DOI: 10.15593/2224-9354/2021.1.14
УДК 658.14:519.246.8

Р.В. Гарафутдинов, В.А. Куваев

СРАВНЕНИЕ ДВУХ МЕТОДОВ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Одним из перспективных подходов к изучению финансовых рынков как сложной динамической системы является фрактальный анализ. Существует большое количество методов оценки фрактальных характеристик финансовых временных рядов. В работе рассматриваются два из них: метод детрендированного флуктуационного анализа (ДФА) и метод минимального покрытия. Задача исследования – сравнить эти методы и определить, какой из них позволяет точнее оценивать величину фрактальных характеристик финансовых рядов, в том числе на выборках различного объема. Выполнена программная реализация методов на языке программирования Python. Произведено сравнение точности оценки фрактальных показателей обоими методами на примере искусственно сгенерированного ряда и реального ряда курсов фондового индекса. Получены следующие результаты: метод ДФА продемонстрировал преимущества перед методом минимального покрытия по величине отклонения оценки фрактального показателя от эталона и качеству линейной регрессионной модели во всех случаях; метод минимального покрытия позволяет величине, зависимой от масштаба рассмотрения функции, быстрее выходить на асимптотический режим на выборках очень малого объема (32, 64, 128 значений), но погрешность величины оценки фрактального показателя относительно эталона остается высокой. К ограничениям проведенного исследования следует отнести малое многообразие тестовых данных и произвольный выбор техники определения диапазона и шага изменения меры в случае метода ДФА. Направлениями дальнейших исследований могут стать следующие: сравнительный анализ большего количества методов оценки фрактальных характеристик финансовых временных рядов с увеличением многообразия тестовых данных и условий; исследование эффективности различных методов при оценке параметра дробной интегрированности прогнозирующих моделей с длинной памятью ARFIMA и FIGARCH.

Ключевые слова: *финансовые временные ряды, фрактальный анализ, метод детрендированного флуктуационного анализа, метод минимального покрытия, фрактальная размерность, показатель Херста, фрактальное броуновское движение.*

Перспективным подходом к изучению поведения финансовых рынков является фрактальный подход, основанный на гипотезе фрактального рынка Б. Мандельброта [1, 2]. Эта гипотеза гласит, что «процесс ценообразования на рынках глобально детерминирован, зависим от “начальных условий”» [2], прошлые цены влияют на будущие, а графики ценовых рядов финансовых инструментов обладают фрактальными свойствами: самоподобием, масштабированием по степенному закону и нецелой (фрактальной) размерностью [2, 3]. Фрактальность временных рядов тесно связана с понятием длинной памяти

Гарафутдинов Роберт Викторович – аспирант кафедры информационных систем и математических методов в экономике ФГБОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет», e-mail: rvgarafutdinov@gmail.com.

Куваев Василий Александрович – студент кафедры автоматизированных информационных и вычислительных систем ФГАОУ ВО «Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», e-mail: vasya.kuvaev.98@mail.ru.

(long memory), или персистентности [4], – свойством процесса в течение длительного времени сохранять тенденцию изменений. Общеиспользуемой численной характеристикой персистентности ряда является показатель Херста H, связанный с фрактальной размерностью D соотношением $D = 2 - H$ [5].

Существует большое количество методов оценки фрактальных характеристик временных рядов. Обзор некоторых из них представлен в работе [6]. Наиболее известным и распространенным методом остается R/S-анализ – исторически первый метод анализа временных рядов на предмет выявления свойства персистентности, зачастую именно его используют для оценки показателя Херста (см., например, актуальные научные работы об исследовании рынка криптовалют [7], рынка биржевых фондов недвижимости REIT в Гонконге [8]). Другим популярным подходом является спектральный: в частности, на нем основан метод GPH (Geweke-Porter-Hudak) оценки порядка дробной интегрированности ряда d, часто используемый для идентификации параметров модели с длинной памятью ARFIMA [9]. В рамках данной работы мы рассмотрим и сравним два менее популярных, но перспективных метода фрактального анализа временных рядов: метод детрендированного флуктуационного анализа (ДФА) и метод минимального покрытия. Целью исследования является поиск ответа на вопрос, какой из этих методов позволяет точнее оценивать величину фрактальных характеристик финансовых временных рядов, в том числе на выборках различного объема.

Основной принцип фрактального анализа пространственных или временных структур состоит в том, что численно описывается степенная зависимость между характеристиками объекта на разных масштабах. В рамках одного масштаба определяется некоторая величина меры δ и вычисляется соответствующее ей значение функции $F(\delta)$. Затем масштаб (величина меры) многократно меняется, на каждой итерации рассчитывается значение функции. Полученные наборы значений δ, $F(\delta)$ имеют степенную зависимость, которая в логарифмических координатах приобретает вид линейной и, как правило, хорошо аппроксимируется моделью парной линейной регрессии (рис. 1).

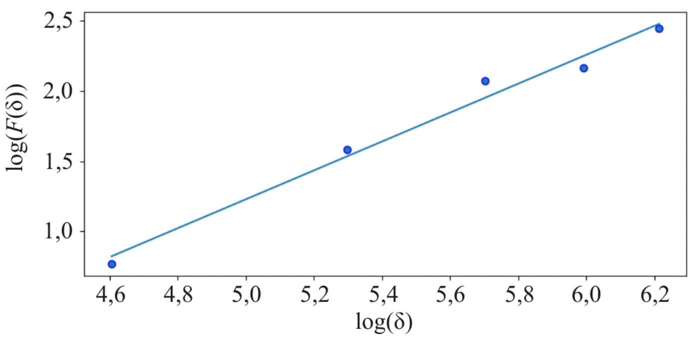

Рис. 1. Аппроксимация зависимости между мерой δ и функцией $F(\delta)$ линейной моделью в логарифмических координатах (на примере метода ДФА), $R^2 = 0{,}984$

Углом наклона линии регрессии, как правило, определяется величина фрактального показателя, а одним из критериев точности оценки этого показателя можно рассматривать величину коэффициента детерминации регрессионной модели R^2. При анализе временных рядов ряд многократно разбивается на сегменты, при этом мерой δ является длина сегмента. Этот принцип характерен и для описанных ниже методов оценки фрактальных показателей.

Метод ДФА предложен C.-K. Peng, он является расширением метода флуктуационного анализа для нестационарных рядов [10]. На русском языке метод описан в работах Л.О. Кириченко, например [11]. Его алгоритм включает следующие шаги. Пусть имеется временной ряд $x(t)$. Строится кумулятивный ряд $y(t)$, каждый член которого вычисляется по формуле $y_i = \sum_{i=1}^{t}(x_i - \overline{x})$, где $\overline{x}$ – среднее значение $x(t)$. Далее ряд $y(t)$ разбивается на N сегментов длиной δ, для каждого из которых вычисляется флуктуационная функция $F(\delta) = \sqrt{\frac{1}{\delta}\sum_{t=1}^{\delta}(y(t) - Y_m(t))^2}$, где $Y_m(t)$ – локальный m-полиномиальный тренд в пределах данного сегмента (рис. 2). Затем N полученных функций $F(\delta)$ усредняются. Вычисления повторяются для различных значений δ. Для самоподобных процессов имеет место степенная зависимость $\overline{F(\delta)} \sim \delta^{\alpha}$. Показатель α определяется как коэффициент при независимой переменной в уравнении линейной регрессии $\ln \overline{F(\delta)} = \alpha \ln \delta + b$, где b – свободный член. Чтобы перейти к показателю Херста, используется следующее соотношение: для стационарных рядов $H = \alpha$, для нестационарных $H = \alpha - 1$ [12].

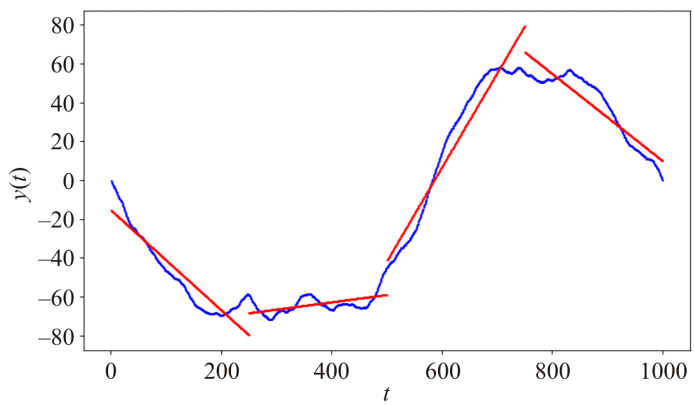

Рис. 2. Иллюстрация метода ДФА на примере модельных данных. Аппроксимация кумулятивного ряда полиномами 1-го порядка, число сегментов ряда – 4

Автором метода минимального покрытия является Н.В. Старченко [13]. Его применением активно занимается В.Ю. Митин (см., например, [14, 15]).

Особенностью и преимуществом метода минимального покрытия, как следует из работ его автора, является то, что он способен оценивать фрактальные характеристики рядов на выборках очень малого объема (от 32, в некоторых случаях от 16 значений [16]), что позволяет осуществлять локальный анализ хаотических временных рядов. Алгоритм метода состоит из следующих шагов. Пусть процесс характеризуется некоторой функцией $y = f(t)$ на отрезке $[a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b]$, i = 1, 2, …, m. Отрезок [a, b] разбивается на m сегментов равной длины $\delta = \frac{(b-a)}{m} = t_i - t_{i-1}$. Затем график функции покрывается прямоугольниками с основанием δ таким образом, чтобы это покрытие было минимальным по площади. Тогда высота прямоугольника на отрезке [t_{i-1}, t_i] будет равна амплитуде $A_i(\delta)$ – разности максимального и минимального значения $f(t)$ на данном отрезке. Накопленная амплитуда на всем отрезке вычисляется как $V_f(\delta) = \sum_{i=1}^{m} A_i(\delta)$, а площадь минимального покрытия как $S_\mu(\delta) = V_f(\delta)\delta$. Имеет место степенная зависимость $S_\mu(\delta) \sim \delta^{2-D}$ при $\delta \to 0$, где D – фрактальная размерность. Отсюда следует, что $V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu}$ при $\delta \to 0$, где $\mu = D_\mu - 1$. Показатель D_μ называется размерностью минимального покрытия, а μ – индексом фрактальности. Величина μ может быть выражена из уравнения линейной регрессии $\ln V_f(\delta) = -\mu \ln \delta + b$, где b – свободный член.

Существует ряд трудностей, возникающих в процессе практического применения методов оценки фрактальных параметров временных рядов. Одна из них заключается в неопределенности выбора как диапазона изменения величины меры δ, так и шага ее изменения. Данный вопрос при описании методов в литературе авторами обычно опускается. Он рассматривался в статье [17] применительно к методу клеточного покрытия, в которой были предложены некоторые техники для определения указанных величин, однако не было проведено их апробации.

Было решено применить следующие способы расчета диапазона и шага изменения δ. В случае метода ДФА длина сегмента изменяется от 10 до половины длины всего ряда, при этом если ряд нацело не делится на сегменты полученной длины, последние несколько значений отбрасываются. В случае метода минимального покрытия длина сегмента представляет собой степени двойки: 2, 4, 8, …, максимальное значение не превышает длину ряда (такой подход был использован Н.В. Старченко в его диссертации [16]). Если длина ряда не является степенью двойки, последние «лишние» значения отбрасываются.

Была выполнена программная реализация обоих методов на языке Python 3 с использованием функций из библиотек *math*, *pandas*, *matplotlib*, *numpy*, *statsmodels*. Разработанные функции позволяют задавать список длин сегментов вручную в качестве входных параметров, при отсутствии явного указания данного параметра этот список формируется автоматически описанными выше способами. Для оценки точности методов в качестве данных мы использовали ряды, полученные с помощью компьютерной симуляции фрактального броуновского движения (ФБД), а также дневные значения индекса РТС. Список значений δ явно не задавался.

Модель ФБД достаточно хорошо описывает динамику финансовых рынков (см., например, [18, 19]), поэтому для сравнения методов на модельных данных мы решили использовать ее. Ряд ФБД был сгенерирован с применением функции *fbm*() из пакета *fbm* [20], длина ряда – 1000 значений, $H = 0,7$. Было сгенерировано 5000 таких рядов, для каждого из них вычислена оценка фрактальной размерности двумя методами, после чего найдены средние значения полученных каждым методом оценок. Эталонным значением размерности рядов в данном случае является $D = 2 - 0,7 = 1,3$.

В работе [18] приведены вычисленные значения показателя Херста для фондовых индексов, что можно использовать для сравнения методов оценки размерности на реальных данных. Был взят ряд дневных цен закрытия индекса РТС за период с 01.09.1995 г. по 31.12.2009 г. (3580 наблюдений) и преобразован к логарифмическим доходностям, после чего для соответствия методики первоисточнику из ряда был удален тренд. В статье не указан метод детрендирования, поэтому мы использовали вычитание из ряда лог-доходностей линейного тренда, аппроксимированного с помощью функций *polyfit*(), *polyval*() из пакета *numpy*. Авторы работы приводят полученное ими значение H этого ряда: 0,617, следовательно, $D = 2 - 0,617 = 1,383$ – это значение и было принято в качестве эталона при сравнении методов. Полученные результаты вычислений приведены в табл. 1.

Таблица 1

Оценки фрактальной размерности модельных
и реального рядов, полученные двумя методами

Метод фрактального анализа	Сгенерированный ряд ФБД (приведено среднее значение D с 99 % доверительным интервалом)	Дневные лог-доходности индекса РТС
Метод ДФА	$\overline{D} = 1,339 \pm 0,005$ $\overline{R^2} = 0,980 \pm 0,000$	$D = 1,374$, *p-value* = 0,000 $R^2 = 0,972$
Метод минимального покрытия	$\overline{D} = 1,284 \pm 0,002$ $\overline{R^2} = 0,768 \pm 0,002$	$D = 1,710$, *p-value* = 0,000 $R^2 = 0,979$
Эталонное значение D	1,300	1,383

Как можно заметить, усредненное эмпирически оцененное методом ДФА значение D модельного ряда отличается от эталонного на 0,039, а в случае метода минимального покрытия – на 0,016. При этом качество регрессионной модели второго метода достаточного невысокое: $\overline{R^2} = 0,768$, в то время как

ДФА позволил получить среднюю величину коэффициента детерминации, весьма близкую к единице ($\overline{R^2}$ = 0,98). Если преимущество метода минимального покрытия, выраженное в большей близости оцененного значения размерности к эталонному, находится на уровне погрешности, то величины коэффициента детерминации свидетельствуют о том, что метод ДФА сумел описать степенную зависимость меры δ и функции F(δ) существенно лучше.

Обратимся к результатам, полученным на реальных данных (дневные лог-доходности индекса РТС). При сопоставимых значениях R^2 (разница 0,007 в пользу метода минимального покрытия) метод ДФА позволил получить оценку D, очень близкую к эталонной (разница 0,009), в то время как отклонение размерности, оцененной методом минимального покрытия, составило 0,327; столь большая погрешность привела к тому, что полученная данным методом величина D сигнализирует о принципиально отличном характере случайного процесса, описываемого рядом, – антиперсистентном ($H < 0,5$, $D > 1,5$), при том что эталонное значение D свидетельствует о персистентном характере динамики лог-доходностей индекса ($H > 0,5$, $D < 1,5$).

В результате можно сделать вывод, что в указанных условиях метод ДФА продемонстрировал более высокую точность при оценке фрактальных характеристик финансовых временных рядов, чем метод минимального покрытия. Далее перейдем ко второму этапу исследования, состоящему в сравнении методов при оценке локальных фрактальных характеристик.

В ходе исследования были сгенерированы 3 варианта коротких рядов ФБД длиной 32, 64 и 128 значений, $H = 0,3$ (этот параметр решено было изменить, чтобы исключить подозрения в том, что наша реализация метода ДФА всегда возвращает похожие результаты), для каждого варианта получено по 5000 генераций. Таким образом, метод минимального покрытия испытывался в «наиболее комфортных условиях» – на рядах длины, соответствующей степеням двойки. На реальных финансовых рядах сравнения проведено не было, потому что столь короткие ряды обычно не исследуются с помощью фрактального анализа, для них затруднено получение оценок фрактальных характеристик с достаточно высокой статистической достоверностью (за исключением случаев использования метода минимального покрытия, которые мы не рассматривали для соблюдения чистоты эксперимента). Полученные результаты вычислений приведены в табл. 2.

Из таблицы видно, что для всех трех длин рядов наиболее близкая к эталонной усредненная оценка D была получена методом ДФА, отклонения в пределах 0,07–0,1. Метод минимального покрытия в среднем оценил величину размерности с высокой погрешностью в диапазоне 0,25–0,36, что вновь привело к некорректной идентификации характера хаотического процесса (ряд является антиперсистентным, но величина $\overline{D}$ свидетельствует об обратном). При этом более высокое качество линейной регрессионной модели на коротких рядах демонстрирует именно метод минимального покрытия, подтверждая тем самым тезис о более быстром выходе функции $V_f(\delta)$ и соответствующего ей показателя μ на асимптотический режим в сравнении с другими фрактальными показателями, в частности, показателе α, оцениваемом методом ДФА [16]. На ряде длиной 32 значения метод ДФА характеризуется низким качеством регрессии ($R^2 = 0{,}618$). В то же время при увеличении объема выборки величина R^2 растет и уже при 64 значениях достигает приемлемой величины $0{,}831 > 0{,}8$, параллельно эмпирически оцененная величина размерности приближается к эталонной. Тот же эффект наблюдается и в результатах метода минимального покрытия (их улучшение при росте выборки), однако сильная погрешность величины $\overline{D}$ не позволяет говорить об их адекватности на рядах такой длины.

Таблица 2

Оценки фрактальной размерности модельных рядов малой длины

Метод фрактального анализа	Сгенерированный ряд ФБД (приведено среднее значение D с 99 % доверительным интервалом)		
	32 значения	64 значения	128 значений
Метод ДФА	$\overline{D} = 1{,}798 \pm 0{,}034$ $\overline{R^2} = 0{,}618 \pm 0{,}011$	$\overline{D} = 1{,}791 \pm 0{,}012$ $\overline{R^2} = 0{,}831 \pm 0{,}004$	$\overline{D} = 1{,}769 \pm 0{,}008$ $\overline{R^2} = 0{,}920 \pm 0{,}002$
Метод минимального покрытия	$\overline{D} = 1{,}340 \pm 0{,}004$ $\overline{R^2} = 0{,}829 \pm 0{,}005$	$\overline{D} = 1{,}401 \pm 0{,}003$ $\overline{R^2} = 0{,}904 \pm 0{,}002$	$\overline{D} = 1{,}446 \pm 0{,}002$ $\overline{R^2} = 0{,}936 \pm 0{,}001$
Эталонное значение D	1,700		

Таким образом, в результате проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Метод ДФА продемонстрировал преимущество перед методом минимального покрытия во всех случаях: при прочих равных полученная с его помощью оценка фрактальной размерности была либо ближе к эталонной величине, либо не менее близкой, чем оценка, полученная вторым методом, при более высоком качестве линейной регрессионной модели. Важно, что ДФА в отличие от метода минимального покрытия позволил корректно определить характер случайного процесса (персистентный/антиперсистентный).

2. Метод минимального покрытия, как и заявлено, позволяет величине $F(\delta)$ быстрее выходить на асимптотический режим на выборках очень малого объема, что выражается в сравнительно более высоком качестве регрессионной модели, но погрешность величины оценки фрактального показателя относительно эталона остается слишком высокой, чтобы можно было говорить о достаточно точном оценивании.

К ограничениям проведенного исследования следует отнести малое многообразие тестовых данных и произвольный выбор техники определения диапазона и шага изменения меры δ в случае метода ДФА.

Актуальными направлениями дальнейших исследований, с нашей точки зрения, могут стать следующие: сравнительный анализ большего количества методов оценки фрактальных характеристик финансовых временных рядов с увеличением многообразия тестовых данных и условий; исследование эффективности указанных методов при оценке параметра дробной интегрированности прогнозирующих моделей с длинной памятью ARFIMA и FIGARCH.

Список литературы

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

2. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков: применение теории хаоса в инвестициях и экономике. – М.: Интернет-трейдинг, 2004. – 304 с.

3. Симонов П.М., Гарафутдинов Р.В. Моделирование и прогнозирование динамики курсов финансовых инструментов с применением эконометрических моделей и фрактального анализа // Вестник Пермского университета. Экономика = Perm University Herald. ECONOMY. – 2019. – Т. 14, № 2. – С. 268–288. DOI: 10.17072/1994-9960-2019-2-268-288

4. Балагула Ю.М. Прогнозирование суточных цен на ОРЭМ РФ с помощью модели ARFIMA // Прикладная эконометрика. – 2020. – Т. 57. – С. 89–101. DOI: 10.22394/1993-7601-2020-57-89-101

5. Кривоносова Е.К., Первадчук В.П., Кривоносова Е.А. Сравнение фрактальных характеристик временных рядов экономических показателей [Электронный ресурс] // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 6. – URL: https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=15974 (дата обращения: 29.08.2020).

6. Гарафутдинов Р.В. Обзор методов оценивания фрактальных характеристик финансовых временных рядов // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: материалы XIII Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2018. – С. 97–103.

7. Михайлов А.Ю. Развитие рынка криптовалют: метод Херста // Финансы: теория и практика. – 2020. – Т. 24, № 3. – С. 81–91.

8. Analysis of the efficiency of Hong Kong REITs market based on Hurst exponent / J. Liu, C. Cheng, X. Yang, L. Yan, Y. Lai // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2019. – Vol. 534. DOI: 10.1016/j.physa.2019.122035

9. Балагула Ю.М., Абакумова Ю.А. Длинная память на рынке нефти: спектральный подход. Препринт Ec-01/11 / Европ. ун-т в С.-Петерб. – 2011. – 40 с.

10. Mosaic organization of DNA nucleotides / C.-K. Peng, S.V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H.E. Stanley, A.L. Goldberger // Physical Review E. – 1994. – Vol. 49, no. 2. – P. 1685–1689. DOI: 10.1103/PhysRevE.49.1685

11. Кириченко Л.О., Чалая Л.Э. Комплексный подход к исследованию фрактальных временных рядов // International Journal “Information Technologies & Knowledge”. – 2014. – Vol. 8, no. 1. – P. 22–28.

12. Nolds 0.5.1 documentation [Электронный ресурс]. – URL: https://cschoel.github.io/nolds/nolds.html (дата обращения: 29.08.2020).

13. Дубовиков М.М., Старченко Н.В. Эконофизика и фрактальный анализ финансовых временных рядов // Успехи физических наук. – 2011. – Т. 181, № 7. – С. 779–786. DOI: 10.3367/UFNr.0181.201107k.0779

14. Аптуков В.Н., Митин В.Ю. Фрактальный анализ метеорологических рядов с помощью метода минимального покрытия // Географический вестник = Geographical bulletin. – 2019. – № 2 (49). – С. 67–79. DOI: 10.17072/2079-7877-2019-2-67-79

15. Митин В.Ю. Фрактальные характеристики рядов базовых климатических параметров в г. Перми // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2020. – № 1 (48). – С. 47–52. DOI: 10.17072/1993-0550-2020-1-47-52

16. Старченко Н.В. Индекс фрактальности и локальный анализ хаотических временных рядов: дис. … канд. физ.-мат. наук. – М., 2005. – 122 с.

17. Гарафутдинов Р.В., Гурова Е.П. К вопросу о некоторых трудностях при использовании метода клеточного покрытия для фрактального анализа временных рядов // Актуальные вопросы современной экономики. – 2020. – № 4. – С. 336–342.

18. Гисин В.Б., Марков А.А. Ценообразование производных инструментов европейского типа на фрактальном рынке с транзакционными издержками // Финансы: теория и практика. – 2011. – № 1. – С. 34–41.

19. Чичаев И.А., Попов В.Ю. Об одном подходе к вычислению индекса Херста финансовых временных рядов и их аппроксимации фрактальным броуновским движением [Электронный ресурс] // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 2. – URL: http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=8698 (дата обращения: 29.08.2020).

20. Fractional Brownian motion realizations [Электронный ресурс]. – URL: https://pypi.org/project/fbm/ (дата обращения: 29.08.2020).

References

1. Mandelbrot B. The fractal geometry of nature (Russ. ed.: Mandel'brot B. Fraktal'naia geometriia prirody, Moscow, Institute of Computer Science, 2002, 656 p.).

2. Peters E. Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics (Russ. ed.: Peters E. Fraktal'nyi analiz finansovykh rynkov: primenenie teorii khaosa v investitsiiakh i ekonomike. Moscow, Internet-treiding, 2004, 304 p.).

3. Simonov P.M., Garafutdinov R.V. Modelirovanie i prognozirovanie dinamiki kursov finansovykh instrumentov s primeneniem ekonometricheskikh modelei i fraktal'nogo analiza [Modeling and forecasting of financial instruments dynamics using econometrics models and fractal analysis]. *Perm University Herald. ECONOMY*, 2019, vol. 14, no. 2, pp. 268–288. DOI: 10.17072/1994-9960-2019-2-268-288.

4. Balagula Iu.M. Prognozirovanie sutochnykh tsen na OREM RF s pomoshch'iu modeli ARFIMA [Forecasting daily spot prices in the Russian electricity market with the ARFIMA model]. *Prikladnaia ekonometrika*, 2020, vol. 57, pp. 89–101. DOI: 10.22394/1993-7601-2020-57-89-101.

5. Krivonosova E.K., Pervadchuk V.P., Krivonosova E.A. Sravnenie fraktal'nykh kharakteristik vremennykh riadov ekonomicheskikh pokazatelei [Comparison of the fractal characteristics of economic indicators time series]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniia*, 2014, no. 6, available at: https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=15974 (accessed 29.08.2020).

6. Garafutdinov R.V. Obzor metodov otsenivaniia fraktal'nykh kharakteristik finansovykh vremennykh riadov [Overview of methods for assessing the fractal characteristics of financial time series]. *Analiticheskie i chislennye metody modelirovaniia estestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem* [*Analytical and Numerical Methods of Modeling of Natural Science and Social problems*]. Penza, Penza State University, 2018, pp. 97–103.

7. Mikhailov A.Iu. Razvitie rynka kriptovaliut: metod Khersta [Cryptocurrency market development: Hurst method]. *Finansy: teoriia i praktika*, 2020, vol. 24, no. 3, pp. 81–91.

8. Liu J., Cheng C., Yang X., Yan L., Lai Y. Analysis of the efficiency of Hong Kong REITs market based on Hurst exponent. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2019, vol. 534. DOI: 10.1016/j.physa.2019.122035.

9. Balagula Iu.M., Abakumova Iu.A. Dlinnaia pamiat' na rynke nefti: spektral'nyi podkhod [Long memory on the oil market: spectral approach]. Preprint Es-01/11. Saint Petersburg, European University in Saint Petersburg, 2011, 40 p.

10. Peng C.-K., Buldyrev S.V., Havlin S., Simons M., Stanley H.E., Goldberger A.L. Mosaic organization of DNA nucleotides. *Physical Review E*, 1994, vol. 49, no. 2, pp. 1685–1689. DOI: 10.1103/PhysRevE.49.1685.

11. Kirichenko L.O., Chalaia L.E. Kompleksnyi podkhod k issledovaniiu fraktal'nykh vremennykh riadov [Integrated approach to the study of fractal time series]. *International Journal "Information Technologies & Knowledge"*, 2014, vol. 8, no. 1, pp. 22–28.

12. Nolds 0.5.1 documentation. Available at: https://cschoel.github.io/nolds/nolds.html (accessed 29.08.2020).

13. Dubovikov M.M., Starchenko N.V. Ekonofizika i fraktal'nyi analiz finansovykh vremennykh riadov [Econophysics and the fractal analysis of financial time series]. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 2011, vol. 181, no. 7, pp. 779–786. DOI: 10.3367/UFNr.0181.201107k.0779.

14. Aptukov V.N., Mitin V.Iu. Fraktal'nyi analiz meteorologicheskikh riadov s pomoshch'iu metoda minimal'nogo pokrytiia [Fractal analysis of meteorological series based on the minimal covering method]. *Geographical Bulletin*, 2019, no. 2 (49), pp. 67–79. DOI: 10.17072/2079-7877-2019-2-67-79.

15. Mitin V.Iu. Fraktal'nye kharakteristiki riadov bazovykh klimaticheskikh parametrov v g. Permi [Fractal characteristics of the series of basic climatic parameters in Perm]. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2020, no. 1(48), pp. 47–52. DOI: 10.17072/1993-0550-2020-1-47-52.

16. Starchenko N.V. Indeks fraktal'nosti i lokal'nyi analiz khaoticheskikh vremennykh riadov [Fractality index and local analysis of chaotic time series]. Ph. D. thesis. Moscow, 2005, 122 p.

17. Garafutdinov R.V., Gurova E.P. K voprosu o nekotorykh trudnostiakh pri ispol'zovanii metoda kletochnogo pokrytiia dlia fraktal'nogo analiza vremennykh riadov [To the question of some difficulties in using the box counting method for fractal time series analysis]. *Aktual'nye voprosy sovremennoi ekonomiki*, 2020, no. 4, pp. 336–342.

18. Gisin V.B., Markov A.A. Tsenoobrazovanie proizvodnykh instrumentov evropeiskogo tipa na fraktal'nom rynke s tranzaktsionnymi izderzhkami [Pricing of European-type derivatives on fractal market with transaction costs]. *Finansy: teoriia i praktika*, 2011, no. 1, pp. 34–41.

19. Chichaev I.A., Popov V.Iu. Ob odnom podkhode k vychisleniiu indeksa Khersta finansovykh vremennykh riadov i ikh approksimatsii fraktal'nym brounovskim dvizheniem [About one approach for financial time series' Hurst index computation and their approximation using fractal Brownian motion]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniia*, 2013, no. 2, available at: http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=8698 (accessed 29.08.2020).

20. Fractional Brownian motion realizations. Available at: https://pypi.org/project/fbm/ (accessed 29.08.2020).

Оригинальность 76 %

Получено 09.11.2020 Принято 01.12.2020 Опубликовано 31.03.2021

R.V. Garafutdinov, V.A. Kuvaev

COMPARISON OF TWO METHODS OF FRACTAL ANALYSIS APPLIED TO FINANCIAL TIME SERIES

One of the promising approaches to researching financial markets as a complex dynamic system is fractal analysis. There exist many methods to estimate fractal characteristics of financial time series. Two of them are considered in this paper: detrended fluctuation analysis (DFA) and minimum coverage method. The task of the research is to compare these methods to find which one more accurately estimates the value of fractal characteristics of financial series, tested on samples of different size. The two methods were programmed in Python. The authors tested the accuracy of estimating fractal indexes by both methods applied on artificially generated series and real series of stock index rates. The following results were obtained: the DFA method demonstrated the advantages over the minimum coverage method in terms of the value of the fractal index estimation deviation from the reference and the quality of the linear regression model in all cases; the minimum coverage method allows the value of the function dependent on the scale of consideration to enter the asymptotic mode faster on the samples of very small size (32, 64, 128 values), but the error of the value of the fractal index estimation relative to the reference remains high. The limitations of the conducted research include a small variety of test data and an arbitrary choice of the technique to determine the range and the step of change of the measure for the DFA method. The avenues of further research may include a comparative analysis of more methods for estimation of fractal characteristics of financial time series with increasing variety of test data and conditions; a study of effectiveness of different methods in estimating parameters of fractional integration of predictive models with long memory ARFIMA and FIGARCH.

Keywords: *financial time series, fractal analysis, detrended fluctuation analysis, minimum coverage method, fractal dimension, Hurst Index, fractal Brownian motion.*

Robert V. Garafutdinov – Postgraduate Student, Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State University, e-mail: rvgarafutdinov@gmail.com.

Vasily A. Kuvaev – Undergraduate Student, Department of Automated Information and Computing Systems, Snezhinsk Physic Institute of the National Research Nuclear University, e-mail: vasya.kuvaev.98@mail.ru.

Received 09.11.2020 Accepted 01.12.2020 Published 31.03.2021