

УДК 531.01

М.В. Айтуганов, П.В. Трусов

Пермский государственный технический университет

**К ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ
ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ СТРУКТУРНОЙ
СВЕРХПЛАСТИЧНОСТИ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ
С НЕОДНОРОДЫМ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫМ
СОСТОЯНИЕМ**

Abstract

The new approach to the solution of the structural superplasticity constitutive equations material constants identification problem based on the initially cylindrical specimens uniaxial tension experiments in nonuniform deformation mode conditions is proposed. The main idea of the approach consists in additional experimental data involvement, namely, side face profiles evolutions. Conceptual and mathematical statement of the identification problem is formulated. Material constants identification test problems of the superplasticity standard constitutive equation full and reduced form are considered.

Key words: superplasticity, identification problem

Идентификация материальных функций и констант для различных определяющих соотношений (ОС), как правило, осуществляется на основе экспериментальных данных, полученных в испытаниях образца с однородным напряженно-деформированным состоянием (НДС). Наиболее распространенными являются эксперименты по одноосному растяжению (сжатию) цилиндрических образцов. При этом задаются силовые или кинематические условия нагружения на торцах, а на «выходе» получают или удлинение, или силу как функцию времени (или параметра нагружения). Только в случае, когда процесс деформирования является однородным, перемещения, задаваемые на границе, могут быть пересчитаны в деформации, а получаемый отклик материала в виде силы – в напряжения. В этом случае процедура идентификации ОС сводится к поиску таких материальных констант или функций, которые бы наилучшим образом аппроксимировали полученную экспериментальную зависимость.

Аналогичные одноосные испытания применяются для идентификации ОС материалов в состоянии структурной сверхпластичности (СП) [1, 2]. Однако одноосное растяжение СП образцов зачастую реализуется неоднородно. Нарушение однородности деформирования в таких испытаниях проявляется в виде процессов образования шеек, их замораживания, перемещения вдоль образца и т.д. [3, 5]. Идентификация ОС для таких процессов деформирования представляет собой нетривиальную задачу: в этом случае полученная из эксперимента зависимость вида «перемещение–сила» может быть пересчитана в зависимость вида «напряжение–деформация» только на основе решения соответствующей краевой задачи, для чего, в свою очередь, требуется знание неизвестных материальных констант и функций при заданном виде ОС. В данной работе рассматривается новый подход к решению задачи идентификации материальных констант ОС СП на основе экспериментов по одноосному растяжению сплошных цилиндрических образцов в условиях неоднородного НДС, а также приводится решение двух тестовых задач идентификации на основе предложенного подхода.

Концептуальная постановка обратной задачи идентификации материальных констант ОС СП

Рассматривается процесс одноосного растяжения цилиндрического СП образца под действием продольной нагрузки в условиях локализации деформации. Основываясь на экспериментальных данных для такого процесса, считаются известными следующие зависящие от времени характеристики процесса растяжения:

- продольные перемещение одного из торцов $u = u(t)$;
- продольная сила, приложенная к торцу $F = F(t)$;
- профили боковой поверхности $f = f(x, t)$, $x \in [0, L(t)]$, где x – направление вдоль оси образца, f – радиус сечения образца, а $L(t)$ – текущая длина образца.

Использование этих экспериментальных данных при постановке соответствующей краевой задачи для описания указанного процесса приводит к тому, что на границе образца имеют место избыточные граничные условия (ГУ):

боковая поверхность: нулевые усилия (условие свободной границы), кинематические ГУ (по известной зависимости $f = f(x, t)$);

торцы: нормальная составляющая поверхностной силы $\sigma_n = P(t)$ (определяется по $F = F(t)$), нулевые касательные нагрузки (в силу неизменности НДС в области захватов) и кинематические ГУ в виде зависимости от времени величины перемещения торцов вдоль оси образца.

Наличие избыточных граничных условий позволяет следующим образом сформулировать задачу идентификации материальных констант заданного определяющего соотношения сверхпластичности:

найти такой набор констант, при котором решение краевой задачи с использованием части ГУ (назовем их основными ГУ) будет наилучшим образом согласовано с остальными ГУ (назовем их избыточными ГУ).

В качестве основных ГУ (которые используются в постановке краевой задачи) выбираются такие, которые бы обеспечивали тождественность формоизменения образца в эксперименте и в решении соответствующей краевой задачи.

Тестирование работы данного подхода осуществляется на примере идентификации материальных констант так называемого *стандартного определяющего соотношения* [1, 2]:

$$\sigma_u = K \xi_u^m \varepsilon_u^n, \quad \sigma = -p\mathbf{I} + \frac{2\sigma_u(\xi_u)}{3\xi_u} \mathbf{D}, \quad (1)$$

где σ_u, ξ_u – интенсивности девиаторов тензоров напряжения Коши σ и скоростей деформации \mathbf{D} , соответственно; K, m, n – постоянные материала.

Математическая постановка прямой краевой задачи растяжения цилиндрического СП образца

При постановке задачи принимаются следующие гипотезы:

- напряженно-деформированное состояние осесимметричное;
- процесс деформирования является квазистатическим (низкие скорости деформации, силами инерции можно пренебречь);
- рассматривается изотермическая постановка задачи (т.е. уравнение теплопроводности вырождается в тождество $T = T_0$);

- принимается гипотеза аддитивного разложения тензора скоростей деформации на скорость упругих \mathbf{D}^{el} и неупругих (пластических) деформаций \mathbf{D}^{pl} (т.е. используется обобщенная модель Максвелла):

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{pl} + \mathbf{D}^{el}; \quad (2)$$

- пластическое деформирование является изохорическим $I_1(\mathbf{D}^{pl}) = 0$ и описывается следующим тензорным соотношением (ОС сверхпластичности):

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{2\sigma_u(\xi_u)}{3\xi_u} \mathbf{D}^{el}, \quad \text{где } \sigma_u(\xi_u) = K \xi_u^m \varepsilon_u^n; \quad (3)$$

- упругое поведение сверхпластического материала описывается изотропным законом Гука:

$$\boldsymbol{\sigma}^J = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{v} \mathbf{I} + \frac{E}{1+\nu} \mathbf{D}^{el}, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^J \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}, \quad (5)$$

$$\mathbf{W} = (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) / 2, \quad (6)$$

$$\mathbf{L} = \nu \widehat{\nabla}, \quad (7)$$

где $(\cdot)^J$, \mathbf{W} , \mathbf{L} – коротационная производная Яуманна, тензор вихря и градиент скорости перемещений соответственно.

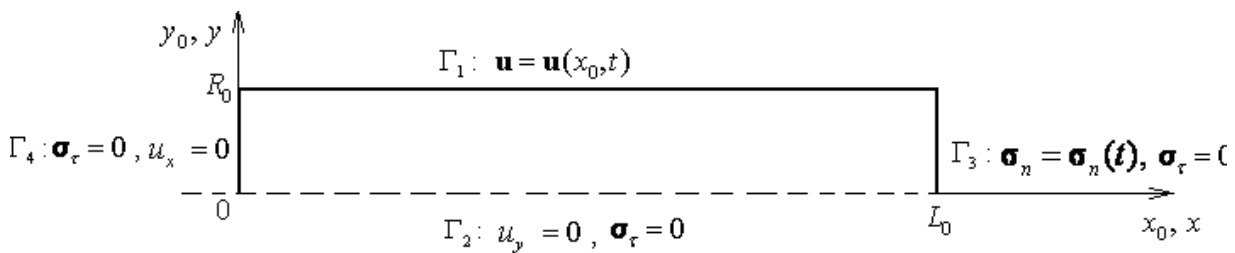


Рис. 1. Схема к постановке краевой задачи растяжения СП-образца

Напомним, что в качестве граничных условий при постановке прямой краевой задачи растяжения цилиндрического образца используются так называемые *основные граничные условия*, которые должны обеспечивать тождественность формоизменения образца в эксперименте и в решении соответствующей краевой задачи. Проведенный предварительный анализ различных постановок прямой краевой задачи позволил сделать вывод о том, что оптимальным выбором граничных условий в качестве основных является задание на торце силовых ГУ, а на боковой поверхности – кинематических ГУ:

- случай задания на боковой поверхности смешанных граничных условий приводил к несоответствию эволюции формы боковой поверхности в решении краевой задачи и эксперименте;
- полностью кинематическая постановка задачи, когда на боковой и торцевой поверхности задавались функции перемещений, приводила к появлению «избыточного» среднего напряжения; причина его появления связана с изохоричностью пластических деформаций.

Таким образом, граничные условия выбирались в следующем виде (рис. 1):

- условия осевой симметрии $u_y = 0$, $\sigma_\tau = 0$ на границе Γ_2 ,
- условия закрепления образца вдоль оси симметрии $u_x = 0$ и отсутствие трения $\sigma_\tau = 0$ на границе Γ_4 ,

- нормальное усилие $\sigma_n = \sigma_n(t)$ и отсутствие трения $\sigma_\tau = 0$ на границе Γ_3 ,
- кинематические ГУ $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_0, t)$ на боковой поверхности (граница Γ_1); здесь (x, y) и (x_0, y_0) соответственно эйлеровы и лагранжевы координаты.

Окончательный вид краевой задачи процесса растяжения сверхпластического образца в осесимметричной постановке выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{S} - \nabla p = 0, \\ \mathbf{D} = (\widehat{\nabla} \mathbf{v} + \mathbf{v} \widehat{\nabla}) / 2, \\ \mathbf{D} = \mathbf{D}^{pl} + \mathbf{D}^{el} \\ \mathbf{S} = (2\sigma_u / 3\xi_u) \mathbf{D}^{pl}, \quad \sigma_u(\xi_u) = K \xi_u^m \varepsilon_u^n, \quad I_1(\mathbf{D}^{pl}) = 0, \\ \sigma^J = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{v} \mathbf{I} + \frac{E}{1+\nu} \mathbf{D}^{el}, \\ \Gamma_1 : \mathbf{u} = \mathbf{u}(x_0, t), \\ \Gamma_2 : u_y = 0, \sigma_\tau = 0, \\ \Gamma_3 : \sigma_n = \sigma_n(t), \sigma_\tau = 0, \\ \Gamma_4 : u_x = 0, \sigma_\tau = 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

Следует отметить, что краевые задачи механики СП на сегодняшний день решаются либо аналитическими, либо приближенными методами [2]; среди последних наиболее распространенным является метод конечных элементов. В данной работе в качестве метода решения краевой задачи типа (8) использовался вариант метода конечных элементов, реализованный в пакете прикладных программ конечно-элементного анализа ABAQUS.

Выбор критерия идентификации материальных параметров ОС СП

Поле напряжений, полученное в результате решения задачи (8) при заданных значениях K, m, n , представим в символической форме в виде функции

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x, y, t, K, m, n). \quad (9)$$

Тогда, исходя из необходимости найти такие K, m и n , при которых решение (9) будет наилучшим образом согласовано с избыточным силовым ГУ на границе Γ_1 (условие свободной поверхности), целевая функция может быть выбрана в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} F = F(K, m, n) \left\| \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \Big|_{y_0=R_0} \right\|_{n_1}, \\ \mathbf{g}(x, t) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \Big|_{y_0=R_0}, \\ \left\| \mathbf{g}(x, t) \right\|_{n_1} = \int_0^{t_0} \int_0^L \left\| \mathbf{g}(x, t) \right\|_{n_2} y(x) dx dt, \\ \left\| \mathbf{g}(x, t) \right\|_{n_2} = (g_x^2 + g_y^2)^{1/2}, \\ F \rightarrow \min. \end{array} \right. \quad (10)$$

Таким образом, обратная задача идентификации материальных констант ОС СП сводится к решению оптимизационной задачи (10) при ограничениях (8). В этом случае, очевидно, набор материальных констант, соответствующий решению (10), является искомым идентифицируемым набором констант материала.

В качестве метода решения оптимизационной задачи (10), которую можно классифицировать как задачу нелинейного программирования, использовался один из вариантов метода прямого поиска – метод Нелдера–Мида (метод деформируемого многогранника). Среди явных преимуществ этого метода по сравнению с другими методами поиска (Хука–Дживса, случайного поиска, покоординатного спуска и т.д.) следует отметить его высокую эффективность, надежность в условиях наличия случайных возмущений или ошибок при определении значений целевой функции, простоту программной реализации и т.д. [4].

Тестирование предложенного подхода идентификации материальных констант ОС СП

Перед тем как непосредственно применять ту или иную методику идентификации к реальным экспериментальным данным, следует предварительно осуществить тестирование используемой процедуры. Ниже представлена общая схема тестирования предложенного подхода идентификации. На основе этой схемы рассматриваются две тестовые задачи идентификации констант определяющих соотношений $\sigma_u(\xi_u) = K \xi_u^m$ и $\sigma_u(\xi_u) = K \xi_u^m \varepsilon_u^n$.

1. Для выбранного ОС СП задаются конкретные значения материальных постоянных, т.е. используется некоторый гипотетический материал, обладающий заданным набором констант.
2. Решается задача одноосного растяжения цилиндрического образца из гипотетического материала, определенного в п.1 (*численный эксперимент*). На основе полученного решения строятся функции эволюции свободной поверхности $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_0, t)$ и продольного усилия $\sigma_n = \sigma_n(t)$ на торце.
3. Полученные в п.2 расчетные функции рассматриваются как экспериментальные данные, и на их основе решается соответствующая обратная задача идентификации, которая позволяет определить материальные константы.
4. Полученные в п.3 материальные постоянные сравниваются с предварительно заданными (п.1).
5. В случае, если рассчитанные в п.3 значения материальных постоянных с приемлемой точностью совпадают с предварительно заданными, проверяется устойчивость процедуры определения материальных постоянных путем внесения небольших возмущений в экспериментальные данные $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_0, t)$, $\sigma_n = \sigma_n(t)$ и оценки величины отклонения полученных в этом случае материальных констант от материальных констант, полученных на основе невозмущенных экспериментальных зависимостей.

Тестовая задача идентификации материальных констант ОС $\sigma_u(\xi_u) = K \xi_u^m$

В качестве расчетной области в задаче численного эксперимента рассматривается осесимметричный образец с начальными длиной L_0 и радиусом R_0 и геометрическим возмущением боковой поверхности в виде уединенной шейки глубиной d_0 . Геометрия шейки описывается двумя кубическими парабололами $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, которые интерполируют профиль шейки по трем точкам (11) (рис. 2).

$$\begin{cases} f_1(x_1) = y_1 & f_2(x_2) = y_2 \\ f_1(x_2) = y_2 & f_2(x_3) = y_3 \\ f_1'(x_1) = 0 & f_2'(x_2) = 0 \\ f_1'(x_2) = 0 & f_2'(x_3) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

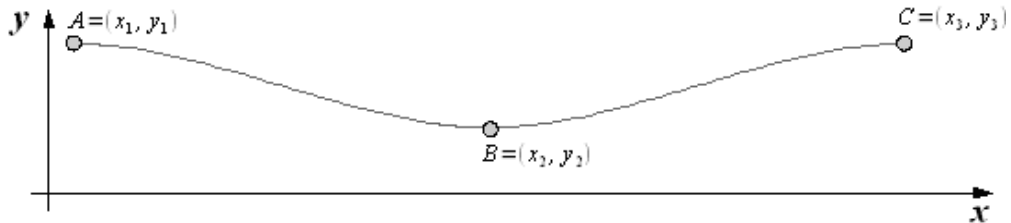


Рис. 2. Геометрия шейки

Рассматривается «мягкий» способ нагружения этого образца под действием постоянного продольного усилия, приложенного к правому торцу, в условиях закрепления левого торца (рис. 3).

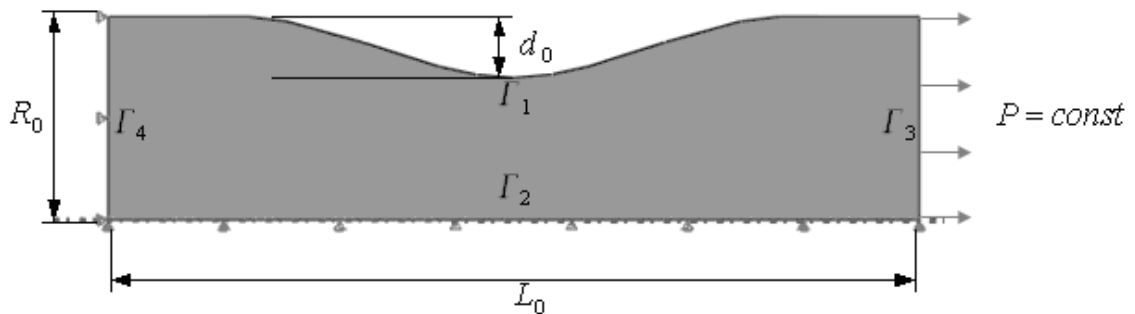


Рис. 3. Расчетная область и граничные условия задачи численного эксперимента

Параметры задачи:

- исходная геометрия образца $L_0 = 2$ м, $R_0 = 0,5$ м, $d_0 = 0,15$ м,
- продольное усилие $P = 100$ Па,
- упругие свойства материала $E = 10^5$ Па, $\nu = 0,3$,
- сверхпластические свойства материала $K^* = 10^{-1,85}$ Па·с $^{m^*}$, $m^* = 0,425$ (значение материальной константы m^* , которое задается здесь для решения задачи численного эксперимента, будет являться искомой константой, которая должна быть получена на основе решения задачи идентификации),
- расчетное время $t = 1$ с.

Решение задачи численного эксперимента

Ниже представлены поля интенсивностей напряжений σ_u (рис. 4) и деформаций ε_u (рис. 5) (в данном случае, ε – логарифмическая мера деформации, т.е. $\varepsilon = \ln \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$, где λ_i – удлинения главных осей \mathbf{e}_i тензора деформации) для двух моментов времени $t = (0,5; 1,0)$.

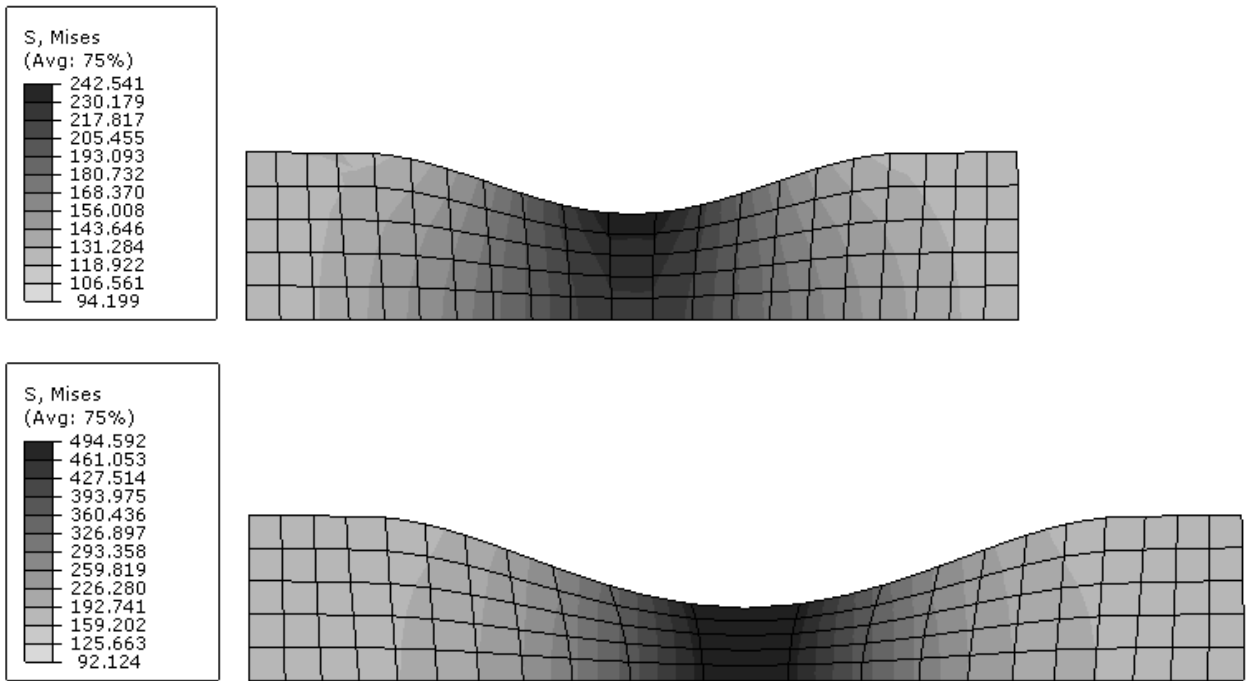


Рис. 4. Поля функции σ_u для $t = (0,5; 1,0)$

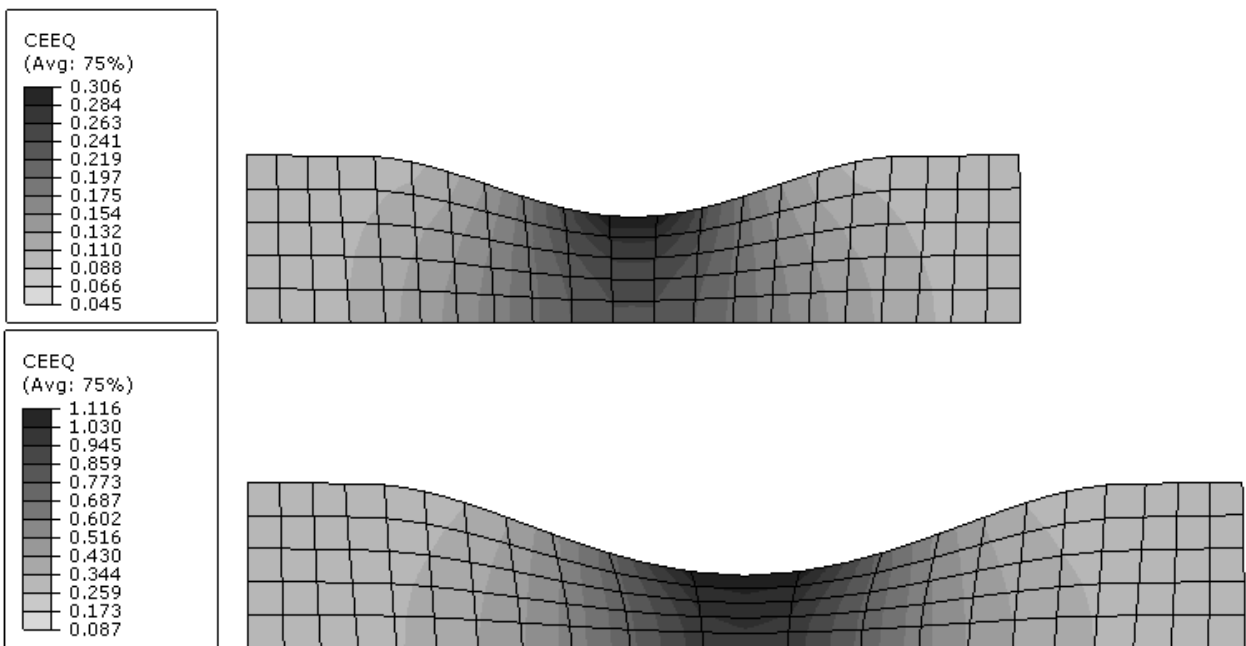


Рис. 5. Поля функции ε_u для $t = (0,5; 1,0)$

Анализ полученного решения позволяет сделать вывод о том, что при данном выборе материальных констант сверхпластичности (а именно параметра скоростной чувствительности m) и выбранной степени несовершенства границы (определяется глубиной шейки d_0) наблюдается почти полная локализации деформации в области устья шейки.

Целевая функция

В рассматриваемых тестовых задачах главный интерес представляет не собственно решение оптимизационной задачи (10), а вид целевой функции. Решение этого вопроса может позволить более точно настроить метод поиска оптимума задачи (10). Так, например, наличие в целевой функции нескольких локальных минимумов осложняет решение оптимизационной задачи: в этом случае возникает необходимость использования дополнительных процедур проверки на глобальность полученного минимума. Очевидно, что в случае более общего вида ОС СП, когда число идентифицируемых материальных констант в нем больше 3, восстановление вида целевой функции является задачей очень сложной и едва ли целесообразной.

Ниже представлен вид целевой функции $F = F(m)$, полученный путем решения ряда прямых краевых задач (8) на основе численного эксперимента ($m^* = 0,425$) при различных значениях m (рис. 6).

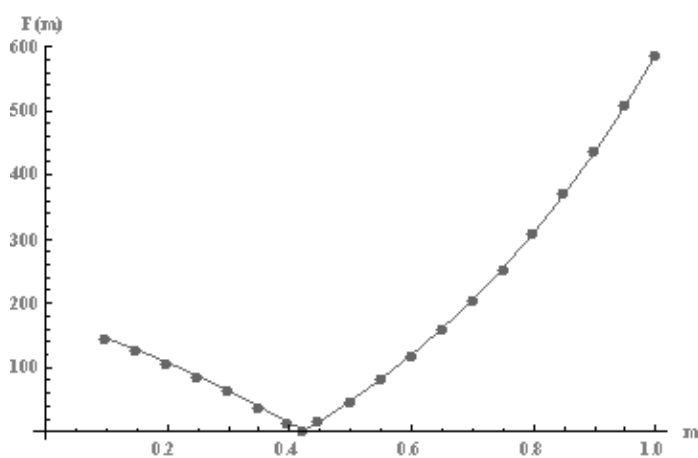


Рис. 6. Целевая функция $F = F(m)$ для $m^* = 0,425$

Следует отметить довольно простой вид полученной целевой функций $F = F(m)$, которая характеризуется наличием единственного минимума, соответствующего оптимальному выбору параметра скоростной чувствительности $m = m^*$.

Таким образом, на основе полученного результата хорошего согласования значений материальных констант, полученных на основе решения оптимизационной задачи, со значениями этих констант, заданных при постановке задачи численного эксперимента, можно сделать вывод о применимости предложенного подхода идентификации к определению материальных констант ОС СП вида $\sigma_u(\xi_u) = K \xi_u^m \varepsilon_u^n$.

Тестовая задача идентификации материальных констант ОС $\sigma_u(\xi_u) = K \xi_u^m \varepsilon_u^n$

В качестве расчетной области в задаче численного эксперимента рассматривается осесимметричный образец с начальными длиной L_0 , радиусом R_0 и геометрическим возмущением боковой поверхности в виде уединенной шейки глубиной d_0 . Рассматривается «жесткий» способ нагружения образца, когда на правом торце задается функция продольных перемещений, обеспечивающая среднюю скорость деформации образца, равную ξ_0 ; продольные перемещения левого торца запрещены (рис. 7).

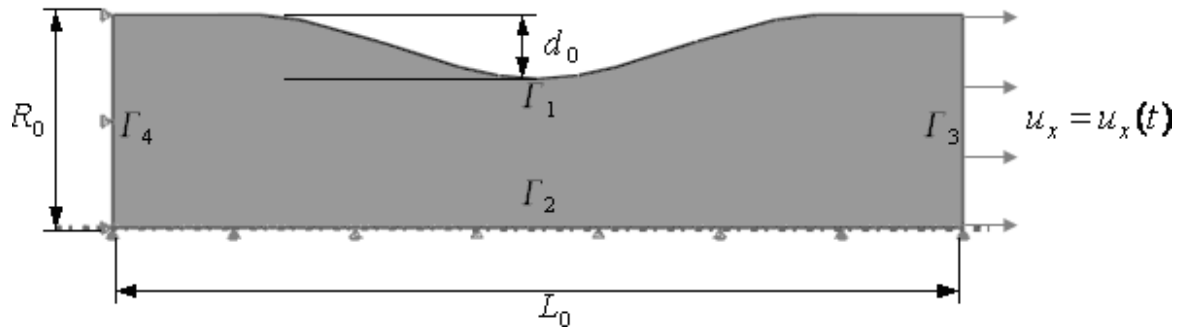


Рис. 7. Расчетная область и граничные условия задачи численного эксперимента

Параметры задачи:

- исходная геометрия образца $L_0 = 2$ м, $R_0 = 0,5$ м, $d_0 = 0,15$ м,
- перемещение правой торцевой поверхности $u_x(t) = L_0(e^{\xi_0 t} - 1)$, $\xi_0 = 10^{-1} \text{ c}^{-1}$,
- упругие свойства материала $E = 10^5$ Па, $\nu = 0,3$,
- сверхпластические свойства материала $K^* = 602,0 \text{ Па} \cdot \text{c}^{m^*}$, $m^* = 0,5$, $n^* = 0,4$,
- расчетное время $t = 2$ с.

Решение задачи численного эксперимента

Ниже представлены поля интенсивностей напряжений σ_u (рис. 8) и деформаций ε_u (рис. 9) для двух моментов времени $t = (1,0; 2,0)$.

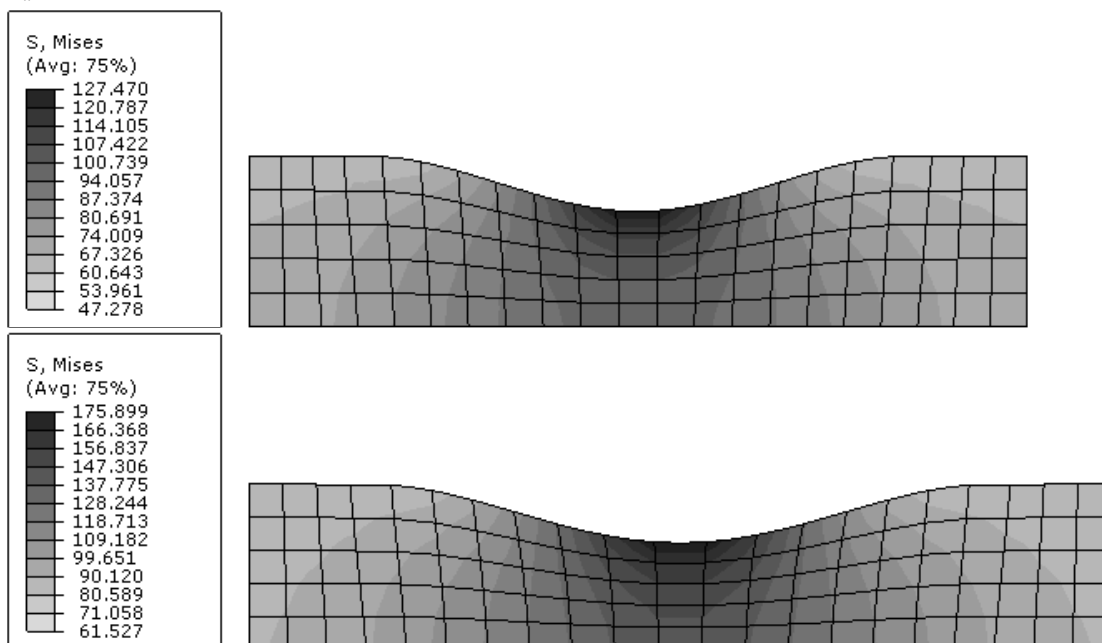
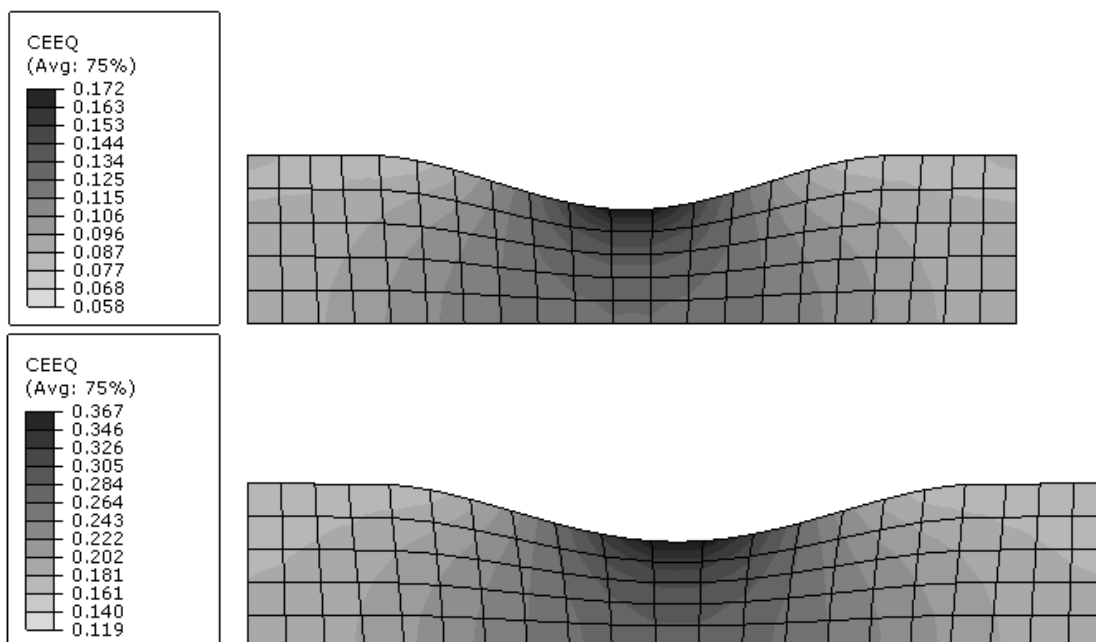


Рис. 8. Поля функции σ_u для $t = (1,0; 2,0)$

Рис. 9. Поля функции ε_u для $t = (1,0; 2,0)$

Целевая функция

Ниже представлен вид целевой функции $F = F(m, n)$, полученный путем решения ряда прямых краевых задач на основе численного эксперимента ($m^* = 0,5$, $n^* = 0,4$) при различных значениях m и n (рис. 10).

Целевая функция $F = F(m, n)$ характеризуется наличием единственного минимума, соответствующего оптимальному выбору материальных параметров $m = m^*$ и $n = n^*$.

Таким образом, на основе полученного результата хорошего согласования значений материальных констант, полученных на основе решения оптимизационной задачи, со значениями этих констант, заданных при постановке задачи численного эксперимента, можно сделать вывод о применимости предложенного подхода идентификации к определению материальных констант ОС СП вида $\sigma_u(\xi_u) = K \xi_u^m \varepsilon_u^n$.

Заключение

В работе предложен новый подход к идентификации материальных констант определяющих соотношений сверхпластичности на основе экспериментов по растяжению сплошных цилиндрических образцов в условиях неоднородного напряженно-деформированного состояния. Сформулирована концептуальная и математическая постановка задачи идентификации материальных констант ОС СП на основе эксперимента с неоднородным НДС.

На основе общей схемы тестирования процедуры идентификации решены две тестовые задачи определения материальных констант ОС СП $\sigma_u(\xi_u) = K \xi_u^m$ и

$\sigma_u(\xi_u) = K \xi_u^m \epsilon_u^n$. Полученные результаты позволяют говорить о работоспособности предложенной методики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-08-00352а).

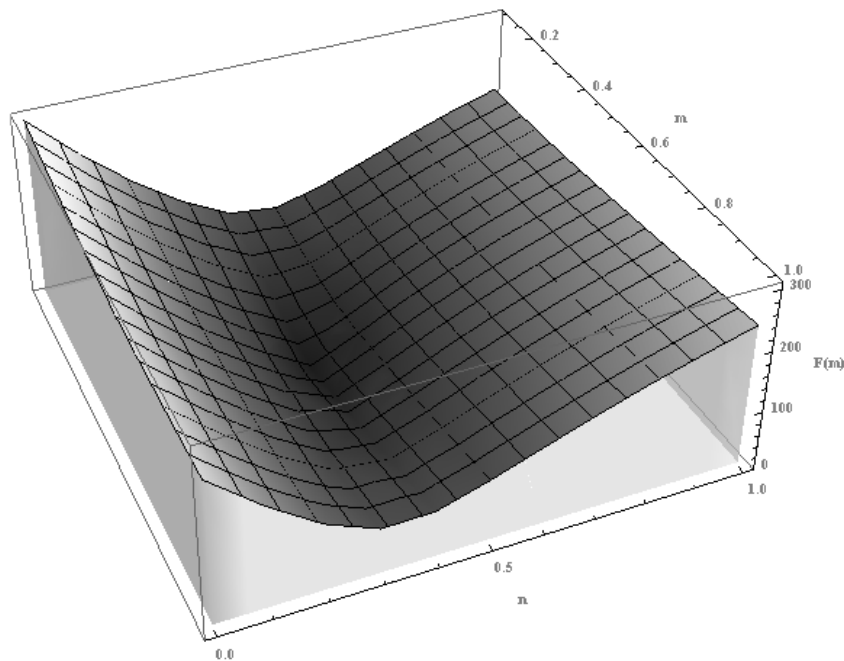


Рис. 10. Целевая функция $F = F(m, n)$ для $m^* = 0,5$, $n^* = 0,4$

Библиографический список

1. Васин Р.Л., Еникеев Ф.У. Введение в механику сверхпластичности – Уфа: Гилем, 1998. – Ч. 1. – 280 с.
2. Васин Р.Л., Еникеев Ф.У. Введение в механику сверхпластичности – Уфа: Гилем, 1999. – Ч. 2. – К. 1. – 460 с.
3. Пресняков А.А. Сверхпластичность металлов и сплавов. – Алма-Ата: Наука, 1969. – 203 с.
4. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 536 с.
5. Wray P.J. Tensile plastic instability as an elevated temperature and its dependence upon strain rate // Journal of applied physics. – 1970. – Vol. 41. – №.8. – P.3347–3352.

Получено 30.06.2009.