая также является внутренним параметром состояния, альтернативным σ^* [3]; скорость радиального перемещения v_ρ также принята безразмерной, отнесенной к ширине полосы; понятно, что координаты ρ и z также поделены на ширину полосы, которая принята постоянной;

– условие несжимаемости в скоростях

$$\dot{\epsilon}_\rho + \dot{\epsilon}_\alpha = 0; \quad (1.4)$$

– определяющие уравнения, принятые в форме соотношений теории упругопластических процессов малой кривизны [4],

$$\sigma_\rho - \sigma_0 = \frac{2\sigma_u}{3\dot{\epsilon}_u} \dot{\epsilon}_\rho; \quad \sigma_\alpha - \sigma_0 = \frac{2\sigma_u}{3\dot{\epsilon}_u} \dot{\epsilon}_\alpha; \quad \tau_{\rho\alpha} = \frac{\sigma_u}{3\dot{\epsilon}_u} \dot{\gamma}_{\rho\alpha}; \quad (1.5)$$

где σ_0 – среднее напряжение, а интенсивности напряжения σ_u и скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_u$ определяются формулами [2]

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_\rho - \sigma_\alpha)^2 + 4\tau_{\rho\alpha}^2}; \quad \dot{\epsilon}_u = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4\dot{\epsilon}_\rho^2 + \dot{\gamma}_{\rho\alpha}^2}. \quad (1.6)$$

Уравнение состояния принято в форме [3]

$$\sigma_u = 1 + m_0(\dot{\epsilon}_u - 1)^3 + \beta(\dot{\epsilon}_u - 1), \quad (1.7)$$

где $m_0 \sim \text{const}$, а величине $\beta = \beta(\xi)$ принадлежит роль управляющего параметра, причем ξ – приведенная температура.

Граничные условия будем формулировать в процессе решения задачи.

2. К определению разрешающей функции

Подстановка зависимостей (1.3) в условие несжимаемости (1.4) приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} = 0. \quad (2.1)$$

Решение уравнения (2.1) имеет вид

$$v_\rho = -\frac{K(\alpha)}{\rho}, \quad (2.2)$$

где $K = K(\alpha)$ – произвольная функция, подлежащая определению.

С учетом (2.2) для компонент скоростей деформаций получаем

$$\dot{\varepsilon}_\rho = \frac{K(\alpha)}{\rho^2}; \quad \dot{\varepsilon}_\alpha = -\frac{\dot{E}(\alpha)}{\rho^2}; \quad \dot{\gamma}_{\rho\alpha} = -\frac{\dot{E}'(\alpha)}{\rho^2}. \quad (2.3)$$

Подставив (2.3) в выражение для интенсивности скоростей деформации (1.9), будем иметь

$$\dot{\varepsilon}_e = L^{1/2}(\alpha) \cdot \rho^{-2}, \quad (2.4)$$

где обозначено

$$L(\alpha) = \frac{1}{3} \left(4K^2(\alpha) + K'^2(\alpha) \right). \quad (2.5)$$

Воспользовавшись (2.4), уравнение состояния (1.7) можно переписать так

$$\frac{\sigma_u}{\dot{\varepsilon}_u} = F(\rho, \alpha) = (1 - m_0 - \beta) \rho^2 L^{-1/2}(\alpha) + 3m_0 + \beta - 3m_0 L^{1/2}(\alpha) \rho^{-2} + m_0 L(\alpha) \rho^{-4}. \quad (2.6)$$

Определяющие соотношения (1.5), принимая во внимание (2.6), запишутся следующим образом

$$\sigma_\rho = \sigma_0 + \frac{2}{3} F(\rho, \alpha) \frac{K(\alpha)}{\rho^2}; \quad \sigma_\alpha = \sigma_0 - \frac{2}{3} F(\rho, \alpha) \frac{K(\alpha)}{\rho^2}; \quad \tau_{\rho\alpha} = -\frac{1}{3} F(\rho, \alpha) \frac{K'(\alpha)}{\rho^2} \quad (2.7)$$

Теперь становится очевидным, что поля напряжений, скоростей деформаций и перемещений могут быть определены, если известно явное выражение функции $K = K(\alpha)$, которую назовем разрешающей. Для установления вида указанной функции воспользуемся следующим приемом. Подставим соотношения (2.7) в дифференциальные уравнения равновесия (1.4). Найденные при этом производные $\frac{\partial \sigma_0}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \sigma_0}{\partial \alpha}$ продифференцируем соответственно по α и ρ и приравняем друг другу.

После несложных преобразований получаем, что функция $K = K(\alpha)$ удовлетворяет уравнению

$$K''' + 4K' = 0. \quad (2.8)$$

Интеграл этого уравнения равен

$$K(\alpha) = -\frac{C_1}{2} \cos 2\alpha + \frac{C_2}{2} \sin 2\alpha + C_3, \quad (2.9)$$

где C_1, C_2, C_3 - постоянные интегрирования, подлежащие определению из граничных условий.

На рассматриваемом этапе решения могут быть сформулированы следующие два граничных условия

$$\tau_{\rho\alpha} |_{\alpha=0} = 0; \quad S = -\chi \tau_{\max} |_{\alpha=\alpha^*} \quad (2.10)$$

Здесь S – интенсивность сил трения (касательное напряжение) на контакте матрицы и деформируемого материала, τ_{\max} – максимальное касательное напряжение, χ – коэффициент пропорциональности, определяемый экспериментально [4].

Воспользовавшись граничными условиями (2.10), для функции $K(\alpha)$ получим

$$K(\alpha) = \frac{C_1}{2} (\psi - \sin 2\alpha), \quad (2.11)$$

где

$$\psi(\alpha^*, \chi) = \cos 2\alpha^* + \frac{\sqrt{1 - \chi^2}}{\chi} \sin 2\alpha^*. \quad (2.12)$$

Таким образом, найдено явное выражение разрешающей функции, в которое входит не установленная еще постоянная C_1 . Для ее определения необходимо исследовать поле скоростей перемещений.

3. Поле скоростей перемещений и деформаций

Рассмотрение кинематики течения связано с выбором очага деформации, который ограничен [2] поверхностью клина и двумя поверхностями разрыва скоростей $\rho_0 = \rho_0(\alpha)$, $\rho_k = \rho_k(\alpha)$ (см. рис. 1). На рис. 2. изображены направления векторов скоростей перемещений при входе в очаг пластической деформации – средней v_0 и радиальной v_ρ .

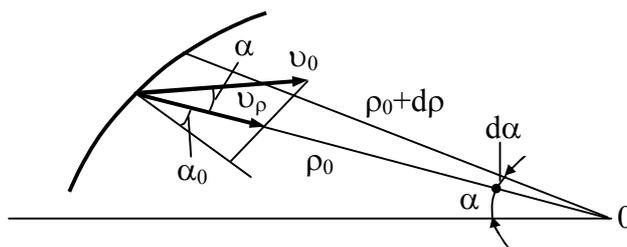


Рис. 2. К выводу уравнения поверхности разрыва скоростей перемещений на входе в матрицу

Опуская промежуточные выкладки, для радиуса поверхности $\rho_0 = \rho_0(\alpha)$, ограничивающей очаг деформации на входе в матрицу, получим

$$\rho_0 = \frac{C_1(\sin^2 \alpha - \psi \alpha)}{2v_0 \sin \alpha}. \quad (3.1)$$

Если принять условие несжимаемости в форме $v_0 h_0 = v_k h_k$, то функция $\rho_k = \rho_k(\alpha)$ определится так

$$\rho_k = \frac{C_1(\sin^2 \alpha - \psi \alpha)}{2v_0 \lambda \sin \alpha}. \quad (3.2)$$

Здесь $\lambda = h_0 / h_k$ – степень обжатия полосы (вытяжка), а для $\psi(\alpha^*, \chi)$ получено (2.13).

Перейдем теперь к непосредственному установлению постоянной C_1 , для него воспользуемся следующим приемом. Запишем выражение для секундного объема материала, проходящего через поверхность $\rho_0 = \rho_0(\alpha)$. Имеем

$$W_c = \iint_A v_\rho |_{\rho=\rho_0} dA, \quad (3.3)$$

где A – площадь сечения матрицы при $\rho_0 = \rho_0(\alpha)$.

Если учесть, что в цилиндрических координатах $dA = \rho_0 dz d\alpha$, то вместо (3.3) для полосы единичной ширины с учетом (2.2) получим

$$\int_0^{\alpha'} K(\alpha) d\alpha = v_0 \alpha^*. \quad (3.4)$$

Подставив в это уравнение (2.14) и вычислив интеграл в левой части, для $K=K(\alpha)$ будем иметь

$$K(\alpha) = \frac{v_0}{2\psi}(\psi - \sin 2\alpha), \quad (3.5)$$

где

$$\bar{\psi} = \frac{\alpha^*}{\psi\alpha^* - 1 + \cos\alpha^*}. \quad (3.6)$$

Теперь окончательно кинематические характеристики процесса будут определяться следующим образом:

– скорость радиального перемещения

$$v_\rho = \frac{v_0}{2\psi\rho}(\sin 2\alpha - \psi), \quad (3.7)$$

– функции $\rho_0 = \rho_0(\alpha), \rho_k = \rho_k(\alpha)$, ограничивающие в радиальном направлении очаг пластической деформации,

$$\rho_0(\alpha) = \frac{\sin^2 \alpha - 4\alpha}{2\psi \sin \alpha}; \quad \rho_k = \frac{\sin^2 \alpha - \psi\alpha}{2\psi \wedge \sin \alpha}; \quad (3.8)$$

– скорости деформаций

$$\dot{\varepsilon}_\rho = \frac{v_0}{2\psi\rho^2}(\psi - \sin 2\alpha); \quad \dot{\varepsilon}_\alpha = -\frac{v_0}{2\psi\rho^2}(\psi - \sin 2\alpha); \quad \dot{\gamma}_{\rho\alpha} = -\frac{v_0}{\psi\rho^2}\cos 2\alpha. \quad (3.10)$$

Здесь $\psi(\alpha^*, x)$, $\bar{\psi}(\alpha, *x)$ определяются соответственно формулами (2.12), (3.6).

4. Определение компонентов напряжений

Для составляющих напряжений приведем формулы в виде, удобном для дальнейшего использования. При этом учтено граничное условие в форме

$$\sigma_\rho|_{\rho=\rho_k} = 0. \quad (4.1)$$

С привлечением указанного условия, обозначив $\varphi(\alpha) = K''(\alpha) - 4K(\alpha)$, зависимости для напряжений в окончательной редакции могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} 3\sigma_\rho &= (1 - m_0 - \beta)L^{-1/2} \left(\frac{L'K'}{L} - \varphi \right) \ln \frac{\rho}{\rho_k} - 4(1 - m_0 - \beta)L^{-1/2} K - \\ &- \frac{3m_0 + \beta}{2} \varphi \left(\frac{1}{\rho_k^2} - \frac{1}{\rho^2} \right) - 4(3m_0 + \beta) \frac{K}{\rho_k^2} + \frac{3}{4} m_0 L^{1/2} \left(\frac{L'K'}{2L} + \varphi \right) \cdot \\ &\cdot \left(\frac{1}{\rho_k^4} - \frac{1}{\rho^4} \right) + 12m_0 L^{1/2} \frac{K}{\rho_k^4} - \frac{m_0}{6} L \left(\frac{L'K'}{L} + \varphi \right) \left(\frac{1}{\rho_k^6} - \frac{1}{\rho^6} \right) - 4m_0 L \frac{K}{\rho_k^6}; \\ 3\sigma_\alpha &= (1 - m_0 - \beta)L^{-1/2} \left(\frac{L'K'}{L} - \varphi \right) \ln \frac{\rho}{\rho_k} - \frac{3m_0 + \beta}{2} (\varphi + 8K) \left(\frac{1}{\rho_k^2} - \frac{1}{\rho^2} \right) + \\ &+ \frac{3}{4} m_0 L^{1/2} \left(\frac{L'K'}{2L} + \varphi + 16K \right) \cdot \left(\frac{1}{\rho_k^4} - \frac{1}{\rho^4} \right) - \frac{m_0}{6} L \left(\frac{L'K'}{L} + \varphi + 24K \right) \left(\frac{1}{\rho_k^6} - \frac{1}{\rho^6} \right); \\ 3\tau_{\rho\alpha} &= \left[(1 - m_0 - \beta)L^{-1/2} + \frac{3m_0 + \beta}{\rho^2} - \frac{3m_0}{\rho^4} L^{1/2} + \frac{m_0}{\rho^6} L \right] K'. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Обратимся к неиспользованному еще граничному условию, в соответствии с которым деформирующее усилие на выходе из матрицы отсутствует. Имеем

$$\int_0^{\alpha^*} \sigma_\rho \Big|_{\rho=\rho_k} \rho_k d\alpha = 0. \quad (4.5)$$

После подстановки σ_ρ (4.2) приходим к интегралу

$$\int_0^{\alpha^*} K(\alpha) \left[(1 - m_0 - \beta) L^{-\frac{1}{2}}(\alpha) \rho_k + (3m_0 + \beta) \rho_k^{-1} - 3m_0 L^{\frac{1}{2}}(\alpha) \rho_k^{-3} + m_0 L(\alpha) \rho_k^{-5} \right] d\alpha = 0. \quad (4.6)$$

Вычислив (4.6) и введя обозначение

$$\mu = \nu_0 \lambda^2 \bar{\psi} / \sqrt{3}, \quad (4.7)$$

получим следующее кубическое уравнение относительно μ :

$$a_1(\alpha^*) \mu^3 + a_2(\alpha^*) \mu^2 + a_3(\alpha^*) \mu + a_4(\alpha^*) = 0. \quad (4.8)$$

Здесь коэффициенты $a_i(\alpha^*)$ определяются как

$$\begin{aligned} a_1(\alpha^*) &= m_0 \int_0^{\alpha^*} (\psi^2 + 1 - 2\psi \sin 2\alpha) (\psi - \sin 2\alpha) \left(\frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \psi \alpha} \right)^5 d\alpha; \\ a_2(\alpha^*) &= -3m_0 \int_0^{\alpha^*} (\psi^2 + 1 - 2\psi \sin 2\alpha)^{\frac{1}{2}} (\psi - \sin 2\alpha) \left(\frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \psi \alpha} \right)^3 d\alpha; \\ a_3(\alpha^*) &= (3m_0 + \beta) \int_0^{\alpha^*} (\psi - \sin 2\alpha) \frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \psi \alpha} d\alpha; \\ a_4(\alpha^*) &= (1 - m_0 - \beta) \int_0^{\alpha^*} \frac{\sin^2 \alpha - \psi \alpha}{2 \sin \alpha} \frac{\psi - \sin 2\alpha}{\sqrt{\psi^2 + 1 - 2\psi \sin 2\alpha}} d\alpha. \end{aligned} \quad (4.9)$$

5. Определение деформирующих усилий

Зная величину и распределение напряжений на поверхности, ограничивающей на входе очаг деформации, можно определить усилие прессования так

$$P = 2 \int_0^{\alpha^*} \sigma_\rho \Big|_{\rho=\rho_0} \rho_0 d\alpha. \quad (5.1)$$

После подстановки в интеграл выражения для σ_ρ (4.2) при $\rho = \rho_0$ получим

$$P = \frac{2\sqrt{3}}{3\bar{\psi}} \left[m_0 b_1(\alpha^*) \bar{\mu}^3 + 3m_0 b_2(\alpha^*) \bar{\mu}^2 + 2(3m_0 + \beta) b_3(\alpha^*) \bar{\mu} - 2(1 - m_0 - \beta) b_1(\alpha^*) \right], \quad (5.2)$$

где $\bar{\mu} = \frac{\mu}{\lambda^2} = \frac{\nu_0 \bar{\psi}}{\sqrt{3}}$, причем $\lambda = \frac{\rho_0}{\rho_k} = \sqrt{\frac{\nu_k}{\nu_0}}$, а коэффициенты b_i формулы (5.2)

определим как

$$\begin{aligned} b_1(\alpha^*) &= 2 \int_0^{\alpha^*} (\psi^2 + 1 - 2\psi \sin 2\alpha) (\psi - \sin 2\alpha) \left(\frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \psi \alpha} \right)^5 d\alpha - \\ &\quad - \frac{(1 - \lambda^6)}{2\psi} \int_0^{\alpha^*} (\psi^2 + 1 - 2\psi \sin 2\alpha)^2 \left(\frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \psi \alpha} \right)^5 d\alpha; \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}
b_2(\alpha^*) &= \frac{(1-\lambda^4)}{3\psi} \int_0^{\alpha^*} \sqrt{(\psi^2 + 1 - 2\psi \sin 2\alpha)}^3 \left(\frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \psi \alpha} \right)^3 d\alpha - \\
&\quad - 2 \int_0^{\alpha^*} \sqrt{\psi^2 + 1 - 2\psi \sin 2\alpha} (\psi - \sin 2\alpha) \left(\frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \psi \alpha} \right)^3 d\alpha; \\
b_3(\alpha^*) &= \int_0^{\alpha^*} (\psi - \sin 2\alpha) \frac{2 \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \psi \alpha} d\alpha; \\
b_4(\alpha^*) &= \int_0^{\alpha^*} \frac{\psi - \sin 2\alpha}{\sqrt{\psi^2 + 1 - 2\psi \sin 2\alpha}} \frac{\sin^2 \alpha - \psi \alpha}{2 \sin \alpha} d\alpha.
\end{aligned}$$

6. Об оптимизации процесса прессования полосы с использованием сверхпластичности

Трудности, встречаемые при математической формулировке и решении технологических задач объемного формоизменения в термомеханических режимах сверхпластичности, обсуждены в [3]. Поэтому целесообразно представляется возможность выработки технологической стратегии [5] с обеспечением оптимальности некоторых критериев. Нельзя не согласиться с мнением [6], утверждающим, что из множества общепризнанных критериев выбирается лишь один из них или априорно задается путь их приведения к единственному критерию.

Использование сверхпластичности способствует выработке нетрадиционных критериев оптимизации. Так, на изменение силовых, термических и кинематических параметров процесса очаг деформации откликается изменением объема и расположения области сверхпластичности, которая составляет часть очага деформации. Следовательно, при таком подходе оптимизационная задача разбивается на две части. В первой из них определению подлежат условия, при которых объем зоны сверхпластичности будет максимальным. Вторая сторона задачи состоит в обеспечении требуемого расположения указанной зоны в очаге деформации в зависимости от конечной цели.

Считаем температуру процесса выбранной оптимально – не выходящей за термический диапазон сверхпластичности. Исключив температуру, обратим внимание на анализ поля скоростей деформаций, внешней характеристикой которого может служить средняя скорость прессования v_0 .

В качестве целевой функции выбираем объем зоны сверхпластичности ($W^{СП}$) в очаге деформации. Полагаем, что указанный объем при оптимальном сочетании силовых, термических и кинематических условий достигает максимума

$$W^{Ni} = \iiint_{(W)} dW \rightarrow \max. \quad (6.1)$$

В цилиндрических координатах вместо (6.1) можем записать

$$2 \int_0^{\alpha^*} \rho^2 d\alpha \rightarrow \max. \quad (6.2)$$

К условию (6.2) добавим ограничения на сверхпластическую область по скоростям деформаций. Для нормированной интенсивности скоростей деформаций имеем

$$\eta_n = \frac{L^{1/2}}{\rho^2} - 1, \quad (6.3)$$

причем $L(\alpha)$ определяется по формуле (2.5).

На значения η_n при сверхпластичности накладываются ограничения [3]

$$-\left(-\frac{\beta}{3m_0}\right)^{1/2} \leq \eta_n \leq \left(-\frac{\beta}{3m_0}\right)^{1/2}. \quad (6.4)$$

Здесь, как и выше, m_0 – постоянная материала, β – управляющий параметр (при сверхпластичности $\beta < 0$).

Неравенство (6.4), используя (6.3) и (2.7), можно привести к виду

$$\rho_n \leq \rho \leq \rho_{\bar{\epsilon}}, \quad (6.5)$$

где положено

$$\rho_{\bar{\epsilon}} = \left\{ \left[1 - (-\beta/3m_0)^{1/2} \right]^{-1} \left(\frac{4K^2 + K'^2}{3} \right)^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (6.6)$$

$$\rho_n = \left\{ \left[1 + (-\beta/3m_0)^{1/2} \right]^{-1} \left(\frac{4K^2 + K'^2}{3} \right)^{1/2} \right\}^{1/2}.$$

Здесь через ρ_n , $\rho_{\bar{\epsilon}}$ обозначены соответственно нижнее и верхнее значения радиуса ρ , ограничивающие область сверхпластичности.

Произвольная величина $\rho \in]\rho_n, \rho_{\bar{\epsilon}}[$ может быть определена так

$$\rho = \frac{1}{\Pi} \left(\frac{4K^2 + K'^2}{3} \right)^{1/4}, \quad (6.7)$$

где

$$\Pi \in \left] \left(1 - (-\beta/3m_0)^{1/2} \right); \left(1 + (-\beta/3m_0)^{1/2} \right) \right[.$$

Можно утверждать, что получена задача вариационного исчисления, для решения которой в соответствии с (6.2) и (6.7) необходимо построить функционал

$$\Phi = \int_0^{\alpha^*} (4K^2 + K'^2)^{1/2} d\alpha. \quad (6.8)$$

Случай (6.8) относится к разряду, когда подынтегральная функция зависит только от $K(\alpha)$, $K'(\alpha)$ т.е.

$$J = J(K, K') = (4K^2 + K'^2)^{1/2}. \quad (6.9)$$

При этом первый интеграл уравнения Эйлера вычисляется сразу и имеет вид

$$J - K'J_{K'} = C, \quad (6.10)$$

где C – произвольная постоянная интегрирования.

Теперь уравнение (6.10) с учетом (6.9) приводится к дифференциальному уравнению с разделенными переменными

$$K' = \frac{2K}{C} (4K^2 - C^2)^{1/2}. \quad (6.11)$$

Интеграл уравнения (6.11) с учетом краевого условия $K(\alpha)|_{\alpha=0} = 0$ определяется как

$$K(\alpha) = \frac{C}{2} \cos^{-1} 2\alpha. \quad (6.12)$$

Из (6.12) следует ограничение на величину угла $\alpha = \alpha^{**}$, образующего в окружном направлении границу области сверхпластичности,

$$\alpha^{*} \leq \frac{\pi}{4}. \quad (6.13)$$

Таким образом, объем зоны сверхпластичности будет максимальным, если имеют место условия (6.5), (6.13).

Перейдем теперь ко второй части оптимизационной проблемы, связанной с отысканием рационального расположения сверхпластической области. При этом будем предполагать, что конечной целью процесса прессования является получение высококачественной полосы с ультрамелкозернистой структурой. Поэтому сверхпластическую зону будем стремиться поместить так, чтобы исключить на выходе из матрицы скоростные условия за рамками диапазона сверхпластичности. Поверхность разрыва скоростей перемещений здесь определяется вторым уравнением (3.8), которое перепишем в форме

$$\rho_k^2 = \frac{(\sin^2 \alpha - \psi \alpha)^2}{4\lambda^2 \bar{\psi}^2 \sin^2 \alpha}, \quad (6.14)$$

где, как и выше, ψ и $\bar{\psi}$ определяются соответственно формулами (2.12), (3.6).

Уравнение, ограничивающее область сверхпластичности по верхнему скоростному пределу, в соответствии (6.6), (3.5) будет иметь вид

$$\rho_n^2 = \frac{v_0(1 + \psi^2 - 2\psi \sin 2\alpha)^{1/2}}{\sqrt{3\bar{\psi}}[1 + (-\beta/3m_0)^{1/2}]}. \quad (6.15)$$

Условие пересечения поверхностей (6.14), (6.15) представляется равенством

$$\frac{4\lambda^2 \mu}{\sqrt{3}[1 + (-\beta/3m_0)^{1/2}]} = \frac{\left(\sin \frac{\alpha^{*}}{2} - \psi \alpha^{*}\right)}{(1 + \psi^2 - 2\psi \sin \alpha^{*})^{1/2} \sin \frac{\alpha^{*}}{2}}, \quad (6.16)$$

где для μ получено из (4.8).

Несложно показать, что функция (6.16) положительно определена, по крайней мере, при условии (6.13). Последнее означает, что в пределах (6.13) пересечение поверхностей, ограничивающих очаг деформации $\rho_k = \rho_k(\alpha)$ и область сверхпластичности по верхнему пределу скоростей деформаций $\rho_n = \rho_n(\alpha)$, отсутствует.

Более того, можно утверждать $\rho_k < \rho_n$.

Теперь очевидно, что оптимальным следует признать взаимное расположение поверхностей $\rho_k(\alpha)$ и $\rho_n(\alpha)$ таким, чтобы обеспечить (см. рис. 1) выполнение условия

$$\rho_k(\alpha^{*}/2) = \rho_n(\alpha^{*}/2). \quad (6.17)$$

Равенство (6.17), по существу, есть требование касания поверхностей $\rho_k = \rho_k(\alpha)$ и $\rho_n = \rho_n(\alpha)$. Поэтому, положив в (6.16) $\alpha = \alpha^{*}/2$, с учетом формул (4.7), (6.14), (6.15), получим оптимальное значение параметра $\mu = \mu_{\text{опт}}$. Имеем

$$\mu_{\text{н0}} = \frac{\sqrt{3}}{4\lambda^2} \cdot \frac{\left(\sin \frac{\alpha^*}{2} - \psi \alpha^* \right) \left[1 + (-\beta/3m_0)^{1/2} \right]}{(1 + \psi^2 - 2\psi \sin \alpha^*)^{1/2} \sin \frac{\alpha^*}{2}}. \quad (6.18)$$

На рис. 3 представлены в виде графиков зависимости $\mu \sim \alpha^*$, построенные на основании решения (6.18) оптимизационной задачи (кривая 1) и для случая (4.8) – (4.10), когда только температура принадлежит диапазону сверхпластичности (кривая 2). Как видно из представленных графиков, скорость прессования при удовлетворении кроме температурных еще и скоростных условий сверхпластичности, для изготовления полосы с ультрамелким зерном значительно снижается (примерно в 2,5 ... 3,0 раза).

На рис. 4 показаны графики зависимостей усилия прессования (5.2) от угла α^* . Анализ графических зависимостей, приведенных на рис. 4 показывает, что усилия прессования с введением оптимально расположенной области сверхпластичности снижаются сравнительно с полученными значениями из решения краевой задачи. Увеличение λ , при прочих равных условиях означающее удлинение конической части матрицы, приводит к значительному возрастанию усилия прессования. Так, усилия при $\lambda = 1,5$ возрастают примерно на порядок для более длинных матриц. Введение же сверхпластичности снижает усилие в 3...4 раза.

Укажем, что конкретные расчеты проводились для параметров, соответствующих сплаву АМг5 [3]. Качественно решение не изменится и для других сплавов, проявивших сверхпластические свойства при сжатии.

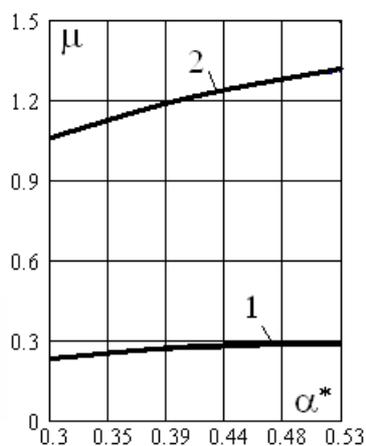


Рис. 3. Зависимость оптимальной скорости прессования от угла α^* при $\Lambda=1,5$; $\chi=0,3$; $\beta=-0,1561$; кривая 2 соответствует скоростям прессования без оптимизации

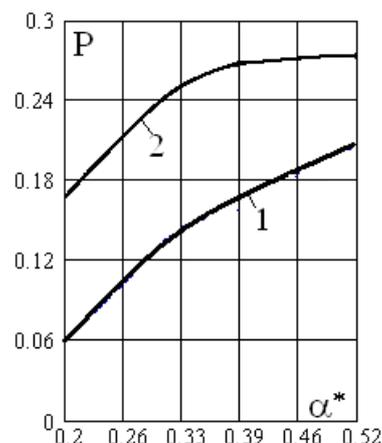


Рис. 4. Зависимость усилия прессования от угла α^* при $\Lambda = 1,5$; $\chi = 0,3$; $\beta = -0,1561$; кривая 2 соответствует усилиям прессования без оптимизации

Таким образом, показано, что удовлетворение только температурных условий реализации сверхпластичности без учета скоростного фактора не может отвечать принятой цели изготовления конечного продукта с качественной ультрамелкозернистой структурой.

Библиографический список

1. Соколовский В.В. Теория пластичности/ В.В. Соколовский – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.

2. Малинин Н.Н. Технологические задачи пластичности и ползучести/ Н.Н. Малинин. - М.: Высшая школа, 1979. – 119 с.
3. Рудаев Я.И. Введение в механику динамической сверхпластичности/ Я.И. Рудаев. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2006. – 134 с.
4. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести/ Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1975.– 400 с.
5. Кийко И.А. Пластическое течение металлов/ И.А. Кийко // Научные основы прогрессивной техники и технологии. – М.: Машиностроение, 1985. – С.102–103.
6. Аксенов Л.Б. Системное проектирование процессов штамповки/ Л.Б. Аксенов. – Л.: Машиностроение, 1990. – 240 с.

Получено 24.08.2008