УДК 517.929

В.В.МАЛЫГИНА, К.М.ЧУДИНОВ
Пермский государственный технический университет

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ СКАЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Найдены достаточные условия, формулируемые в терминах параметров исходной задачи, при которых функция Коши дифференциального уравнения с несколькими переменными запаздываниями сохраняет знак и имеет экспоненциальную оценку. Для случаев, когда число ненулевых коэффициентов уравнения не превосходит трех, приведена геометрическая интерпретация полученных признаков в виде областей устойчивости на прямой, на плоскости и в трехмерном пространстве.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = a_0 x(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k x(t - r_k(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty), \tag{1}$$

считая функцию $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ доопределенной при отрицательных значениях аргумента некоторой локально суммируемой *начальной функцией*. Здесь a_0 – любое вещественное число, при всех $k = 1, \ldots, n$ коэффициенты a_k неотрицательны, запаздывания $r_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ измеримы по Лебегу на $\mathbb{R}_+$ и имеется такой набор положительных констант ω_k, что $0 \le r_k(t) \le \omega_k$.

Решением уравнения (1) назовем локально абсолютно непрерывную функцию $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую равенству (1) почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Как известно [1, с.35], уравнение (1) с заданными начальной функцией и *начальным условием* $x(0) = x_0$ однозначно разрешимо.

Цель данной работы – получение признаков устойчивости уравнения (1). Все определения устойчивости мы понимаем в классическом смысле: либо как непрерывную зависимость от начальных данных [2, с.59], [3, с.130], либо как соответствующие свойства (оценки) *функции Коши* [1, с.90].

Уточним постановку задачи. Мы будем искать условия устойчивости, формулируемые в терминах параметров $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и $\omega_1, \ldots, \omega_n$, которые считаем фиксированными, то есть признаки устойчивости решений *всех* уравнений вида (1) с заданным набором этих параметров при *всевозможных* функциях $r_1, \ldots, r_n$, удовлетворяющих указанным выше условиям. В связи с этим оказывается удобным расширить используемую терминологию. Именно: когда ниже мы будем иметь в виду некоторый определенный набор чисел a_k и ω_k и функций r_k, то будем говорить о соответствующем *уравнении* (1), когда же будем говорить о *семействе* уравнений (1), будем иметь в виду множество уравнений с фиксированным набором параметров a_k и ω_k и всевозможными функциями r_k.

Определение. *Семейство* уравнений (1) будем называть *устойчивым* (по начальным данным, равномерно, асимптотически, экспоненциально), если все входящие в него уравнения устойчивы (в соответствующем смысле).

В работе [5] предложен метод исследования асимптотических свойств решений уравнения (1), сводящий вопрос о его устойчивости к исследованию свойств вспомогательного автономного уравнения. Данная статья углубляет разработку этого метода.

Предварительные результаты

Если для данных параметров $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и $\omega_1, \ldots, \omega_n$ найдется такой набор запаздываний r_k, что уравнение (1) неустойчиво, то неустойчиво и семейство, в которое входит уравнение. Таким образом, при изучении условий устойчивости семейства (1) можно отбрасывать такие наборы a_k и ω_k.

Теорема 1. *Если* $a_0 - \sum_{k=1}^{n} a_k > 0$, *то семейство* (1) *не является устойчивым по начальным данным, а если* $a_0 - \sum_{k=1}^{n} a_k \geq 0$, *то семейство* (1) *не является асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Положим все запаздывания r_k нулевыми. Получим обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого неограниченно в случае строгого неравенства и не имеет нулевого предела в случае нестрогого неравенства. ▲

В связи с только что доказанным фактом наибольшего внимания при исследовании устойчивости требует случай, когда справедливо неравенство

$$a_0 - \sum_{k=1}^{n} a_k < 0.$$

Дополним уравнение

$$\dot{y}(t) = a_0 y(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k y(t - \omega_k), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

начальной функцией $y(\xi) \equiv 1$, $\xi \notin \mathbb{R}_+$, и начальным условием $y(0) = 1$. Заметим, что в силу автономности задачи (2) ее решение является непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}_+$ функцией.

Уравнение (2) будем называть *test-уравнением* семейства уравнений (1).

В предположении справедливости неравенства $a_0-\sum_{k=1}^{n}a_k<0$ поставим в соответствие семейству (1) величину l по следующему принципу. Очевидно, что для некоторого $\tau>0$ решение $y:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ задачи (2) с данным набором параметров a_k и ω_k убывает на отрезке $[0,\tau]$. Если оно убывает на полуоси $\mathbb{R}_+$, то положим $l=+\infty$. В противном случае положим $l=\inf\{t\in\mathbb{R}_+:\forall\varepsilon>0\exists\tau\in(t,t+\varepsilon)\,(y(\tau)\ge y(t))\}$ и обозначим $h=-y(l)$. В работе [5] наибольшее внимание уделено случаю $l<+\infty$. В данной статье подробно рассматривается случай $l=+\infty$.

Лемма 1. *Пусть* $a_0-\sum_{k=1}^{n}a_k<0$ *и* $l<+\infty$. *Тогда*

a) $l=\sup\{t\in\mathbb{R}_+:0<\tau<t\Rightarrow\dot y(\tau)<0\}$;

b) $\dot y(l)=0$;

c) $h>0$.

Доказательство. Пункты a) и b) следуют из определения точки l, отмеченной выше непрерывной дифференцируемости функции y и необходимого условия локального минимума. Докажем c). Пусть $h\le 0$, то есть $y(l)\ge 0$. Так как на отрезке $(0,l)$ функция y убывает, то $y(l-\omega_k)>y(l)$. Среди коэффициентов a_k, $k=1,\ldots,n$, есть хотя бы один ненулевой, следовательно, с учетом b) из уравнения (2) получаем

$$0=\dot y(l)=a_0y(l)-\sum_{k=1}^{n}a_ky(l-\omega_k)<a_0y(l)-\sum_{k=1}^{n}a_ky(l)=y(l)\left(a_0-\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\le 0,$$

что невозможно. ▲

Для каждого $s\in\mathbb{R}$ определим функцию $y_s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, положив $y_s(t)=y(t-s)$, где y – решение задачи (2). Функции семейства $\{y_s\}$ назовем *test-функциями*. Таким образом, каждая test-функция y_s тождественно равна 1 при $t\le s$, строго убывает на промежутке $(s,s+l)$ до значения $y(l)=-h<0$ и для некоторого $\delta>0$ возрастает на промежутке $(s+l,s+l+\delta)$. Отметим используемый ниже факт, что для каждой пары чисел $t\in\mathbb{R}$ и $\xi\in[-h,1)$ существует единственное число $s\in[t-l,t)$ такое, что $y_s(t)=\xi$.

Обозначим $\omega=\max_k\omega_k$.

Лемма 2 [5]. *Пусть* $a_0-\sum_{k=1}^{n}a_k<0$, $l<+\infty$, $x:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ *– решение уравнения* (1), y_s *– test-функция,* $y_s(t_0)=x(t_0)$, $s\in[t_0-l,t_0]$, *и для любого* $t\in[t_0-\omega,t_0]$ *справедливо неравенство* $x(t)\le y_s(t)$. *Тогда найдётся такое число* $\delta>0$, *что для любого* $t\in[t_0,t_0+\delta]$ *справедливо неравенство* $x(t)\ge y_s(t)$.

Очевидно, что лемма 2 остается справедливой, если вместо решения x уравнения (1) рассматривать функцию $c:[\tau,+\infty)\to\mathbb{R}$, определенную равенством $c(t)=C(t,\tau)$, $t\in[\tau,+\infty)$, где C – *функция Коши* [7, стр.47] уравнения (1). Пользуясь этим, докажем следующий используемый в дальнейшем изложении факт.

Теорема 2. *Пусть* $a_0-\sum_{k=1}^{n}a_k<0$, $l<+\infty$ *и найдутся такие числа* $s,t_1,t_2\in\mathbb{R}$, *что* $s+l+\omega\le t_1<t_2$ *и* $0<C(t_1,s)\le C(t_2,s)$, *где* C – *функция Коши уравнения* (1). *Тогда найдется такое число* $t_0\in(s,t_1)$, *что* $(-h)C(t_0,s)=C(t_1,s)$.

Доказательство.

1. Обозначим для краткости $c(\cdot)=C(\cdot,s)$. Пусть $\tau=\sup\{t\in[t_1,t_2]:c(t)\le c(t_1)\}$). Имеем: $\tau\in[t_1,t_2]$, $c(\tau)=c(t_1)$ и для любого $\varepsilon>0$ найдется такая точка $\tau_1\in(\tau,\tau+\varepsilon)$, что $c(\tau)<c(\tau_1)$.

2. Обозначим $\eta_s=-\dfrac{c(\tau)}{h}y_s$, $s\in\mathbb{R}$. В силу определения test-функций имеем $y_{\tau-l}(\tau)=-h$, откуда $\eta_{\tau-l}(\tau)=c(\tau)$. Так как для некоторого $\delta>0$ функция $\eta_{\tau-l}$ убывает на интервале $(\tau,\tau+\delta)$, с учетом п. 1 получаем: для любого $\varepsilon>0$ найдется такая точка $\tau_1\in(\tau,\tau+\varepsilon)$, что $\eta_{\tau-l}(\tau_1)<c(\tau_1)$.

3. Допустим, что теорема неверна. Тогда для всех $t\in[\tau-l-\omega,\tau]$ имеем $c(t)>-c(\tau)/h$. Для каждого такого $t\in[\tau-l,\tau]$, что $c(t)<c(\tau)$, найдется единственное число $s(t)$ такое, что $\eta_{s(t)}(t)=c(t)$; для остальных $t\in[\tau-l,\tau]$ положим $s(t)=\tau-l$. Обозначим $\sigma=\sup\{s(t):t\in[\tau-l,\tau]\}$. Имеем $\sigma\in[\tau-l,\tau)$. Далее, для всех $t\in[\sigma-\omega,\tau]$ имеем $\eta_\sigma(t)\le c(t)$, поскольку для $t\in[\sigma-\omega,\sigma]$ в силу сделанного допущения имеем $\eta_\sigma(t)=-\dfrac{c(\tau)}{h}<c(t)$, а для $t\in[\sigma,\tau]$ из $\eta_\sigma(t)>c(t)$ следует $\eta_\sigma(t)>\eta_{s(t)}(t)$, а значит, $s(t)>\sigma$, что противоречит определению точки σ.

4. В случае $\sigma=\tau-l$ согласно п. 3 и лемме 2 найдется такое число $\delta>0$, что $c(t)\le\eta_\sigma(t)$ для любого $t\in[\tau,\tau+\delta]$, что противоречит п. 2.

5. Рассмотрим случай $\sigma>\tau-l$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется число $s_\varepsilon\in[\sigma-\varepsilon,\sigma]$ такое, что $\eta_{s_\varepsilon}(t)=c(t)$ для некоторого $t\in[\tau-l,\tau]$. В силу равномерной непрерывности test-функций на компакте $[\tau-l,\tau]$, $\sup\{t\in[\tau-l,\tau]:|\eta_\sigma(t)-\eta_{s_\varepsilon}(t)|\}\to0$ при $\varepsilon\to0$, а значит, найдется точка $t_\sigma\in[\sigma,\tau]$ такая, что $c(t_\sigma)=\eta_\sigma(t_\sigma)$. Это противоречит п. 3, поскольку согласно лемме 2 найдется такое число $\delta>0$, что $c(t)\le\eta_\sigma(t)$ для всех $t\in[t_\sigma,t_\sigma+\delta]$. ▲

Рассмотрим задачу (2) в предположении $l=+\infty$, то есть (строгого) убывания ее решения на полуоси $\mathbb{R}_+$. Приведем полезную переформулировку этого условия. Для этого рассмотрим еще одну задачу: уравнение

$$\dot{u}(t)+\sum_{k=1}^{n}a_k e^{-a_0\omega_k}u(t-\omega_k)=0, \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{3}$$

дополненное начальной функцией $u(\xi)\equiv 0$, $\xi\notin\mathbb{R}_+$ и начальным условием $u(0)=1$.

Лемма 3. *Пусть* $a_0-\sum_{k=1}^{n}a_k<0$. *Тогда решение задачи* (2) *убывает на* $\mathbb{R}_+$ *если и только если решение задачи* (3) *положительно на* $\mathbb{R}_+$.

Доказательство. Сделаем в уравнении (2) замену переменных:

$$y(t)=1+(a_0-\sum_{k=1}^{n}a_k)\int_0^t e^{a_0 s}u(s)ds.$$

Легко видеть, что $\dot{y}(t)=e^{a_0 t}(a_0-\sum_{k=1}^{n}a_k)u(t)$, откуда сразу следует, что для всех $t\in\mathbb{R}$ если $\dot{y}(t)<0$, то $u(t)>0$. Подставляя выражения для $y(t)$ и $\dot{y}(t)$ в уравнение (2), получаем

$$e^{a_0 t}(a_0-\sum_{k=1}^{n}a_k)u(t)=a_0\left(1+(a_0-\sum_{k=1}^{n}a_k)\int_0^t e^{a_0 s}u(s)ds\right)-\sum_{k=1}^{n}a_k\left(1+(a_0-\sum_{k=1}^{n}a_k)\int_0^{t-\omega_k}e^{a_0 s}u(s)ds\right),$$

или

$$e^{a_0 t}u(t)=1+a_0\int_0^t e^{a_0 s}u(s)ds-\sum_{k=1}^{n}a_k\int_0^{t-\omega_k}e^{a_0 s}u(s)ds.$$

Дифференцируя и деля на экспоненту, получаем

$$\dot{u}(t)=-\sum_{k=1}^{n}a_k e^{-a_0\omega_k}u(t-\omega_k),$$

то есть u удовлетворяет уравнению (3), что и требовалось доказать. ▲

Введем функцию $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ равенством $P(\zeta)=-\zeta-a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k e^{\zeta\omega_k}$.

Имеем: $P'(\zeta)=-1+\sum_{k=1}^{n}a_k\omega_k e^{\zeta\omega_k}$, $P''(\zeta)=\sum_{k=1}^{n}a_k\omega_k^2 e^{\zeta\omega_k}$. Очевидно, что $P''(\zeta)>0$ при всех $\zeta\in\mathbb{R}$. Таким образом, функция P' возрастает на всей вещественной оси, причем $\lim_{\zeta\to-\infty}P'(\zeta)=-1$, а $\lim_{\zeta\to\infty}P'(\zeta)=+\infty$. Следовательно, P' обращается в нуль в единственной точке ζ^*, являющейся единственной точкой минимума функции P. Если $P(\zeta^*)>0$, то функция P не имеет нулей; если $P(\zeta^*)=0$, то ζ^* – единственный нуль функции P; если $P(\zeta^*)<0$, то функция P имеет ровно два нуля – справа и слева от ζ^*.

Лемма 4. *Решение задачи* (3) *положительно на* $\mathbb{R}_+$ *тогда и только тогда, когда функция* P *имеет хотя бы один нуль.*

Необходимость установлена в работе [6].

Достаточность. Пусть существует число $\zeta_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $P(\zeta_0) = 0$. Тогда, положив $u(t) = e^{-(\zeta_0 + a_0)t} > 0$, $t \in \mathbb{R}_+$, и подставив в левую часть уравнения (3), получаем

$$e^{-(\zeta_0+a_0)t}\left(-\zeta_0 - a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{\zeta_0 \omega_k}\right) = e^{-(\zeta_0+a_0)t} P(\zeta_0) \equiv 0.$$

Отсюда по теореме о дифференциальном неравенстве [4, с. 65] следует, что решение *задачи* (3) *положительно на* $\mathbb{R}_+$. ▲

Отметим, что $P(0) = \sum_{k=1}^{n} a_k - a_0$. Таким образом, предыдущие рассуждения данного раздела проводились в предположении, что $P(0) > 0$. Объединяя леммы 3 и 4, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $P(0) > 0$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

a) $l = +\infty$ *;*

b) *решение задачи* (2) *убывает на полуоси* $\mathbb{R}_+$ *;*

c) *решение задачи* (3) *положительно на полуоси* $\mathbb{R}_+$ *;*

d) *функция* P *имеет нули на оси* $\mathbb{R}$ *.*

Заметим, что справедливость утверждений a)–d) теоремы 3 не гарантирует устойчивость test-уравнения (и тем более семейства (1)): среди монотонных решений могут оказаться и неустойчивые. Для того чтобы выяснить, устойчиво ли семейство (1), требуется более подробная информация о нулях функции *P*.

Лемма 5. *Пусть функция* P *имеет нуль на множестве* $(-\infty, 0]$. *Тогда семейство уравнений* (1) *не является асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Пусть существует такое $\zeta_0 \le 0$, что $P(\zeta_0) = 0$. Положим в уравнении (1) $r_k(t) = \omega_k$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$ и доопределим его условием $x(\xi) = e^{-\zeta_0 \xi}$, $\xi \in (-\infty, 0]$. Тогда функция $x(t) = e^{-\zeta_0 t}$, $t \in \mathbb{R}_+$, будет решением такого уравнения. Так как $-\zeta_0 \ge 0$, функция $x(t)$ не стремится к нулю при $t \to \infty$, следовательно, семейство уравнений (1) не является асимптотически устойчивым. ▲

Лемма 6. *Пусть функция* P *имеет нули. Для того чтобы все они лежали на полуоси* $(0, +\infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы были справедливы неравенства* $P(0) > 0$ *и* $P'(0) < 0$.

Необходимость. Случай обыкновенного дифференциального уравнения тривиален, поэтому далее будем считать, что среди коэффициентов a_k при $k = 1, 2, \ldots, n$ есть ненулевые. Рассмотрим случаи, когда не выполняется хотя бы одно из неравенств $P(0) > 0$ *и* $P'(0) < 0$.

Если $P(0) \le 0$, то, поскольку $\lim_{\zeta \to -\infty} P(\zeta) = +\infty$, функция *P* обращается в 0 на $(-\infty, 0]$.

Пусть $P(0)>0$ *и* $P'(0)\geq 0$. Рассмотрим точку минимума ζ^* функции P. Функция P' возрастает на $\mathbb{R}$, поэтому $\zeta^*\leq 0$. Если $P(\zeta^*)\leq 0$, то функция P имеет нули на множестве $(-\infty,0]$, а если $P(\zeta^*)>0$, то вообще не имеет нулей, что противоречит условиям леммы.

Достаточность. Поскольку функция P' на множестве $(-\infty,0]$ возрастает, из неравенства $P'(0)<0$ следует, что P' отрицательна на $(-\infty,0]$, то есть функция P убывает. А тогда из неравенства $P(0)>0$ следует, что функция P положительна на $(-\infty,0]$, то есть все ее нули лежат на $\mathbb{R}_+$. ▲

Теперь рассмотрим параметры уравнения (1) как задающие некоторые множества точек пространства $\mathbb{R}^{n+1}$.

Обозначим через F множество точек $(u_0,u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, определяемое уравнениями в параметрической форме:

$$-\zeta-u_0+\sum_{k=1}^{n}u_k e^{\zeta\omega_k}=0,\quad -1+\sum_{k=1}^{n}u_k\omega_k e^{\zeta\omega_k}=0,\quad \zeta\in\mathbb{R}\,. \tag{4}$$

Далее, обозначим через O начало координат $(0,\dots,0)\in\mathbb{R}^{n+1}$ и через M – точку $(a_0,a_1,...,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$. Зададим луч OM параметрическими уравнениями

$$u_k=a_k s,\quad k=0,1,2,\dots,n,\quad s\in\mathbb{R}_+. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), получаем уравнение

$$-\zeta\sum_{k=1}^{n}a_k\omega_k e^{\zeta\omega_k}+\sum_{k=1}^{n}a_k e^{\zeta\omega_k}=a_0\,.$$

Нетрудно убедиться, что при условии $P(0)>0$ оно в случае $a_0\leq 0$ имеет единственный корень, который положителен, а в случае $a_0>0$ – два корня, положительный и отрицательный. Обозначим положительный корень через ζ_0. Таким образом, если $P(0)>0$, то луч OM имеет с множеством F общую точку M_0, соответствующую значениям $\zeta=\zeta_0$ и $s=s_0=\dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n}a_k\omega_k e^{\zeta_0\omega_k}}$ параметров уравнений (4) и (5). Если $a_0\leq 0$, то M_0 – единственная точка пересечения луча OM с множеством F, а если $a_0>0$ – одна из двух, ближайшая к началу координат. Если $s_0=1$, то точки M и M_0 совпадают.

В связи со сказанным множество F в дальнейшем будем называть *поверхностью* и говорить, что точка M лежит ниже поверхности F, если $s_0>1$; на поверхности F, если $s_0=1$; и выше поверхности F, если $s_0<1$.

Теорема 4. *Пусть* $P(0)>0$ *и* $P'(0)<0$. *Тогда, для того чтобы функция* P *имела нули, необходимо и достаточно, чтобы точка M лежала не выше поверхности F.*

Необходимость. Пусть 1) $P(0)>0$, 2) $P'(0)<0$ и 3) точка $M(a_0,a_1,...,a_n)$ лежит выше поверхности *F*. Из условия 1) получаем, что существуют параметры ζ_0 и s_0 такие, что $-\zeta_0-a_0s_0+s_0\sum_{k=1}^{n}a_ke^{\zeta_0\omega_k}=0, -1+s_0\sum_{k=1}^{n}a_k\omega_ke^{\zeta_0\omega_k}=0$. Условие 3) означает, что $s_0<1$, а тогда $P'(\zeta_0)=-1+\sum_{k=1}^{n}a_k\omega_ke^{\zeta_0\omega_k}>-1+s_0\sum_{k=1}^{n}a_k\omega_ke^{\zeta_0\omega_k}=0$, то есть $P'(\zeta_0)>0$. Следовательно, $\zeta^*<\zeta_0$, где ζ^* – точка минимума функции P. Учитывая условие 2), получаем $\zeta^*\in(0,\zeta_0)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $Q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и ее производные:

$$Q(\zeta)=-\zeta-a_0s_0+s_0\sum_{k=1}^{n}a_ke^{\zeta\omega_k},\ Q'(\zeta)=-1+s_0\sum_{k=1}^{n}a_k\omega_ke^{\zeta\omega_k},\ Q''(\zeta)=s_0\sum_{k=1}^{n}a_k\omega_k^2e^{\zeta\omega_k}.$$

Так как $Q''(\zeta)>0$ при всех $\zeta\in\mathbb{R}$, функция Q' возрастает, а так как $Q'(\zeta_0)=0$, при всех $\zeta\in[\zeta^*,\zeta_0)$ имеем $Q'(\zeta)<0$. Значит, $Q(\zeta)$ убывает на $[\zeta^*,\zeta_0)$, то есть $Q(\zeta^*)>Q(\zeta_0)=0$, но тогда в силу неотрицательности ζ^* $P(\zeta^*)>Q(\zeta^*)>0$. Таким образом, функция P положительна в точке, где она принимает наименьшее значение, следовательно, не имеет нулей.

Достаточность. Пусть точка *M* лежит не выше поверхности *F*. Значит, существуют $\zeta_0>0$ и $s_0\geq1$ такие, что $-\zeta_0-a_0s_0+s_0\sum_{k=1}^{n}a_ke^{\zeta_0\omega_k}=0$. Тогда

$$P(\zeta_0)=-\zeta_0-a_0+\sum_{k=1}^{n}a_ke^{\zeta\omega_k}\leq-\zeta_0+s_0\left(\sum_{k=1}^{n}a_ke^{\zeta\omega_k}-a_0\right)=-\zeta_0-a_0s_0+s_0\sum_{k=1}^{n}a_ke^{\zeta\omega_k}=0,$$

то есть $P(\zeta_0)\leq0$. Но $\lim_{\zeta\to\infty}P(\zeta)=+\infty$, значит, функция P имеет нули. ▲

Лемма 6 и теорема 4 дают следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть функция* P *имеет нули. Для того чтобы все они лежали на полуоси* $(0,+\infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства* $P(0)>0$ *и* $P'(0)<0$, *а точка M лежала не выше поверхности F.*

Асимптотическая устойчивость

Обозначим $\Delta=\{(t,s)\in\mathbb{R}_+^2:t\geq s\}$. Множество Δ есть область определения функции Коши рассматриваемых уравнений.

Лемма 7. *Пусть функция* P *имеет нули на полуоси* $(0,+\infty)$. *Тогда функция Коши любого уравнения семейства* (1) *положительна на множестве* Δ.

Доказательство. Обозначим функцию Коши уравнения (1) через *C*. Заменой переменных $x(t) = e^{a_0 t} z(t)$ преобразуем уравнение (1) к виду

$$(Lz)(t) \equiv \dot{z}(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-a_0 r_k(t)} z(t - r_k(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ . \tag{a}$$

Легко видеть, что функция Коши C_1 уравнения (а) определяется уравнением $C_1(t,s) = C(t,s)\, e^{-a_0(t-s)}$, $(t,s) \in \Delta$, и значения функций *C* и C_1 имеют одинаковый знак во всех точках множества Δ. По условиям леммы функция *P* имеет нуль $\zeta_0 \in (0,+\infty)$. Положив $v(t) = e^{-(\zeta_0 + a_0)t} > 0$, $t \in \mathbb{R}_+$, получаем

$$(Lv)(t) = -(\zeta_0 + a_0) e^{-(\zeta_0 + a_0)t} + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-a_0 r_k(t)} e^{-(\zeta_0 + a_0)(t - r_k(t))} =$$

$$= e^{-(\zeta_0 + a_0)t} \left(-\zeta_0 - a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{\zeta_0 r_k(t)} \right) \le e^{-(\zeta_0 + a_0)t} \left(-\zeta_0 - a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{\zeta_0 \omega_k} \right) = e^{-(\zeta_0 + a_0)t} P(\zeta_0) = 0 .$$

Отсюда по теореме о дифференциальном неравенстве [4, с.65] получаем, что функция Коши уравнения (а) положительна *на множестве* Δ, а значит, положительна и функция Коши *любого уравнения семейства* (1). ▲

Лемма 8. *Пусть функция P имеет нули и все они лежат на полуоси* $(0,+\infty)$. *Тогда найдется такое число* $T > 0$, *что для всех* $s \in \mathbb{R}_+$ *функция* $C(\cdot, s)$, *где C – функция Коши произвольного уравнения семейства* (1), *убывает на полуоси* $(T + s, +\infty)$.

Доказательство. Пусть функция *P* имеет нули, и все они лежат на полуоси $(0,+\infty)$. Тогда согласно теореме 5 точка $M(a_0, a_1, ..., a_n)$ лежит не выше поверхности *F*, то есть существуют $\zeta_0 > 0$ и $s_0 \ge 1$ такие, что $s_0 = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k \omega_k e^{\zeta_0 \omega_k}}$. Значит, можно зафиксировать число τ, удовлетворяющее условиям $s_0 < \tau < \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k \omega_k}$, при этом точка $M_\tau(a_0\tau, a_1\tau, ..., a_n\tau)$ оказывается лежащей выше поверхности *F*. Рассмотрим функцию $P_\tau(\zeta) = -\zeta - a_0\tau + \tau \sum_{k=1}^{n} a_k e^{\zeta\omega_k}$, $\zeta \in \mathbb{R}$. Легко видеть, что в силу выбора τ и справедливости неравенств $P(0) > 0$ и $P'(0) < 0$ справедливы неравенства $P_\tau(0) > 0$ и $P'_\tau(0) < 0$. Определения точки M_τ и функции P_τ получаются из определений точки *M* и функции *P* путем замены набора параметров a_k набором $a_k\tau$, $k = 1, \dots, n$. Из этого с учетом отмеченных выше свойств точки M_τ и функции P_τ согласно теореме 4 получаем, что функция P_τ не имеет нулей. Значит, функция P_1, задаваемая уравнением $P_1(\zeta) = -\zeta - a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{\zeta\omega_k\tau} = \tau P_\tau(\zeta/\tau)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, тоже не имеет нулей.

Рассмотрим произвольное уравнение семейства (1). Так как $\tau > 1$, имеем $0 \le r_k(t) \le \tau\omega_k$, $k = 1,\ldots,n$, $t \in \mathbb{R}_+$. Значит, заменив в test-уравнении (2) рассматриваемого семейства уравнений (1) параметры ω_k параметрами $\tau\omega_k$, $k = 1,\ldots,n$, получаем другое test-уравнение этого семейства. Определим число l_1 и функцию P_1, заменив параметры ω_k параметрами $\tau\omega_k$ в определениях числа l и функции P. По теореме 3 получаем, что $l_1 < \infty$, следовательно, в силу леммы 1 $h_1 = -y(l_1) > 0$. Обозначим $\omega = \max_k \omega_k$ и $T = l_1 + \tau\omega$ и предположим, что найдутся точки t_1 и t_2 такие, что для некоторого $s \in \mathbb{R}_+$ имеем $s + T \le t_1 < t_2$, но $C(t_1, s) \le C(t_2, s)$. Тогда по теореме 2 найдется такая точка $t_0 \in (s, t_1)$, что $-h_0 C(t_0, s) = C(t_1, s)$. Но по лемме 7 функция Коши положительна при всех $(t, s) \in \Delta$. Приходим к противоречию, следовательно, функция $C(\cdot, s)$ строго убывает на полуоси $(T + s, +\infty)$. ▲

Лемма 9. *Пусть функция* P *имеет нули, и все они лежат на полуоси* $(0, +\infty)$. *Тогда существует такое число* $N > 0$, *что для функции Коши C любого уравнения* (1) *при всех* $(t, s) \in \Delta$ *справедлива оценка*

$$0 < C(t, s) \le N e^{-\alpha(t-s)}, \tag{b}$$

где $\alpha = -a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k > 0$.

Доказательство. Как известно [7, с. 56], функция Коши C как функция первого аргумента является решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} C(t, s) - a_0 C(t, s) = -\sum_{k=1}^{n} a_k C(t - r_k(t), s), \quad t \ge s, \tag{c}$$

дополненного начальными условиями $C(\xi, s) = 0$, $\xi < s$, и $C(s, s) = 1$.

По лемме 8 найдется такое $T > 0$, что функция $C(\cdot, s)$ монотонно убывает на полуоси $(T + s, +\infty)$. Заметим, что $\sup_{s \in \mathbb{R}_+} |C(s + T, s)| < \infty$. Прибавляя к обеим частям равенства (c) одно и то же слагаемое $\sum_{k=1}^{n} a_k C(\tau, s)$ и пользуясь формулой Коши [7, с. 67], запишем уравнение (c) в эквивалентном интегральном виде:

$$C(t, s) = e^{-\alpha(t-s-T)} C(s + T, s) + \int_{s+T}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} \sum_{k=1}^{n} a_k (C(\tau, s) - C(\tau - r_k(\tau), s))\, d\tau, \quad t \ge s + T.$$

В силу выбора T имеем $C(\tau, s) \le C(\tau - r_k(\tau), s)$, то есть

$$C(t,s) \le e^{-\alpha(t-s)} e^{\alpha T} \sup_s \left| C(s+T,s) \right| = N e^{-\alpha(t-s)}.$$

Положительность функции Коши обеспечивается леммой 7. ▲

Из теоремы 5 и лемм 5 и 9 получаем следующий результат.

Теорема 6. *Пусть выполнено любое из условий a)–d) теоремы 3. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

a) семейство уравнений (1) *асимптотически устойчиво;*

b) функция P имеет нули, и все они лежат на полуоси $(0,+\infty)$;

c) точка $M(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ лежит не выше поверхности F, задаваемой уравнениями (4)*, и справедливы неравенства $P(0) > 0$ и $P'(0) < 0$.*

Нетрудно заметить, что леммы 7–9 говорят о большем, чем асимптотическая устойчивость семейства (1). Учитывая теорему 6, сконцентрируем их результаты в одном утверждении.

Теорема 7. *Пусть семейство уравнений* (1) *асимптотически устойчиво. Тогда*

a) функция Коши $C(t,s)$ любого уравнения семейства (1) *положительна при всех $(t,s) \in \Delta$;*

b) найдется такое $T > 0$, что для любого $s \in \mathbb{R}_+$ функция $C(\cdot, s)$ убывает на полуоси $(T+s, +\infty)$;

c) для функции Коши любого уравнения семейства (1) *справедлива оценка* (b).

Заметим, что пункт c) теоремы 7 означает, что асимптотическая устойчивость семейства уравнений (1) эквивалентна равномерной экспоненциальной.

Устойчивость по начальным данным

Найдем условия, при которых в случае $l = +\infty$ семейство (1) будет устойчивым по начальным данным (далее – просто устойчивым). Напомним, что в теореме 1 уже было устновлено, что при $a_0 > \sum_{k=1}^{n} a_k$ семейство (1) не является устойчивым. Далее, из доказательства леммы 5 следует, что если функция P имеет корень на множестве $(-\infty, 0)$, то семейство (1) также не является устойчивым. Если корни функции P лежат на полуоси $(0,+\infty)$, то по теореме 4 семейство асимптотически устойчиво (1), а значит, устойчиво. Таким образом, в дополнительном исследовании нуждается единственный случай, когда функция P имеет корень в точке $\zeta = 0$.

Итак, пусть $P(0) = 0$, то есть рассмотрим семейства (1), для коэффициентов которых выполнено равенство $a_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Разобьем исследование на три случая.

Лемма 10. *Если $P(0) = 0$, а $P'(0) > 0$, то семейство* (1) *неустойчиво.*

Доказательство. Рассмотрим функцию P на множестве $(-\infty, 0]$. Так как в точке $\zeta = 0$ функция обращается в нуль, а ее производная положительна, то в некоторой (левой) окрестности этой точки P возрастает, то есть принимает отрицательные значения. С другой стороны, $\lim\limits_{\zeta\to-\infty} P(\zeta) = +\infty$, следовательно, существует точка $\zeta_0 \in (-\infty, 0)$, в которой $P(\zeta_0) = 0$. Положим в уравнении (1) $r_k(t) = \omega_k$ при всех $k = 1, 2, ..., n$ и доопределим решение при отрицательных значениях аргумента функцией $e^{-\zeta_0 t}$. Подставляя $x(t) = e^{-\zeta_0 t}$ в уравнение (1), получаем

$$-\zeta_0 e^{-\zeta_0 t} - a_0 e^{-\zeta_0 t} + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\zeta_0 (t-\omega_k)} = e^{-\zeta_0 t} P(\zeta_0) = 0,$$

то есть функция $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ есть решение уравнения (1). Так как $\zeta_0 < 0$, то $x(t)$ неограниченно возрастает. Следовательно, семейство уравнений (1) не является устойчивым. ▲

Лемма 11. *Если* $P(0) = 0$, *а* $P'(0) < 0$, *то семейство* (1) *равномерно устойчиво.*

Доказательство. Рассмотрим соответствующее уравнению (1) неоднородное уравнение с правой частью f из пространства L_1:

$$\dot{x}(t) = a_0 x(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k x(t - r_k(t)) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{d}$$

Так как $a_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, то уравнение (d) можно переписать в виде (изменив, если это необходимо, функцию f на отрезке $[0, \omega]$)

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \int\limits_{t-r_k(t)}^{t} \dot{x}(s)ds + f(t).$$

Оценим норму интегрального оператора $(Ky)(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \int\limits_{t-r_k(t)}^{t} y(s)ds$, действующего в пространстве L_1: $\|K\| \le \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \omega_k$. В силу условий леммы $P'(0) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \omega_k - 1 < 0$, значит, $\|K\| < 1$, а оператор $I - K$ обратим в пространстве L_1. Отсюда следует, что при любой функции $f \in L_1$ решение x уравнения (d) обладает свойством $\dot{x} \in L_1$.

Так как $x(t) = x(0) + \int\limits_0^t \dot{x}(s)ds$, то функция x ограничена на $\mathbb{R}_+$. По теореме о допустимости пар пространств (L_1, L_∞) [4, с.106] следует, что функция Коши любого уравнения семейства (1) ограничена в Δ, то есть семейство уравнений (1) является равномерно устойчивым. ▲

Лемма 12. *Если* $P(0)=0$, *а* $P'(0)=0$, *то семейство* (1) *неустойчиво.*

Доказательство. Положим в уравнении (1) $r_k(t)=\omega_k$ при всех $k=1,2,...,n$ и доопределим решение при отрицательных значениях аргумента функцией t. Подставляя функцию $x(t)=t$ в уравнение (1), получаем

$$1-a_0t+\sum_{k=1}^{n}a_k(t-\omega_k)=t\left(a_0-\sum_{k=1}^{n}a_k\right)+\left(1-\sum_{k=1}^{n}a_k\omega_k\right)=tP(0)+P'(0)=0,$$

то есть неограниченная функция $x(t)=t$ есть решение уравнения (1). Следовательно, семейство уравнений (1) не является устойчивым. ▲

Из теоремы 6 и лемм 10–12 получаем следующий критерий устойчивости.

Теорема 8. *Пусть выполнено любое из условий a)–d) теоремы 3. Тогда семейство уравнений* (1) *устойчиво если и только если точка* $M(a_0,a_1,a_2,...,a_n)$ *лежит не выше поверхности F, задаваемой уравнениями* (4), *и справедливы неравенства* $P(0)\geq 0,\ P'(0)<0$.

Заметим, что леммы 10–12 устанавливают также эквивалентность устойчивости и равномерной устойчивости семейства (1).

Геометрическое описание и построение области устойчивости

В этом разделе, используя теоремы 6 и 8, дадим описание устойчивости семейства (1) в терминах области в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, определяемой значениями $a_0,a_1,\dots,a_n$ и $\omega_1,\dots,\omega_n$.

Обозначим через D_0 множество точек $M(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющих условиям теоремы 6, п. с). Область D_0 – это область асимптотической устойчивости семейства (1) в следующем смысле: семейство (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда область D_0 (определяемая параметрами $a_0,a_1,\dots,a_n$ и $\omega_1,\dots,\omega_n$) такова, что $M(a_0,a_1,\dots,a_n)\in D_0$.

Теорема 9. *Область* D_0 *состоит из точек* $M(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, *обладающих следующими свойствами:*

1) $a_k\geq 0$ *при всех* $k=1,2,\dots,n$;
2) *M лежит не выше поверхности F, опредляемой уравнениями (4);*
3) $a_0<\sum_{k=1}^{n}a_k$;
4) $\sum_{k=1}^{n}a_k\omega_k<1.$

Для доказательства напомним, что $P(0)=-a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k$, а $P'(0)=-1+\sum_{k=1}^{n}a_k\omega_k$. ▲

В случае $a_0 = 0$ вид области D_0 упрощается.

Теорема 10. *Пусть* $a_0 = 0$. *Тогда область* D_0 *состоит из точек* $M(a_1,\ldots,a_n)\in \mathbb{R}^n$, *обладающих следующими свойствами:*

1) $a_k \geq 0$ *при всех* $k = 1, 2,\ldots, n$, *но* $\sum_{k=1}^{n} a_k > 0$*;*

2) M *лежит не выше поверхности, задаваемой параметрическими уравнениями* (4) *при условии* $u_0 = 0$, *то есть*

$$-\zeta + \sum_{k=1}^{n} u_k e^{\zeta\omega_k} = 0, \quad -1 + \sum_{k=1}^{n} u_k \omega_k e^{\zeta\omega_k} = 0, \quad \zeta \in \mathbb{R}_+. \tag{e}$$

Доказательство. Свойство 3) в теореме 9 следует из свойства 1). Предположим, что свойство 4) не выполнено. Тогда $P'(0) = \sum_{k=1}^{n} a_k\omega_k - 1 \geq 0$ и точка M должна лежать выше поверхности, задаваемой уравнениями (е). ▲

Обозначим через D множество точек, удовлетворяющих условиям теоремы 8. Область D – это область устойчивости семейства (1). Очевидно, $D = D_0 \cup D'$, где D' – множество точек, для которых семейство (1) является устойчивым, но не асимптотически. Из лемм 10–12 следует, что D' состоит из точек $(a_0, a_1,\ldots, a_n)$, для которых $a_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k$ и $\sum_{k=1}^{n} a_k\omega_k < 1$. Особенно прост вид множества D' для случая $a_0 = 0$: оно состоит из единственной точки $(0, 0,\ldots, 0)$.

Для случаев, когда количество слагаемых в уравнении (1) не превосходит трех, можно дать геометрическую иллюстрацию областей D_0, D и D' как областей на прямой, на плоскости или в трехмерном пространстве.

Случай 1 *(одномерный)***.**

1. *Пусть* $n = 0$. *Тогда* $D_0 = \{u \in \mathbb{R} : u < 0\}$, $D = \{u \in \mathbb{R} : u \leq 0\}$, $D' = \{0\}$.

2. *Пусть* $n = 1$ *и* $a_0 = 0$. *Тогда* $D = \{(0,u) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1/e\omega_1\}$.

Доказательство. Уравнение поверхности (е) имеет вид $-\zeta + u_1 e^{\zeta\omega_1} = 0, -1 + u_1\omega_1 e^{\zeta\omega_1} = 0$. Исключая параметр ζ, получаем $u_1 = 1/e\omega_1$. Множество точек, лежащих не выше поверхности, – отрезок $[0, 1/e\omega_1]$. ▲

Случай 2 *(двумерный).*

1. *Пусть* $n = 1$. *Тогда*

$D_0 = \{(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2 : u_0\omega_1 < u_1\omega_1 \leq e^{u_0\omega_1 - 1}, 0 \leq u_1\omega_1 \leq 1\}$,

$D = \{(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2 : u_0\omega_1 \leq u_1\omega_1 \leq e^{u_0\omega_1 - 1}, 0 \leq u_1\omega_1 < 1\}$,

$D' = \{(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2 : u_0\omega_1 = u_1\omega_1, 0 \leq u_1\omega_1 < 1\}$.

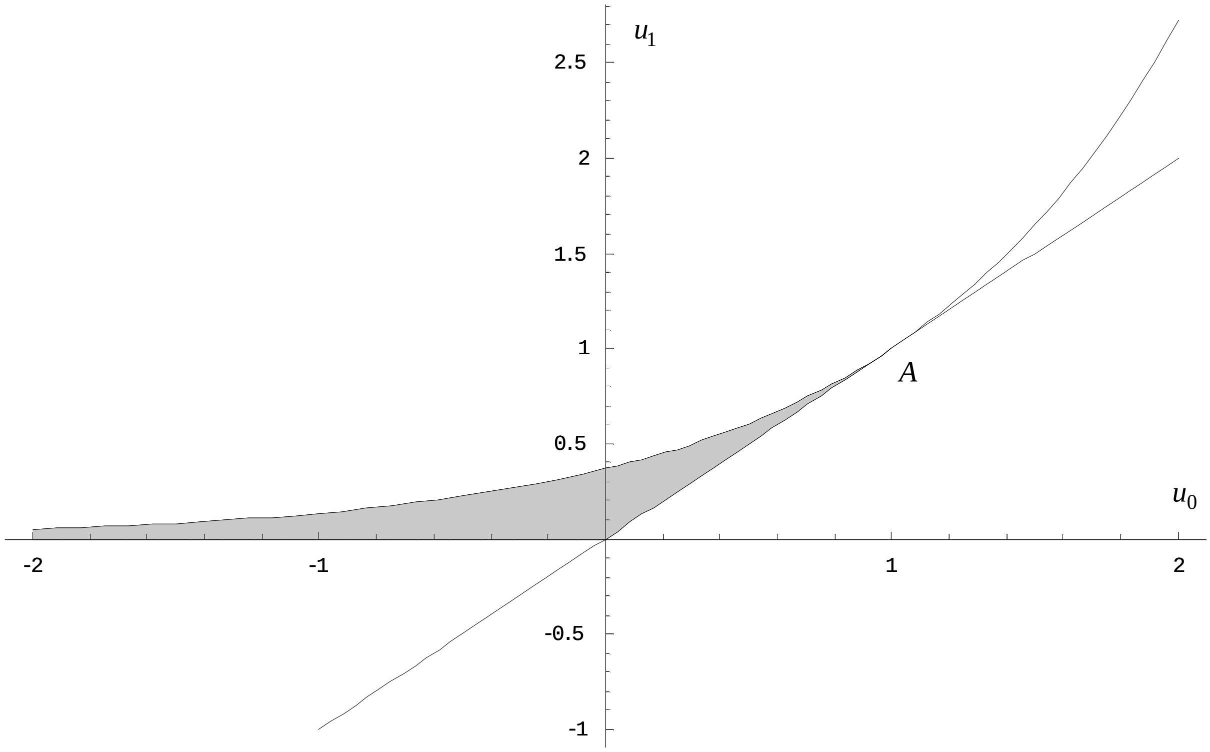

Рис. 1. Области устойчивости для $\omega_1 = 1$

Доказательство. Проверим условия теоремы 9. Первое условие означает, что область принадлежит полуплоскости $u_1 \geq 0$. Уравнение поверхности F в параметрической форме: $-\zeta - u_0 + u_1 e^{\zeta\omega_1} = 0, -1 + u_1\omega_1 e^{\zeta\omega_1} = 0$. Исключая параметр ζ, получаем явное уравнение $u_1\omega_1 = e^{u_0\omega_1 - 1}$. Множество точек, лежащих не выше поверхности F, очевидно, удовлетворяет неравенству $u_1\omega_1 \leq e^{u_0\omega_1 - 1}$. Условия 3 и 4 дают, соответственно, $u_0 < u_1$ и $u_1\omega_1 < 1$. На рис. 1 приведены области устойчивости для $\omega_1 = 1$: область D_0 заключена между кривой $u_1 = e^{u_0 - 1}$ и прямыми $u_1 = 0$, $u_0 = u_1$; она лежит слева от точки касания $A(1,1)$. Множество D' – отрезок, соединяющий начало координат с точкой A (но не включающий точку A). ▲

2. *Пусть* $n = 2$ *и* $a_0 = 0$. *Тогда* $D = \{(0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3 : u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_2 \leq \varphi(u_1)\}$, *где кривая* $u_2 = \varphi(u_1)$ *задается параметрическими уравнениями* $u_1 = \dfrac{\zeta\omega_2 - 1}{\omega_2 - \omega_1} e^{-\zeta\omega_1}$, $u_2 = \dfrac{1 - \zeta\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} e^{-\zeta\omega_2}$, $\zeta \in [1/\omega_2, 1/\omega_1]$.

Доказательство. Согласно теореме 9 поверхность (e) определяется уравнениями $-\zeta + u_1 e^{\zeta\omega_1} + u_2 e^{\zeta\omega_2} = 0$, $-1 + u_1\omega_1 e^{\zeta\omega_1} + u_2\omega_2 e^{\zeta\omega_2} = 0$. Выражая из них u_1 и u_2, получаем искомое параметрическое уравнение кривой. Область D есть область, заключенная между кривой φ и осями координат (рис. 2). Точки пересечения с осями координат имеют координаты $(1/e\omega_1, 0)$ и $(0, 1/e\omega_2)$ соответственно. ▲

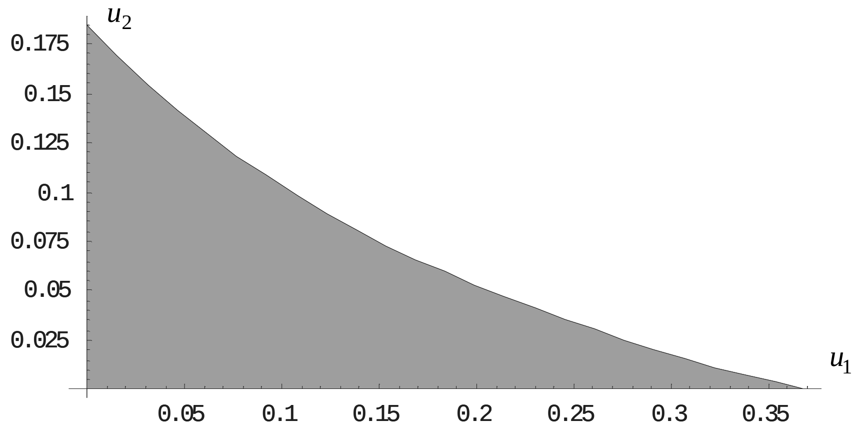

Рис. 2. Область D для $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = 3$

Случай 3 *(трехмерный).*

1. Пусть $n = 3$. *Тогда*

$$D_0 = \{(u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3 : u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_1 + u_2 \geq u_0, u_2 \leq \psi(u_0, u_1)\},$$

где поверхность $u_2 = \psi(u_0, u_1)$ *задается параметрическими уравнениями:*

$$u_1 = \frac{(\zeta + u_0)\omega_2 - 1}{\omega_2 - \omega_1} e^{-\zeta\omega_1}, \quad u_2 = \frac{1 - (\zeta + u_0)\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} e^{-\zeta\omega_2}, \quad \zeta \in \mathbb{R}_+.$$

Доказательство. Проверим условия теоремы 8. Первое условие означает, что D_0 принадлежит области $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$. Уравнение (4) поверхности F в параметрической форме: $-\zeta - u_0 + u_1 e^{\zeta\omega_1} + u_2 e^{\zeta\omega_2} = 0, -1 + u_1\omega_1 e^{\zeta\omega_1} + u_2\omega_2 e^{\zeta\omega_2} = 0$. Выражая из этих равенств u_1, u_2, получаем искомое параметрическое уравнение поверхности. Множество точек, лежащих не выше поверхности, удовлетворяет неравенству $u_2 \leq \psi(u_0, u_1)$. Условия 3 и 4 дают соответственно $u_0 < u_1 + u_2$ и $u_1\omega_1 + u_2\omega_2 < 1$. Область D_0 (рис. 3) заключена между координатными плоскостями $u_1 = 0, u_2 = 0$, поверхностью $u_2 = \psi(u_0, u_1)$ и плоскостью $u_0 = u_1 + u_2$ (точки плоскости не включаются) в полупространстве $u_1\omega_1 + u_2\omega_2 < 1$.

Поверхность $u_2 = \psi(u_0, u_1)$ и плоскость $u_0 = u_1 + u_2$ касаются по прямой

$$u_0 = \tau, \quad u_1 = \frac{\omega_2\tau - 1}{\omega_2 - \omega_1}, \quad u_2 = \frac{\omega_1\tau - 1}{\omega_1 - \omega_2}, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

от которой координатные плоскости отсекают отрезок, соединяющий точки $A_1(1/\omega_1, 1/\omega_1, 0)$ и $A_2(1/\omega_2, 0, 1/\omega_2)$. Множество D' представляет собой пространственный треугольник с вершинами в точках O, A_1 и A_2, причем сторона A_1A_2 не принадлежит D'. ▲

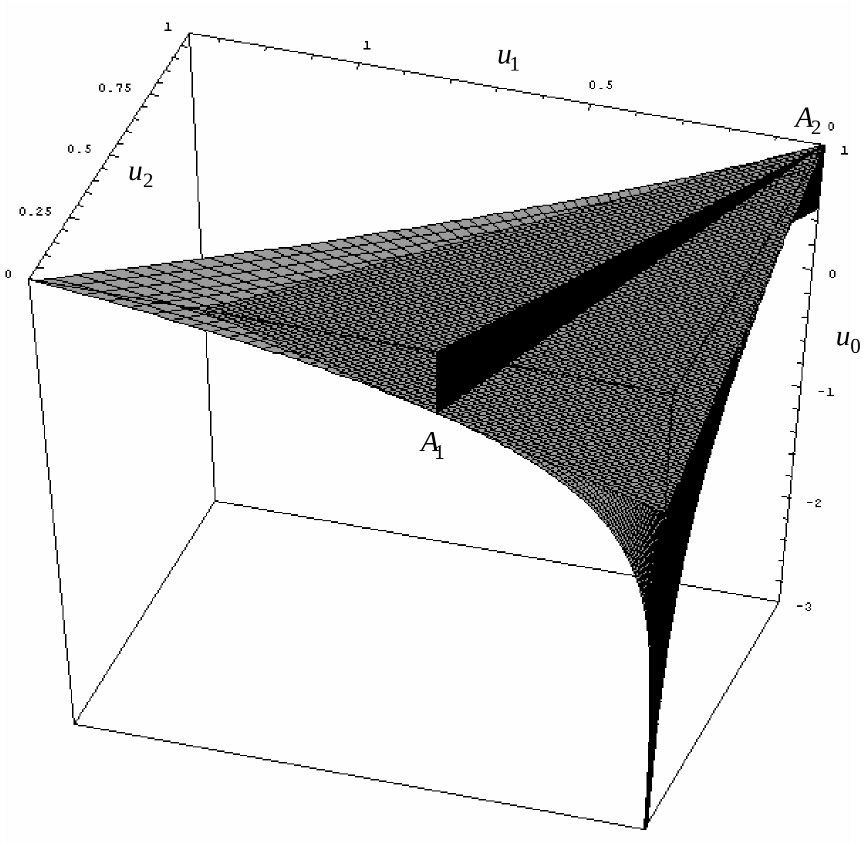

Рис. 3. Область D_0 для $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = 2$

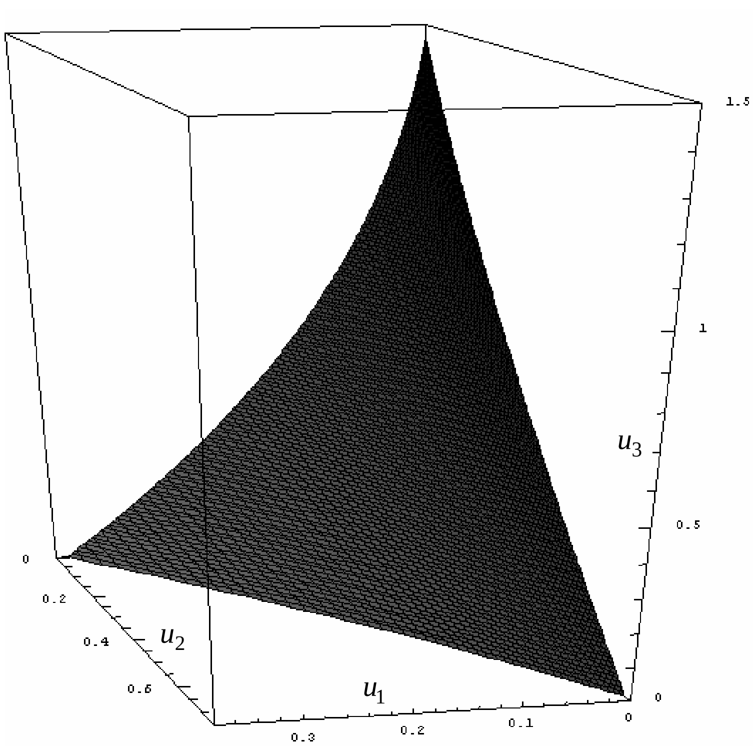

Рис. 4. Область D для $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1/2$ и $\omega_3 = 1/4$

2. *Пусть* $n = 4$ *и* $a_0 = 0$. *Тогда*

$$D = \{(0, u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^4 : u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, u_3 \leq \psi(u_1, u_2)\},$$

где поверхность $u_3 = \psi(u_1, u_2)$ *задается параметрическими уравнениями*

$$u_1 = \frac{\zeta\omega_2 - 1 + u_3 e^{\zeta\omega_3}(\omega_3 - \omega_2)}{\omega_2 - \omega_1} e^{-\zeta\omega_1}, \quad u_2 = \frac{1 - \zeta\omega_1 + u_3 e^{\zeta\omega_3}(\omega_1 - \omega_3)}{\omega_2 - \omega_1} e^{-\zeta\omega_2}, \quad \zeta \in \mathbb{R}_+.$$

Доказательство. Согласно теореме 9 поверхность (e) определяется уравнениями $-\zeta + u_1 e^{\zeta\omega_1} + u_2 e^{\zeta\omega_2} + u_3 e^{\zeta\omega_3} = 0$, $-1 + u_1\omega_1 e^{\zeta\omega_1} + u_2\omega_2 e^{\zeta\omega_2} + u_3\omega_3 e^{\zeta\omega_3} = 0$. Выражая из них u_1 и u_2, получаем искомое параметрическое уравнение поверхности. Область D – это область, заключенная между поверхностью ψ и координатными плоскостями (рис. 4). ▲

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 277 с.
2. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1964. – 128 с.
3. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 424 с.
4. Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. – 229 с.
5. Малыгина В.В., Куликов А.Ю., Чудинов К.М. Неулучшаемые достаточные условия устойчивости скалярных уравнений с несколькими запаздываниями // Вычислительная механика. – 2008. – № 7. – С. 106–119.
6. Трамов М.И. Условия колеблемости решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 5 – С. 92–96.
7. Максимов В.П. Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2003. – 306 с.