

УДК 531/539.3

П.В. Трусов, О.В. Шишкина

Пермский государственный технический университет (Пермь)

ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНООСНОГО РАСТЯЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ПОЛОСЫ ИЗ МАТЕРИАЛА С ОГРАНИЧЕННОЙ ГЛУБИНОЙ ПАМЯТИ

Abstract

The new phenomenological constitutive equation containing memory depth parameter is proposed for superplastic flow. Memory depth is an explicit internal variable which may be defined by microstructural parameters and influenced substantially by previous load actions which are defined by material microstructure. A statement of the quasi-static problem of stability of uniaxial tension of a planar rectangular specimen in the case of medium rheology with partial memory is formulated to certificate the new constitutive equation from the viewpoint of their applicability for describing the regime of superplastic deformation. Geometrically nonlinear analysis is done, criteria of instability are obtained.

Key words: stability, memory depth, partial conservation of local topology

Одной из нерешенных проблем МДТТ до настоящего времени остается задача установления определяющих соотношений (ОС) для описания сверхпластического деформирования (СПД). Сверхпластичность (СП) можно рассматривать как устойчивый режим деформирования по отношению к малым или конечным возмущениям текущей конфигурации тела. Используя эту точку зрения в качестве возможного варианта проверки адекватности ОС СП, в работе [3] авторами предложена процедура аттестации ОС, которая опирается на результаты решения соответствующей задачи устойчивости. В данной работе рассматривается новое ОС СП, содержащее глубину памяти (внутренняя явная переменная [4,5], характеризующая тип материала и процесс воздействия на него), а также проводится проверка этого ОС на наличие интервалов устойчивости при описании СП.

Проблемы описания СПД

В процессах, сопровождающихся большими неупругими изменениями конфигурации тел в режиме СП и в пограничных с ним режимах высокотемпературной вязкопластичности, остро встает проблема описания эволюции микро- и мезоструктуры материалов, определяющей поведение материала. В известных моделях первого порядка [4], используемых для описания СПД [1, 2], характеристики микроструктуры в явном виде не вводятся. В последнее десятилетие для описания СП используются модели обобщенных континуумов материалов второго и более высоких порядков. Однако все указанные модели материалов опираются на широко используемый в МДТТ постулат непрерывности материальных линий и поверхностей (сохранение локальной топологии), в соответствии с которым принимается взаимнооднозначность и непрерывность (вместе с требуемым порядком производных) отображения исходной конфигурации в текущую и наоборот (диффеоморфизм).

Из анализа экспериментальных данных (см., например, [1, 2]) следует, что переход к деформированию в режиме СП характеризуется качественным изменением характера деформирования: постулат диффеоморфизма становится неприменимым, нарушается локальная топология, – оставаясь твердым телом, материал в СП состоянии

одновременно проявляет и свойства жидкости, т.е. занимает промежуточное положение между твердым телом и жидкостью. В процессе воздействий на материал наблюдается его превращение в совершенно другой, для которого исходный способ описания движения (лагранжев отсчетный или материальный) становится неприменимым. Поэтому для описания такого состояния материала авторами предлагается использовать модель континуума с новым определяющим соотношением (ОС) СП, содержащим глубину памяти, учитывающей факт частичного сохранения локальной топологии в деформируемой/текущей среде с точки зрения текущего лагранжева подхода.

Новое ОС с глубиной памяти

Для описания движения произвольной среды (жидкой или твердой) всегда необходимо введение некоторой внешней по отношению к среде системы отсчета и соответствующих (эйлеровых) координат. Для классических жидкостей и газов эйлеровы переменные представляются достаточными для полного описания движения. Классические твердые тела (т.е. удовлетворяющие постулату диффеоморфизма) с памятью требуют для полного описания введения второго набора независимых переменных – лагранжевых. «Промежуточные» среды (сохраняющие локальную топологию на конечных малых интервалах времени, назовем такие среды «квазижидкостями»), обладающие (ограниченной) памятью, также нуждаются в переменных, индивидуализирующих материальные частицы, но здесь нельзя использовать обычные лагранжевы переменные: нарушение локальной топологии ведет к вырождению «материальных линий и поверхностей». В силу этого лагранжевы координаты необходимо вводить в актуальной конфигурации («текущий лагранжев подход»). В отличие от классического варианта указанного подхода в материалах с изменяющейся локальной топологией текущие лагранжевы переменные имеют смысл только на ограниченной (малой) «глубине памяти», не превосходящей по величине время сохранения локальной топологии. Для квазижидкостей на временах, когда локальная топология сохраняется, представляется обоснованным использовать понятия, принимаемые для твердых тел, перемещения, деформации.

Из всего вышесказанного для учета памяти материала предлагается модернизировать стандартное ОС СП¹ для случая одноосного нагружения следующим образом:

$$\sigma = A(1 + \varepsilon)^n \xi^m, \quad \varepsilon = \int_{t-t_1}^t \xi dt, \quad (1)$$

где σ – напряжения течения, A – материальная константа, ε – степень деформации, ξ – скорость деформации, m – параметр скоростной чувствительности материала, n – коэффициент деформационного упрочнения (в данном случае так же, как и m , представляет собой константу материала), t_1 – «глубина памяти» (явная внутренняя переменная, которая должна определяться микроструктурными параметрами, в силу чего в общем случае также зависит от процесса деформирования).

Свойство памяти – одно из наиболее фундаментальных свойств материала, которое характеризует зависимость реакции материала не только от текущих параметров кинематического и термодинамического типов, но и от всей истории их изменения [4]. Из экспериментов известно, что характерные времена «запоминания»

¹ Под *стандартным определяющим соотношением* СП понимается хорошо известное уравнение состояния, для случая одноосного деформирования имеющее вид $\sigma = K \varepsilon^n \xi^m$.

(«следы памяти») различаются для разных материалов: для твердых тел они имеют конечную величину, для жидкостей – стремятся к нулю. Для твердого тела характерно наличие дальнего порядка строения для микрочастиц, силы взаимодействия – дальнедействующие. В процессы массопереноса оказываются вовлеченными большие объемы материала, что требует больших энергетических затрат. Для жидкостей же, напротив, свойственны относительно слабые близкодействующие силы взаимодействия, отсутствие сил и строения дальнего порядка для микрочастиц (атомов, молекул). Элементарные акты массопереноса реализуются локально, любой акт «перескока» молекулы в новое положение затрагивает только ближайших соседей; в связи с этим и потребные для изменения конфигурации силы являются чрезвычайно малыми (естественно, при относительно малых скоростях воздействия). Таким образом, можно сделать вывод о наличии неразрывной связи между строением вещества, определяющим отклик материала на воздействие и степень сохранения локальной топологии, механизмами деформации и величиной глубины памяти материала.

Рассмотрим пример такой связи для материала, испытывающего СПД. Металл в СП состоянии занимает промежуточное положение между жидкостью и твердым телом, в процессе воздействия на него нарушается локальная топология и изменяется глубина памяти материала. Одним из главных параметров, характеризующих строение материала и степень сохранения локальной топологии (а следовательно, и глубину памяти), является внутренняя энергия системы, соотношение кинетической и потенциальной составляющих внутренней энергии. Чем выше это соотношение, тем ближе материал к жидкости, и наоборот. Перераспределение и диссипация накопленной энергии в материале происходят вследствие действия механизмов, реализующих деформацию. Для СП наиболее важными являются процессы, происходящие в границах зерен, в их взаимодействии с деформациями зерен (выход решеточных дислокаций (РД) в границы, диссоциация РД на зернограничные дислокации (ЗГД), взаимодействие вошедших РД с существующими в границах ЗГД, диффузионные процессы в границах, обуславливающие перестройку субструктуры и морфологии границ для облегчения зернограничного скольжения (ЗГС)).

Из физического анализа процесса помимо внутренней энергии можно выделить и другие параметры, которые могут определять величину глубины памяти, например, средний размер зерна. В процессе СПД возможен рост зерен при определенных температурных условиях. Рост зерен приводит к тому, что сложнее будет осуществляться перемещение частиц относительно друг друга, в силу чего локальная топология сохраняется на больших временах; происходит постепенное «выключение» важнейшего для СП механизма ЗГС, следовательно, нужны большие затраты энергии, что можно охарактеризовать как отклонение в сторону «твердого тела». Таким образом, глубина памяти должна увеличиваться с увеличением размера зерна.

Обобщение одноосных ОС на трехмерный случай для задачи устойчивости

Для решения краевых задач необходимо, чтобы одномерные ОС были обобщены на трехмерный случай и записаны в тензорном виде. Проблема обобщения скалярных ОС на пространственный случай существует, но на практике всегда, когда речь идет о записи ОС СП в тензорном виде, принимается следующая гипотеза:

предполагается, что векторные свойства материала в состоянии сверхпластичности такие же, как у изотропной вязкой несжимаемой жидкости, то есть девиаторы напряжений и скоростей деформаций пропорциональны [2]:

$$\mathbf{S} = \kappa \mathbf{D}. \quad (2)$$

Из экспериментальных данных на изотермическое растяжение круговых

цилиндрических образцов (см. [2]) был сделан вывод о приемлемости в первом приближении ОС типа (2) для СП материалов в силу достаточной малости для них следа запаздывания векторных свойств.

Принимая эту гипотезу, запишем новое ОС СП (1) в тензорном виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \sigma_u(d_u, t_1) \frac{\mathbf{D}}{d_u}, \quad \sigma_u = A \left(1 + \int_{t-t_1}^t d_u dt \right)^n \left(\frac{d_u}{d_{u0}} \right)^m, \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ и \mathbf{D} – тензоры напряжений Коши и девиатора деформаций скорости; p – гидростатическое давление; \mathbf{I} – единичный тензор второго ранга; $\sigma_u = \sqrt{(3/2)\mathbf{S}:\mathbf{S}}$ – интенсивность девиатора тензора напряжений \mathbf{S} , $d_u = \sqrt{(2/3)\mathbf{D}:\mathbf{D}}$ – интенсивность девиатора тензора деформации скорости, d_{u0} – оптимальная скорость деформации, соответствующая точке перегиба на сигмоидальной кривой СП [2], n – параметр деформационного упрочнения, m – коэффициент скоростной чувствительности, t – время, t_1 – глубина памяти, A – некоторая константа, имеющая смысл напряжения течения при $d_u = d_{u0}$ и пренебрежимо малой глубине памяти.

Устойчивость

Для проверки ОС (3) с точки зрения его пригодности к описанию режимов СПД предлагается воспользоваться методикой, изложенной в [3].

Рассматривается множество (мощности континуум) квазистатических геометрически нелинейных задач устойчивости одноосного растяжения плоского прямоугольного образца (с непрерывно изменяющимися отношениями высоты полосы к ее длине) из материала с частичным сохранением локальной топологии (наличием глубины памяти) с фиксированной относительной скоростью его концов по отношению к малым нормальным возмущениям конфигурации. Задача ставится в условиях плоскодеформированного состояния. Необходимо получить критерии устойчивости. Математическая постановка этой задачи включает в себя уравнения движения, условия несжимаемости и новое ОС СП с глубиной памяти (3):

$$\begin{cases} \widehat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \widehat{\nabla} \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \sigma_u(d_u, t_1) \frac{\mathbf{D}}{d_u}, \quad \sigma_u = A \left(1 + \int_{t-t_1}^t d_u dt \right)^n \left(\frac{d_u}{d_{u0}} \right)^m \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $\widehat{\nabla}$ – материальный оператор градиента в текущей конфигурации: $\widehat{\nabla} = \widehat{\mathbf{e}}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$, где

$\widehat{\mathbf{e}}^i$ – вектор локального лагранжева базиса в текущей конфигурации, ξ^i – лагранжевы координаты, $i=1,2$; $\boldsymbol{\sigma}$ и \mathbf{D} – тензоры напряжений Коши и девиатора деформаций скорости (заметим, что в силу несжимаемости тензор деформации скорости совпадает со своим девиатором), \mathbf{V} – вектор скорости перемещения. Все поля переменных являются функциями лагранжевых координат.

Граничные условия имеют вид (рис. 1):

– на границах Γ_1 и Γ_3

$$\widehat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (5)$$

где $\widehat{\mathbf{n}}$ – внешняя нормаль к боковой поверхности образца в текущей конфигурации;

– на границах Γ_2 и Γ_4

$$V_1(x_1 = 0) = 0, \quad V_1(x_1 = l) = V_0 > 0, \quad \sigma_{12}(x_1 = 0) = \sigma_{12}(x_1 = l) = 0. \quad (6)$$

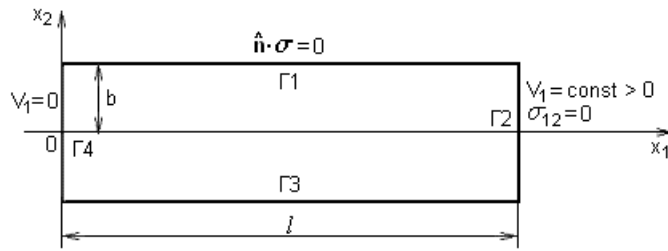


Рис. 1. Расчетная схема

Задача (4)–(6) решалась аналогично подходу, предложенному в [3], поэтому далее изложены лишь основные моменты анализа устойчивости для обобщенного ОС с зависимостью $\sigma_u(d_u)$ в виде

$$\sigma_u = A \left(1 + \int_{t-t_1}^t d_u dt \right)^n \left(\frac{d_u}{d_{u0}} \right)^m.$$

Сначала рассматривалось решение, соответствующее однородному полю деформаций скорости

$$V_1 = x_1 \omega, \quad V_2 = -x_2 \omega, \quad d_u = \omega \sqrt{4/3}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где $\omega \equiv V_0/l$, $\tau \equiv \sqrt{3} \sigma_u(\omega \sqrt{4/3})$. Поле давления p – постоянное, что следует из решения уравнений равновесия, и с учетом ГУ $\sigma_{22} = 0$ $p = -\sigma_u(\omega \sqrt{4/3}) \sqrt{3/4}$.

Такое напряженное состояние соответствует растяжению полосы нормальными силами, равномерно распределенными по ее краям Г2, Г4.

В некоторый рассматриваемый момент времени поля скоростей, давления и оператора Гамильтона (вариация конфигурации), а также внешней нормали к боковой поверхности образца возмущались в окрестности основного движения (однородное деформирование):

$$\mathbf{V}_b = \mathbf{V} + \delta \mathbf{V}, \quad p_b = p + \delta p, \quad \widehat{\mathbf{V}}_b = \widehat{\mathbf{V}} + \delta \widehat{\mathbf{V}}, \quad \widehat{\mathbf{n}}_b = \widehat{\mathbf{n}} + \delta \widehat{\mathbf{n}} \quad (7)$$

где \mathbf{V} , p , $\widehat{\mathbf{V}}$ – поля величин, соответствующие основному движению.

Возмущения (7) подставлялись в постановку для возмущенных полей переменных, далее она линеаризовалась и решалась относительно возмущений радиус-вектора, компоненты которого имеют вид

$$\delta r_1 = \varphi_1(ax_2) \sin(ax_1) e^{\lambda t}, \quad \delta r_2 = \varphi_2(ax_2) \cos(ax_1) e^{\lambda t}, \quad (8)$$

где $\varphi_1(ax_2)$, $\varphi_2(ax_2)$ – некоторые неопределенные функции; $\widehat{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор в текущей конфигурации; величина $a = \pi k/l$ характеризует число полуволн возмущения, укладываемых по длине образца, здесь k – целое число, l – длина образца; x_1, x_2 – пространственные координаты, являющиеся функциями лагранжевых координат; λ – декремент затухания. Из вида возмущений (8) видно, что наложенные возмущения будут иметь тенденцию расти при $\lambda > 0$, что приведет к неустойчивости движения (подробнее см. [3]).

Для решения задачи (4) – (8) и нахождения критерия неустойчивости необходимо вычислить производную вида (обозначим ее q)

$$q = \frac{\partial \ln \sigma_u}{\partial \ln d_u} = \frac{\sigma'_u}{\sigma_u} d_u, \quad (9)$$

где «штрих» обозначает производную по d_u .

$$\sigma'_u = \left[A \left(1 + \int_{t-t_1}^t d_u dt \right)^n \left(\frac{d_u}{d_{u0}} \right)^m \right]' = An \left(1 + \int_{t-t_1}^t d_u dt \right)^{n-1} \left(\int_{t-t_1}^t 1 dt \right) \left(\frac{d_u}{d_{u0}} \right)^m + A \left(1 + \int_{t-t_1}^t d_u dt \right)^n m \frac{(d_u)^{m-1}}{(d_{u0})^m}.$$

Тогда после вычислений q в отношении (9) примет вид

$$q = \frac{\sigma'_u}{\sigma_u} d_u = \frac{nt_1 d_u}{1 + \int_{t-t_1}^t d_u dt} + m.$$

Учитывая, что в основном движении $d_u = \omega \sqrt{4/3}$, получаем

$$q = \frac{\sigma'_u}{\sigma_u} d_u = m + \frac{nt_1 \omega \sqrt{4/3}}{1 + t_1 \omega \sqrt{4/3}}. \quad (10)$$

В результате получаем условие неустойчивости в виде:
для $q < 1$

$$\lambda = \omega \left[-1 + \frac{2 \sin(2h\sqrt{1-q})}{q \sin(2h\sqrt{1-q}) + \sqrt{q(1-q)} \operatorname{sh}(2h\sqrt{q})} \right] > 0, \quad (11_1)$$

для $q > 1$

$$\lambda = \omega \left[-1 + \frac{2 \operatorname{sh}(2h\sqrt{q-1})}{q \sin(2h\sqrt{q-1}) + \sqrt{q(q-1)} \operatorname{sh}(2h\sqrt{q})} \right] > 0, \quad (11_2)$$

предельные случаи для любого h :

при $q = 1$ $\lambda = \omega(h - \operatorname{ch}(h) \operatorname{sh}(h)) / (h + \operatorname{ch}(h) \operatorname{sh}(h)) < 0$ (абсолютная

устойчивость),

при $q = 0$ $\lambda = \infty$ (абсолютная неустойчивость),

при $t_1 \rightarrow \infty$ критерии неустойчивости имеют вид (11₁), (11₂) для $q = m + n$,

и для любых m и n $\lambda < 0$ (абсолютная устойчивость),

где $h = ab$; $a = \pi k / l$, k – целое число. Из условий (11₁), (11₂) следуют критерии неустойчивости, полученные в [3], если принять $n = 0$ или $t_1 = 0$. Безразмерный параметр h выбран в качестве критериального в связи с тем, что содержит информацию о геометрических размерах полосы, а также наложенных возмущениях (число полувольт по длине образца). При фиксированных размерах образца изменение h от 0 до бесконечности характеризует изменение количества полувольт возмущений от 0 до бесконечности, укладываемых по длине образца. При фиксированном числе полувольт он определяет отношение ширины образца к его длине и стремится к нулю в процессе растяжения.

Анализ результатов

На рис. 2–5 представлены зависимости $\lambda(h)$ (11₁) и (11₂) для различных значений параметров n , m и t_1 .

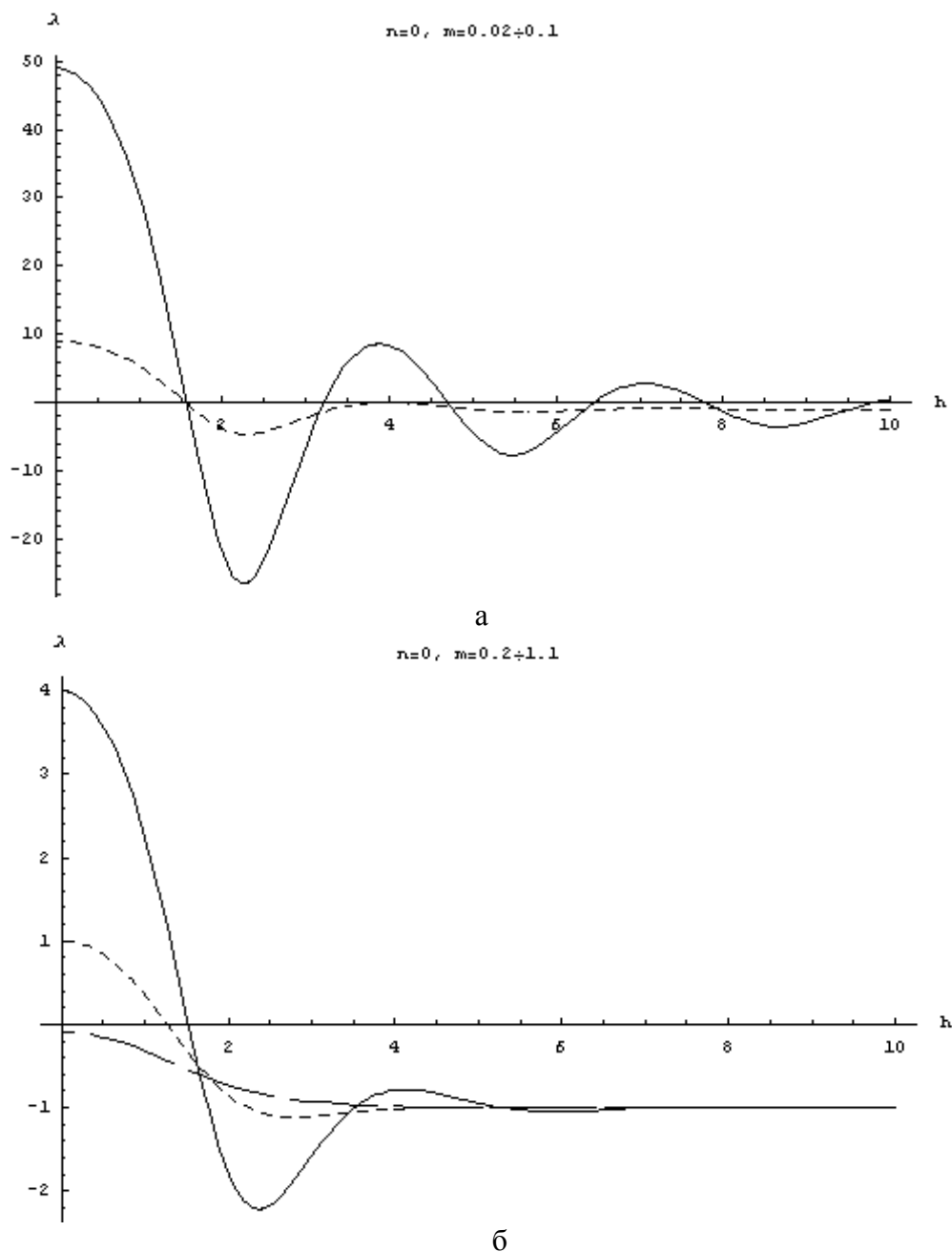


Рис. 2. Зависимость $\lambda(h)$ при $n=0$ для различных m :

а — $m=0,02$, - - - - - $m=0,1$,

б — $m=0,2$, - - - - - $m=0,5$, — — — $m=1,1$

При увеличении m (см. рис. 2) происходит смещение графиков вниз, в область устойчивости, и уменьшение интервала неустойчивости. Исследователи отмечают, что для СП характерно значение параметра скоростной чувствительности m в интервале $0,3-0,7$. При таких значениях выше вероятность попадания в интервал устойчивости.

Аналогичная тенденция наблюдается для зависимости $\lambda(h)$ от параметра деформационного упрочнения n , которую можно видеть на рис. 3. При увеличении n происходит смещение графиков вниз, в область устойчивости, и уменьшение интервала неустойчивости. Малые глубины памяти не рассматривались, так как они уменьшают влияние n на λ .

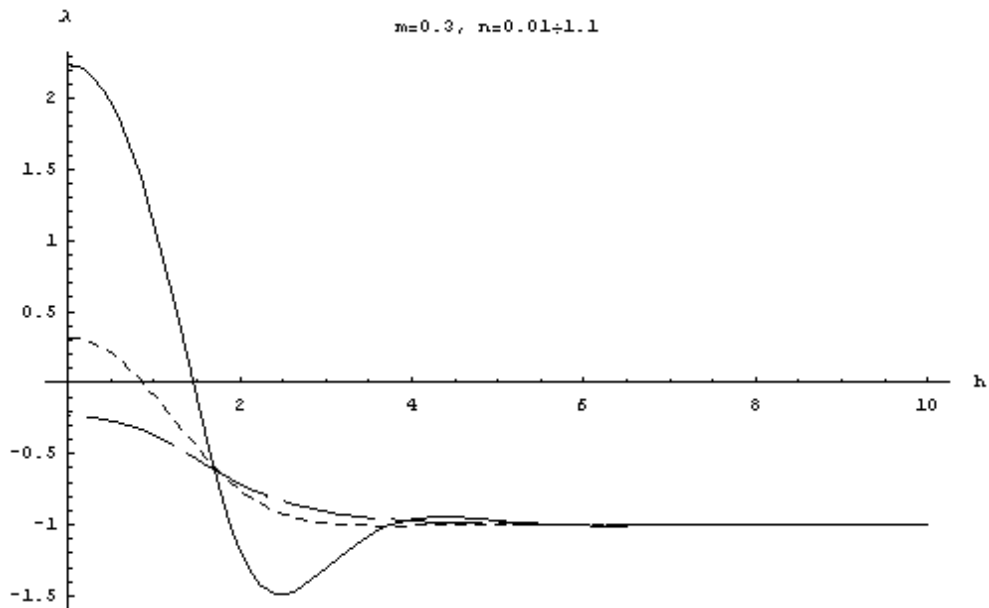


Рис. 3. Зависимость $\lambda(h)$ при $m = 0,3, t_1 = 10$ для различных n :

- $n = 0,01,$
- $n = 0,5,$
- · - $n = 1,1$

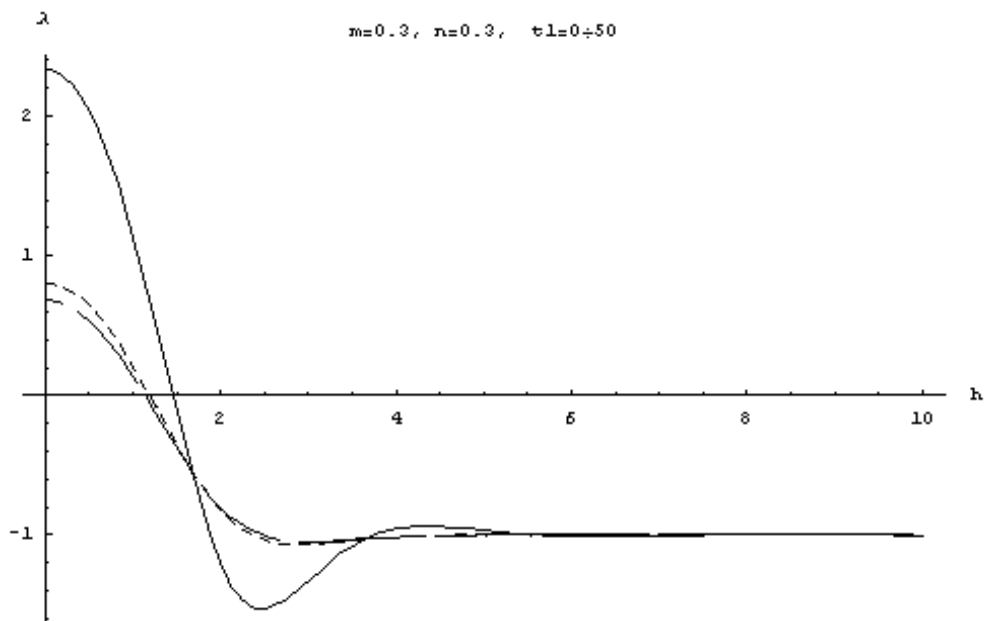


Рис. 4. Зависимость $\lambda(h)$ при $m = 0,3, n = 0,3$ для различных t_1 :

- $t_1 = 0,$
- $t_1 = 5,$
- · - $t_1 = 50$

Из приведенных на рис. 4 результатов следует, что для твердых тел интервал устойчивости больше, нежели для жидкостей. Например, сопоставляя рис. 2 и 4, можно заметить, что верхняя кривая на рис. 4 соответствует «жидкости», а для нее область

неустойчивости самая большая. Глубины памяти $t_1 > 50$ не приведены, т.к. для небольших значений n относительно t_1 значение q выходит на стационар (см. рис. 5).

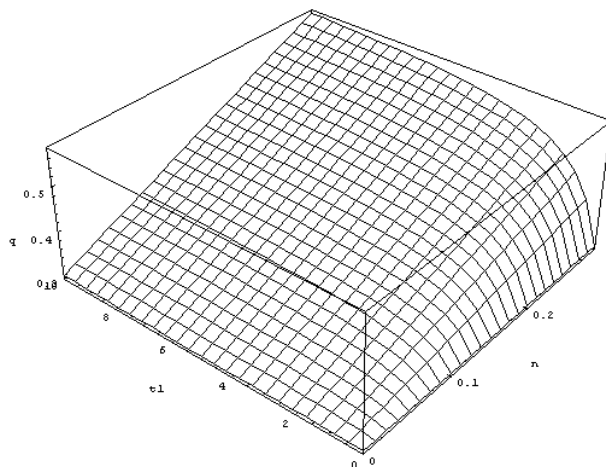


Рис. 5. Зависимость комплекса q от n и t_1

Заключение

В работе было предложено новое феноменологическое ОС СП с глубиной памяти, явной внутренней переменной, которая должна определяться микроструктурными параметрами и должна существенно зависеть от предшествующих воздействий, которые влияют на изменение микроструктуры. С целью аттестации этого ОС была записана постановка квазистатической задачи об устойчивости растяжения полосы (при непрерывном изменении ее геометрических размеров) в случае реологии среды с частичной памятью, выполнен геометрически нелинейный анализ, получены критерии неустойчивости. Можно отметить, что:

- при увеличении параметра скоростной чувствительности m происходит смещение графиков вниз по оси ординат, в область устойчивости, и уменьшение интервала неустойчивости;
- трансформация материала от твердого тела к квазижидкости происходит с уменьшением интервала устойчивости, и наоборот, при переходе от квазижидкости к твердому телу интервал устойчивости увеличивается;
- увеличение параметра деформационного упрочнения n вносит стабилизирующий эффект и смещает графики в область устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-08-00352а).

Библиографический список

1. Васин Р.Л., Еникеев Ф.У. Введение в механику сверхпластичности. – Уфа: Гилем, 1998. – Ч. 1. – 280 с.
2. Васин Р.Л., Еникеев Ф.У. Введение в механику сверхпластичности. – Уфа: Гилем, 1999. – Ч. 2. – К. 1. – 460 с.

3. Трусов П.В., Шишкина О.В. Сравнительный анализ постановок задачи устойчивости // Прикладная механика и техническая физика. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2009. – Т.50. – №1. – С. 110–117.

4. Трусов П.В., Келлер И.Э. Теория определяющих соотношений: курс лекций. Ч. I: Общая теория. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2006. – 173 с.

5. Трусов П.В., Швейкин А.И. Теория определяющих соотношений. Ч. II: Некоторые вопросы теории пластичности. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008. – 243 с.

Получено 20.04.2009