УДК 517.929

Т.Л. САБАТУЛИНА
Пермский государственный технический университет

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ ХАТЧИНСОНА С РАСПРЕДЕЛЁННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В работе рассматривается обобщенное уравнение Хатчинсона с переменным распределенным запаздыванием. Исходя из асимптотических свойств его линейного приближения, получены условия локальной устойчивости решения уравнения Хатчинсона. Для линейных уравнений с распределенным переменным запаздыванием приведены неулучшаемые признаки положительности функции Коши и устойчивости.

Из истории вопроса

Положим, что t – время, отсчитываемое от некоторого значения, которое мы принимаем за нулевой момент, $N(t)$ – величина биологической популяции в момент времени t.

Простейшая гипотеза состоит в предположении, что скорость прироста популяции пропорциональна наличному количеству особей [1]. Это предположение вполне обоснованно, если популяция развивается в идеальных условиях изобилия пищи и отсутствия конкуренции и хищников. Однако с увеличением количества особей конкуренция из-за пищи должна привести к уменьшению скорости прироста. Эту мысль иллюстрирует *уравнение размножения с учетом конкуренции*:

$$\dot{N}(t) = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t), \tag{1}$$

где $r, K > 0$, K – максимальное число особей, способных прокормиться при заданном количестве пищи. Это уравнение более адекватно отражает процесс динамики популяций, но желание добиться еще большего соответствия реальным процессам заставляет подвергнуть пересмотру ряд предположений, при которых строилась модель (1).

Одна из причин, по которым уравнение (1) недостаточно хорошо кореллирует с реальностью, заключается в неявном предположении, что природная популяция мгновенно реагирует на любые изменения в своей численности, что в действительности вряд ли возможно: реакция всегда наступает спустя некоторое время. Разумеется, если это время настолько мало, что его влиянием допустимо пренебречь, то можно по-прежнему ограничиться моделью (1), но если нас интересуют эффекты, при которых запаздывание реакции существенно, то модель (1) требует принципиальных изменений.

Первая математическая модель в биологии, учитывающая запаздывание по времени, по-видимому, была предложена Хатчинсоном в 1948 г. [2]. Вместо уравнения (1) им изучалось так называемое *обобщенное логистическое уравнение*

$$\dot{N}(t) = r\left(1 - \frac{N(t-h)}{K}\right)N(t),\ t \ge 0, \tag{2}$$

© Сабатулина Т.Л., 2009.

где $r, K, h > 0$. Уравнение (2), как и (1), имеет два положения равновесия: $N = 0$ – неустойчивое и $N = K$ – устойчивое.

Предложенная Хатчинсоном модель принадлежит к классу функционально-дифференциальных уравнений с сосредоточенным последействием. Такое запаздывание учитывает размер популяции в момент времени, отстоящий от данного на некоторое определенное число временных единиц, причем предполагается, что значение $\dot{N}$ в точке t определяется значением N только в точке $t-h$, а влиянием значения N в других точках (сколь угодно близких к $t-h$) мы пренебрегаем. Однако даже когда сосредоточенное запаздывание достаточно хорошо описывает динамику реальной популяции, вполне очевидно, что на самом деле имеет место некоторое «размытие» запаздывания вблизи какого-то среднего значения (особенно важно это в моделях, где стремятся учесть вероятностные эффекты). В этом случае естественно обобщить уравнение (2), заменив слагаемое $N(t-h)$ на $\int_{t-h}^{t} N(s)ds$. Получим уравнение

$$\dot{N}(t) = r\left(1 - \frac{1}{K}\int_{t-h}^{t} N(s)ds\right)N(t),\ t \geq 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) назовем автономным *уравнением Хатчинсона с распределенным запаздыванием*. Если же предположить, что параметры уравнения (3) зависят от времени, то получаем неавтономный аналог уравнения (3):

$$\dot{N}(t) = r(t)\left(1 - \frac{1}{K}\int_{t-h(t)}^{t} k(t,s)N(s)ds\right)N(t),\ t \geq 0. \tag{4}$$

Как известно [3, § 5.2], многие асимптотические свойства решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений определяются соответствующими свойствами их линейных приближений. Поэтому естественно сначала привести ряд результатов об асимптотических свойствах решений линейного уравнения с распределенным запаздыванием. Эти утверждения суммируют результаты работ [4–7].

Линейное уравнение с распределенным запаздыванием

Пусть $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\Delta = \left\{(t,s) \in \mathbb{R}_+^2 : t \geq s\right\}$. Через L_1 будем обозначать пространство суммируемых на $\mathbb{R}_+$ функций таких, что $\int_0^\infty |x(t)|dt < \infty$, с нормой $\|x\| = \int_0^\infty |x(t)|dt$.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) + \int_{t-h(t)}^{t} k(t,s)x(s)ds = f(t),\ t \in \mathbb{R}_+, \tag{5}$$

где $k:\mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$, $h:\mathbb{R}_+ \to (0,+\infty)$, функции $k(t,\cdot)$ и f локально суммируемы, функции $k(\cdot,s)$, h измеримы по Лебегу, функция $\rho(t)=\int_{t-h(t)}^{t} k(t,s)ds$ локально суммируема. Решение уравнения (5) принято считать принадлежащим классу абсолютно непрерывных на каждом отрезке функций. Здесь и далее будем считать, что при отрицательных значениях аргумента функция x равна нулю. В дальнейшем, если пределы интегрирования становятся отрицательными в некоторых точках, то подынтегральную функцию будем полагать равной нулю при отрицательных значениях аргумента.

Уравнение с постоянным ядром и запаздыванием

$$\dot{x}(t)+k\int_{t-h}^{t} x(s)ds = f(t),\ t\in\mathbb{R}_+, \tag{6}$$

назовем автономным уравнением.

Приведем для уравнения (5) ряд признаков знакоопределенности и устойчивости.

Как известно [8, с. 84, теорема 1.1], решение уравнения (5) при любом заданном начальном условии $x(0)$ и любой правой части f существует, единственно и представимо в виде

$$x(t)=X(t)x(0)+\int_0^t C(t,s)f(s)ds. \tag{7}$$

Функцию $C(t,s)$ называют *функцией Коши* уравнения (5), а функцию $X(t)=C(t,0)$ – *фундаментальным решением* уравнения (5). Функция Коши является решением однородного уравнения [3, с. 96–97]

$$\frac{\partial}{\partial t}C(t,s)+\int_{t-h(t)}^{t} k(t,\xi)C(\xi,s)ds = f(t),\ t\ge s, \tag{8}$$

с начальным условием $C(s,s)=1$. При $\eta<s$ полагаем $C(\eta,s)=0$.

Формула (7) позволяет свести вопросы об асимптотических свойствах решения уравнения (5) к вопросу об асимптотических свойствах функции Коши уравнения (5).

Теорема 1 [4].*Функция Коши уравнения* (5) *положительна при всех* $(t,s)\in\Delta$, *если*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\ge 0}\int_{t-h(t)}^{t}\rho(s)ds \le 1/e. \tag{9}$$

Отметим, что константа $1/e$ в оценке (9) является точной: в работе [4] построен пример, показывающий, что увеличение $1/e$ на любую, сколь угодно малую величину ведет к потере положительности функции Коши.

Приведем некоторые асимптотические свойства функции Коши, связанные с ее положительностью.

Теорема 2 [4]. *Пусть выполнено неравенство* (9). *Тогда для любого фиксированного* s *функция* $C(t,s)$ *имеет при* $t \to \infty$ *конечный предел, причем*:

а) если $\rho \in L_1$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} C(t,s) > 0$; *б) если* $\rho \notin L_1$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} C(t,s) = 0$.

Пусть существуют $\sup\limits_{t} k(t,s) = k$, $\sup\limits_{t} h(t) = h$.

Теорема 3 [5]. *Функция Коши уравнения* (5) *положительна, если* $kh^2 \le \xi(2-\xi)$, *где* ξ *– положительный корень уравнения* $e^{-\xi} = 1 - \xi/2$.

Приближенные вычисления дают $\xi \approx 1{,}5936$, а $\xi(2-\xi) \approx 0{,}6476$.

Для уравнения (6) условия теоремы 3 являются необходимыми и достаточными.

Определение. Уравнение (5) назовем

- *экспоненциально устойчивым*, если существуют такие $M, \gamma > 0$, что для всех $(t,s) \in \Delta$

$$\left|C(t,s)\right| \le Me^{-\gamma(t-s)}; \tag{10}$$

- *равномерно устойчивым*, если $\sup\limits_{(t,s)\in\Delta} \left|C(t,s)\right| < \infty$.

Теорема 4 [6]. *Если*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_{t-h(t)}^{t} \rho(s)ds < 3/2, \tag{11}$$

то найдутся такие $M, \gamma > 0$, *что функция Коши уравнения* (5) *при всех* $(t,s) \in \Delta$ *имеет оценку* $\left|C(t,s)\right| \le Me^{-\gamma\int_s^t \rho(\xi)d\xi}$.

Если

$$\sup_{t\ge 0} \int_{t-h(t)}^{t} \rho(s)ds \le 3/2, \tag{12}$$

то уравнение (5) *равномерно устойчиво.*

Следствие 1. *Если* $\rho \notin L_1$ *и выполнено условие* (11), *то решение уравнения* (5) *имеет нулевой предел.*

Следующий пример показывает, что константу $3/2$ в оценке (12) нельзя увеличить без потери равномерной устойчивости.

Пример 1. Пусть в уравнении (5) $x(0) = 1$.

Рассмотрим отрезок $[0,2]$, положим на нем $h(t)=0$. Тогда на этом отрезке $x(t)=1$.

Рассмотрим отрезок $\left[2, 2+\frac{3}{2}+\frac{1}{n}\right]$, положим на нем $h(t)=t-2+\frac{1}{n}$,

$$k(t,s)=\begin{cases} n, & \text{если } s\in[2-1/n, 2], \\ 0, & \text{если } s\in[0, 2-1/n)\cup(2,t]. \end{cases}$$

Легко видеть, что на этом отрезке $x(t)=3-t$.

Рассмотрим отрезок $[2+3/2+1/n, 2+3/2+1/n+1]$, положим на нем $h(t)=3/2+1/n$,

$$k(t,s)=\begin{cases} n, & \text{если } s\in[t-3/2-1/n, t-3/2], \\ 0, & \text{если } s\in[0, t-3/2-1/n)\cup(t-3/2,t]. \end{cases}$$

Непосредственный подсчет убеждает, что на этом отрезке $x(t)=\frac{1}{2}t^2-\left(\frac{9}{2}+\frac{1}{2n}\right)t+\frac{73}{8}+\frac{7}{4n}$. Следовательно, $x\left(\frac{9}{2}+\frac{1}{n}\right)=-1-\frac{1}{2n}$.

Функцию $k(t,s)$ по первому аргументу и запаздывание h продолжим периодически на полуось $\mathbb{R}_+$ с периодом $T=9/2+1/n$. Найдем решение уравнения в точках, кратных периоду: $x(2T)=x^2(T)$, и далее, для любого $k\geq 2$ $x(kT)=x^k(T)=(-1)^k\left(1+\frac{1}{2n}\right)^k$. Очевидно, что $\sup\limits_k |x(kT)|=\infty$, то есть решение рассматриваемого уравнения неограниченно, то есть уравнение не является равномерно устойчивым.

С другой стороны, $\sup\limits_{t\geq 0}\int_{t-h(t)}^{t}\rho(s)ds=3/2+1/n>3/2$, причем $3/2+1/n$ может быть сколь угодно близким к $3/2$. ▲

Теперь приведем пример, показывающий, что в условии (11) нельзя заменить строгое неравенство нестрогим, а в условии (12) нельзя заменить точную верхнюю грань верхним пределом.

Пример 2. Пусть в уравнении (5) $x(0)=1$.

1. Рассмотрим отрезок $[0,T_1]$, где $T_1=\frac{9}{2}+1$. На отрезке $[0,2]$ положим $h(t)=0$; тогда на этом отрезке $x(t)=1$. На отрезке $[2, 2+3/2+1]$ положим $h(t)=t-2+1$, а

$$k(t,s)=\begin{cases} 1, & \text{если } s\in[2-1, 2], \\ 0, & \text{если } s\in[0, 2-1)\cup(2,t]. \end{cases}$$

Легко видеть, что на этом отрезке $x(t)=3-t$.

Рассмотрим отрезок $[2+3/2+1, 2+3/2+1+1]$, положим на нем $h(t)=3/2+1$,

$$k(t,s)=\begin{cases} 1, & \text{если } s\in[t-3/2-1, t-3/2], \\ 0, & \text{если } s\in[0, t-3/2-1)\cup(t-3/2,t]. \end{cases}$$

Непосредственный подсчет убеждает, что на этом отрезке $x(t)=\frac{t^2}{2}-\left(\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\right)t+\frac{73}{8}+\frac{7}{4}$. Следовательно, $x(T_1)=-1-\frac{1}{2}$.

2. Рассмотрим отрезок $[T_1,T_2]$, где $T_2=T_1+9/2+1/2$. На отрезке $[T_1,T_1+2]$ положим $h(t)=0$; тогда на этом отрезке $x(t)=x(T_1)$. На отрезке $[T_1+2,T_1+2+3/2+1/2]$ положим $h(t)=t-T_1-2+1/2$, а

$$k(t,s)=\begin{cases}2, & \text{если } s\in[T_1+2-1/2,T_1+2],\\ 0, & \text{если } s\in[0,T_1+2-1/2)\cup(T_1+2,t].\end{cases}$$

Легко видеть, что на этом отрезке $x(t)=x(T_1)(T_1+3-t)$.

Рассмотрим отрезок $\left[T_1+2+\frac{3}{2}+\frac{1}{2},T_1+2+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+1\right]$, положим на нем $h(t)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$,

$$k(t,s)=\begin{cases}2, & \text{если } s\in[t-3/2-1/2,t-3/2],\\ 0, & \text{если } s\in[0,t-3/2-1/2)\cup(t-3/2,t].\end{cases}$$

На этом отрезке $x(t)=x(T_1)\left(\frac{t^2}{2}-\left(T_1+\frac{9}{2}+\frac{1}{4}\right)t+10+\frac{19}{4}T_1+\frac{1}{2}T_1^2\right)$. Следовательно, $x(T_2)=x(T_1)(-1-1/4)=(1+1/2)(1+1/4)$.

3. Рассмотрим отрезок $[T_{k-1},T_k]$, где $T_k=T_{k-1}+9/2+1/k$. На отрезке $[T_{k-1},T_{k-1}+2]$ положим $h(t)=0$; тогда на этом отрезке $x(t)=x(T_{k-1})$. На отрезке $\left[T_{k-1}+2,T_{k-1}+2+\frac{3}{2}+\frac{1}{k}\right]$ положим $h(t)=t-T_{k-1}-2+\frac{1}{k}$, а

$$k(t,s)=\begin{cases}k, & \text{если } s\in[T_{k-1}+2-1/k,T_{k-1}+2],\\ 0, & \text{если } s\in[0,T_{k-1}+2-1/k)\cup(T_{k-1}+2,t].\end{cases}$$

Легко видеть, что на этом отрезке $x(t)=x(T_{k-1})(T_{k-1}+3-t)$.

Рассмотрим отрезок $\left[T_{k-1}+2+\frac{3}{2}+\frac{1}{k},T_{k-1}+2+\frac{3}{2}+\frac{1}{k}+1\right]$, положим на нем $h(t)=\frac{3}{2}+\frac{1}{k}$,

$$k(t,s)=\begin{cases}k, & \text{если } s\in[t-3/2-1/k,t-3/2],\\ 0, & \text{если } s\in[0,t-3/2-1/k)\cup(t-3/2,t].\end{cases}$$

На этом отрезке $x(t)=x(T_{k-1})\left(\frac{t^2}{2}-\left(T_{k-1}+\frac{9}{2}+\frac{1}{2k}\right)t+\frac{73}{8}+\frac{7}{4n}+\left(\frac{9}{2}+\frac{1}{2k}\right)T_1+\frac{1}{2}T_1^2\right)$.

Следовательно, $x(T_k)=x(T_{k-1})\left(-1-\frac{1}{2k}\right)=(-1)^k\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{2j}\right)$. Так как $\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2j}\right)$ расходится к бесконечности, то $\lim_{k\to\infty}|x(T_k)|=\infty$, то есть рассматриваемое уравнение неустойчиво. С другой стороны, $\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{t-h(t)}^{t}\rho(s)ds = 3/2$, следовательно, неравенство (11) нельзя заменить нестрогим, а в неравенстве (12) нельзя заменить $\sup_t$ на $\overline{\lim_{t\to\infty}}$. ▲

Теперь рассмотрим уравнение (6). Поскольку оно автономно, для него удается получить необходимый и достаточный признак экспоненциальной устойчивости. Вообще, если решение таких уравнений стремится к нулю, то со скоростью не ниже экспоненциальной.

Теорема 5 [9, 10, 7]**.** *Уравнение* (6) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда* $0 < kh^2 < \pi^2/2$.

Уравнение (6) *равномерно устойчиво тогда и только тогда, когда* $0 \le kh^2 \le \pi^2/2$.

Асимптотические свойства решения уравнения Хатчинсона

Вернемся к исследованию уравнения Хатчинсона. В нем $K > 0$, $k : \mathbb{R}_+^2 \to (0,+\infty)$, $h, r : \mathbb{R}_+ \to (0,+\infty)$, функция $k(t,\cdot)$ локально суммируема, функции $k(\cdot,s)$, r, h измеримы по Лебегу на $\mathbb{R}_+$, $\int_{t-h(t)}^{t} k(t,s)ds = 1$. При отрицательных t решение доопределено начальной функцией φ.

Легко видеть, что для уравнения (4) $N(t) \equiv K$ является точкой равновесия. С помощью замены переменных $N(t) = Ke^{-x(t)}$ уравнение (4) сводится к уравнению

$$\dot{x}(t) = -r(t)\int_{t-h(t)}^{t} k(t,s) f(x(s))ds, \tag{13}$$

где $f(x) = 1 - e^{-x}$. Для уравнения (13) точкой равновесия является $x = 0$. Так как $f(x) = x + O(x^2)$, то линейным приближением уравнения (4) является уравнение

$$\dot{x}(t) + r(t)\int_{t-h(t)}^{t} k(t,s)x(s)ds = 0. \tag{14}$$

Введем функцию $g(x) = x - f(x) = x + e^{-x} - 1$. Очевидно, что при $x \ne 0$ $g(x) > 0$, а $g(0) = 0$. Перепишем уравнение (13) в виде

$$\dot{x}(t) + r(t)\int_{t-h(t)}^{t} k(t,s)x(s)ds = r(t)\int_{t-h(t)}^{t} k(t,s)g(x(s))ds \tag{15}$$

или, в силу представления (7), в эквивалентной интегральной форме:

$$x(t) = X_0(t)x(0) + \int_0^t C_0(t,s)r(s)\int_{s-h(s)}^{s} k(s,\xi)g(x(\xi))d\xi ds. \tag{16}$$

Здесь X_0 и C_0 – фундаментальное решение и функция Коши уравнения (14).

Далее будем считать, что для начальной функции уравнения (4) выполнены дополнительные условия: при $t<0$ $\varphi(t)<K$, $N(0)<K$, то есть $x(0)>0$ и начальная функция $\varphi_0=\ln\dfrac{K}{\varphi}$ уравнения (13) положительна. Случай $\varphi(t)>K$, $N(0)>K$ рассматривается аналогично, если сделать замену $N(t)=Ke^{x(t)}$. Заметим, что если $\varphi(t)\equiv K$, то $N(t)\equiv K$.

Применим указанные выше результаты для линейных уравнений к уравнению Хатчинсона. В зависимости от условий на параметры исходной задачи к уравнению (14) целесообразно применять разные теоремы. Если никаких условий, кроме приведенных выше, на параметры r, k и h не накладывать, то лучшим вариантом будет применение теоремы 1. Для уравнения (14) $\rho(t)=r(t)\int_{t-h(t)}^{t}k(t,s)ds=r(t)$. Следовательно, если $\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0}\int_{t-h(t)}^{t}r(s)ds\leq 1/e$, то $C_0(t,s)>0$. Тогда из соотношения (16) вытекает, что

$$x(t)\geq X_0(t)x(0). \tag{17}$$

Так как $x(0)>0$, то $x(t)>0$, а $f(x(t))>0$. Поэтому из уравнения (13) получаем, что $\dot{x}<0$, то есть x монотонно убывает и, следовательно, имеет предел на бесконечности. Возвращаясь к функции N, получаем следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть* $\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq 0}\int_{t-h(t)}^{t}r(s)ds\leq 1/e$. *Тогда решение уравнения* (4) *монотонно возрастает, ограничено константой* K *и имеет предел, причем*:

а) если $r\in L_1$, *то* $\lim_{t\to\infty}N(t)<K$; *б) если* $r\notin L_1$, *то* $\lim_{t\to\infty}N(t)=K$.

Доказательство. Пункт а) следует из неравенства (17) и теоремы 2. Остается доказать пункт б). Перепишем уравнение (13) в виде

$$x(t)-x(0)=-\int_0^t r(s)\int_{s-h(s)}^{s}k(s,\xi)f(x(\xi))d\xi ds.$$

Допустим, что $\lim_{t\to\infty}N(t)<K$, то есть $\lim_{t\to\infty}x(t)=c>0$ и $f(x)\geq 1-e^{-c}>0$. Тогда $x(0)-x(t)>\left(1-e^{-c}\right)\int_0^t r(s)ds$, но функция в левой части ограничена, а в правой – неограничена. Следовательно, допущение неверно и $\lim_{t\to\infty}N(t)=K$. ▲

Пусть теперь параметры уравнения (13) подчинены более жестким условиям: например, уравнение является автономным, то есть имеет вид (3). Тогда лучший результат дает применение теоремы 3. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 6, получаем следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть* $k = 1/h$ *и* $rh \le \xi(2-\xi)$, *где* ξ *– положительный корень уравнения* $e^{-\xi} = 1 - \xi/2$. *Тогда решение уравнения* (3) *монотонно возрастает и имеет предел* $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = K$.

Теоремы 6 и 7 были получены при допущении, что функция Коши уравнения (14) положительна, то есть справедливы теоремы 1 и 3 соответственно. Теперь получим некоторые результаты исходя из того, что уравнение (14) экспоненциально устойчиво (дополнительные условия на начальную функцию не требуются), то есть будем полагать, что выполнены условия теорем 4 и 5. Оказывается, при достаточно малых начальной функции и начальном значении решение уравнения (4) будет вести себя так же, как решение линейного приближения (14).

Теорема 8.

а) *Пусть* $r \in L_1$. *Тогда решение уравнения* (4) *ограничено*.

б) *Пусть* $r \notin L_1$ *и выполнено неравенство*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_{t-h(t)}^{t} r(s)ds < 3/2. \tag{18}$$

Тогда при достаточно малых $\|\varphi\|_C$ *и* $|N(0)|$ *решение уравнения* (4) *стремится к точке равновесия* K, *причем* $|N(t) - K| \le Me^{-\beta\int_0^t r(\xi)d\xi}$.

Доказательство. Произведем в уравнении (15) замену переменных: $u = \psi(t) = \int_0^t r(\xi)d\xi$, $y(u) = x(\psi^{-1}(u))$. Тогда оно превращается в следующее уравнение:

$$y'(u) + \int_{u-H(u)}^{u} K(u,v)y(v)dv = \int_{u-H(u)}^{u} K(u,v)g(y(v))dv, \tag{19}$$

где $H(u) = \int_{\psi^{-1}(u)-h(\psi^{-1}(u))}^{\psi^{-1}(u)} r(v)dv$, $K(u,v) = \dfrac{k(\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v))}{r(\psi^{-1}(v))}$, $\int_{u-H(u)}^{u} K(u,v)dv = 1$,

а поскольку выполнено неравенство (18), то $H(u)$ ограничено.

Если $r \in L_1$, то уравнение (19) оказывается заданным на конечном полуинтервале $\left[0, \int_0^\infty r(\xi)d\xi\right)$. Продолжим параметры уравнения (19) произвольным образом на полуось, тогда решение уравнения (19) будет непрерывным на полуоси, следовательно, ограниченным на данном интервале. Значит, решение уравнения (4) ограничено на $\mathbb{R}_+$.

Далее будем считать, что $r \notin L_1$.

Так как выполнено неравенство (18), для функции Коши C_0 уравнения

$$y'(u) + \int_{u-H(u)}^{u} K(u,v)y(v)dv = 0$$

при всех $(u,v)\in\Delta$ справедлива оценка

$$\left|C_0(u,v)\right|\le Ae^{-\gamma(u-v)}. \tag{20}$$

Поскольку $g(x)=O(x^2)$, имеем

$$\lim_{\|y\|_H\to 0}\sup_u \frac{\left|\int_{u-H(u)}^{u}K(u,v)g(y(v))dv\right|}{\|y\|_H}=0, \tag{21}$$

где $\|y\|_H=\max\limits_{\xi\in[t-H,t]}|y(\xi)|$.

Обозначим $\omega=\sup\limits_u H(u)$, $\phi(u)=\varphi_0(\psi^{-1}(u))$. Зафиксируем $\varepsilon>0$ такое, что $-\beta=A\varepsilon e^{\gamma\omega}-\gamma<0$. По данному ε в силу (21) найдется $\delta>0$, для которого из $\|y\|_H<\delta$ следует $\int_{u-H(u)}^{u}K(u,v)g(y(v))dv<\varepsilon\|y\|_H$. Выберем $y(0)$ и ϕ такими, чтобы $Ae^{\gamma\omega}\left(|y(0)|+\omega\|\phi\|_C\right)<\delta$, и покажем, что тогда для решения уравнения (19) справедлива оценка $\sup\limits_{u\ge 0}|y(u)|<\delta$.

Предположим, что это неравенство неверно. Тогда можно указать такое $T>0$, что $|y(T)|=\delta$, а $|y(u)|<\delta$ при $u<T$. Рассмотрим уравнение (19) на отрезке $[0,T]$. Из (7), (20), (21) с учетом выбора δ получаем

$$y(u)\le|C_0(u,0)||y(0)|+\int_0^u|C_0(u,v)|\int_{v-H(v)}^{v}K(v,\xi)g(y(\xi))d\xi dv+\|\phi\|_C\int_0^{\omega}|C_0(u,v)|dv\le$$

$$\le Ae^{-\gamma u}\left(|y(0)|+\omega\|\phi\|_C\right)+A\varepsilon\int_0^u e^{-\gamma(u-v)}\sup_{\xi\in[v-\omega,v]}|y(\xi)|dv.$$

Следовательно,

$$\sup_{\xi\in[u-\omega,u]}|y(\xi)|\le Ae^{\gamma\omega}e^{-\gamma u}\left(|y(0)|+\omega\|\phi\|_C\right)+A\varepsilon e^{\gamma\omega}\int_0^u e^{-\gamma(u-v)}\sup_{\xi\in[v-\omega,v]}|y(\xi)|dv.$$

По обобщенной теореме Гронуолла–Беллмана [11, теорема 1.3.16, с. 41] при любом $u\in[0,T)$

$$|y(u)|\le Ae^{\gamma\omega}\left(|y(0)|+\omega\|\phi\|_C\right)e^{(-\gamma+\varepsilon Ae^{\gamma\omega})u}. \tag{22}$$

В силу непрерывности y и выбора $y(0)$ и ϕ имеем $\delta=|y(T)|<\delta$, что невозможно. Таким образом, предположение о конечности T ведет к противоречию, следовательно, оценка (22) справедлива при всех u. Тогда

$$|x(t)|\le Ae^{\gamma\omega}\left(|x(0)|+\omega\|\phi\|_C\right)e^{(-\gamma+\varepsilon Ae^{\gamma\omega})\int_0^t r(\xi)d\xi}.$$

Отсюда следует, что если $r \notin L_1$, то $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. С учетом замены $N(t) = Ke^{-x(t)}$ получаем, что $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = K$. Так как при малых x функции $1-e^{-x}$ и x эквивалентны, для разности $N-K$ имеем оценку $\left|N(t)-K\right| \le Me^{-\beta\int_0^t r(\xi)d\xi}$. ▲

Применяя теорему 5 к уравнению (3), приходим к следующей теореме.

Теорема 9. *Пусть* $k = 1/h$ *и* $0 < rh < \pi^2/2$. *Тогда при достаточно малых* $\|\varphi\|_C$ *и* $|N(0)|$ *решение уравнения* (3) *имеет предел, причем* $\left|N(t)-K\right| \le Me^{-\beta t}$.

Заметим, что теоремы 6–9 имеют разные области применимости: теоремы 6 и 8 позволяют работать с уравнениями, ядра которых имеют суммируемые особенности; теоремы 7 и 9 в этом случае неприменимы. Для автономных уравнений работают все четыре теоремы, но чем ближе коэффициенты к постоянным, тем лучший результат дают теоремы 7 и 9 по сравнению с теоремами 6 и 8.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Удмуртский гос. ин-т. – Ижевск: Регуляр. и хаот. динамика: Ижев. респ. тип., 2000. – 367 с.
2. Hutchinson G.E. Circular causal in ecology // Ann. N.Y. Acad. Sci. – 1948. – No50. – P. 221–246.
3. Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. – 230 с.
4. Сабатулина Т.Л. Признаки положительности функции Коши уравнения с распределенным запаздыванием // Вычислительная механика. – 2008. – № 7. – С. 140–149.
5. Малыгина В.В. О положительности функции Коши линейного уравнения с распределенным запаздыванием // Вестник ПГТУ. – 2006. – № 2. – С. 80–84.
6. Малыгина В.В. Некоторые признаки устойчивости функционально-дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 7(342). – С.46–53.
7. Сабатулина Т.Л. Об устойчивости одного класса уравнений с распределенным запаздыванием // Вестн. Перм. ун-та. Математика. Механика. Информатика. – 2005. – № 2. – С. 110–113.
8. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально–дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.
9. Oliveira J.C.F. de, Carvalho L.A.V. A Lyapunov functional for a retarded differential equation // SIAM. J. Math. Anal. – 1985. – No 16. – P. 1295–1305.
10. Вагина М.Ю. Логистическая модель с запаздывающим усреднением // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 4. – С. 167–173.
11. Мартынюк А.А., Гутовски Р. Интегральные неравенства и устойчивость движения. – Киев: Наук. думка, 1979. – 272 с.

Получено 01.05.2009